目　　录

CONTENTS

第 1 章

体上典型群

作为本书的预备知识，本章不加证明地罗列了体上典型群的一些基本知识和要用到的主要性质. 这些性质的证明可以在典型群的教科书(例如文献[15]或文献[6])中找到. 本章的另外一个目的是提供一些要用到的记号.

§1.1 若干记号

设 R 是含 1 环，R 中可逆元的乘法群记作 R^*，称为 R 的单位群. 对自然数 m、n，用 $\mathrm{Mat}_{m\times n}R$ 表示 R 上全体 $m\times n$ 矩阵的集合，而 $\mathrm{Mat}_nR=\mathrm{Mat}_{n\times n}R$ 表示 R 上全体 n 阶方阵的集合. Mat_nR 在矩阵的加法和乘法下成为环，称为 R 上的 n 级全方阵环. 对给定的 R，我们写为 $A_{(m\times n)}$ 或 $A^{(m\times n)}$ 来表示 $A\in\mathrm{Mat}_{m\times n}R$，写为 $A_{(m)}$ 或 $A^{(m)}$ 来表示 $A\in\mathrm{Mat}_mR$.

对每个 $A\in\mathrm{Mat}_{m\times n}R$，我们用 A'或 A^T 表示 A 的转置矩阵(它是 R 上的 $n\times m$ 矩阵，第(i, j)-元等于 A 的第(j, i)-元). 设 $\rho=\pm1$，如果方阵 $A\in\mathrm{Mat}_nR$ 的转置阵 $A'=\rho A$，则称 A 是 R 上的 ρ-对称方阵. Mat_nR 中的全体 ρ-对称方阵的集合记作$M^\rho(n, R)$. 当 $\rho=+1$ 时，ρ-对称方阵称为对称方阵，$M^\rho(n, R)$写为 $M^+(n, R)$. 当 $\rho=-1$ 时，ρ-对称方阵称为斜对称方阵(也称反对称方阵)，$M^\rho(n, R)$写为 $M^-(n, R)$. 主对角线元素全为 0 的斜对称方阵称为交错方阵. Mat_nR 中全体交错方阵的集合记作$M_0(n, R)$. 当 $\mathrm{char}R\neq2$ 时，斜对称方阵都是交错方阵，$M^-(n, R)=$

$M_0(n, R)$. 而当 $\mathrm{char}R = 2$ 时, $M_0(n, R) \subsetneqq M^-(n, R) = M^+(n, R)$. 每个 $P \in GL(n, R)$ 决定 $\mathrm{Mat}_n R$ 上一个相合变换 $A \mapsto PAP'$, 当 R 是含1交换环时, $M^{\pm}(n, R)$ 及 $M_0(n, R)$ 在所有的相合变换下都变到自身. 如果 F 是特征2的域,则平方元的集合 $F^2 = \{a^2 | a \in F\}$ 是 F 的子域, F 是 F^2 上的向量空间. 此时,对 F 在 F^2 上的每个子空间 L,记 $M_L(n, F) = \{A \in M^+(n, F) | A$ 的对角元全含于 $L\}$. 则每个 $M_L(n, F)$ 也被相合变换变到自身. 对环 R 上方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 定义 A 的迹 $\mathrm{Tr}A$ 为 A 的全体对角元 $a_{ij}(1 \leqslant i \leqslant n)$ 之和. 记 $\mathrm{sl}(n, R) = \{A \in \mathrm{Mat}_n R / \mathrm{Tr}A = 0\}$.

常常需要处理这样的情况: R 是体 F 上全方阵环 $\mathrm{Mat}_r F$, 此时 $\mathrm{Mat}_{m\times n} R = \mathrm{Mat}_{mr\times nr} F$, R 上的 $m \times n$ 矩阵 A 同时又是 F 上 $mr \times nr$ 矩阵. 此时,我们用 $A^{(mr\times nr)}$、$A^{(mr)}$ 分别表示 A 是 F 上的 $mr \times nr$、$mr \times mr$ 矩阵,用 A' 表示 A 在 F 上的转置,将 A 作为 F 上的矩阵的行和列分别称为 F-行、F-列; 而用 $A_{(m\times n)}$、$A_{(m)}$ 表示 A 是 R 上的 $m \times n$、$m \times m$ 矩阵,用 A^T 表示 A 在 R 上的转置,必要时称 R-行、R-列指明 A 作为 R 上矩阵的行和列.

我们用 I 表示单位方阵, O 表示零矩阵. 用 $\mathrm{diag}(A_1, \cdots, A_k)$ 表示以 $A_1, \cdots, A_k$ 为对角块的准对角方阵. 对 R 中任一元素 a 和 R 上任一矩阵 $B = (b_{ij})_{m\times n}$, $aB = (ab_{ij})_{m\times n}$, $Ba = (b_{ij}a)_{m\times n}$, 特别, $aI = \mathrm{diag}(a, \cdots, a)$ 就是 a 对应的纯量阵,而 $RI^{(m)} = \{aI^{(m)} | a \in R\}$ 是 R 在 $\mathrm{Mat}_m R$ 中的自然嵌入象. 我们也允许 $R = \mathrm{Mat}_r F$ 的情形,此时 $A \in R$ 是 F 上的 r 阶方阵,它所对应的"纯量阵" $AI_{(m)} = \mathrm{diag}(A, \cdots, A)$ (m 个 A),映射 $A \mapsto AI_{(m)}$ 将 $\mathrm{Mat}_r F$ 嵌入 $\mathrm{Mat}_{mr} F$. 对任意 F,当我们谈论方阵 $A \in \mathrm{Mat}_r F$ 与矩阵 $B \in \mathrm{Mat}_{mr\times nr} F$ 的乘积时,总是将 $\mathrm{Mat}_{mr\times nr} F$ 看作环 $R = \mathrm{Mat}_r F$ 上的 $\mathrm{Mat}_{m\times n} R$, 从而定义 $AB = (AI_{(m)})B$, $BA = B(AI_{(n)})$.

对矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathrm{Mat}_{m\times n} R$ 和 $B \in \mathrm{Mat}_{r\times k} R$, 我们定义它们的张量积

$$A \otimes B = (a_{ij}B)_{m\times n} \in \mathrm{Mat}_{mr\times nk} R.$$

特别

$$I^{(m)} \otimes B = \mathrm{diag}(B, \cdots, B) = BI_{(m)},$$

$$A \otimes I^{(r)} = (a_{ij}I^{(r)})_{m\times n} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(RI^{(r)}).$$

注意：当 $R = \mathrm{Mat}_r F$ 时，$A \otimes B$ 的定义与我们将 A 看作 R 上的矩阵还是看作 F 上的矩阵有关，必须预先指明.

除特别声明外，本书所使用的有关群、环、体的记号都是通常的. 如：

设 G 是群. 对 G 的任一子集 S，$\langle S\rangle$ 表示 S 生成的子群，$N_G(S) = \{g \in G | gSg^{-1} = S\}$，$C_G(S) = \{g \in G | gsg^{-1} = s, \forall s \in S\}$ 分别表示 S 在 G 中的正规化子和中心化子. 对 a、$b \in G$，记 $a^b = b^{-1}ab$，定义换位子 $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$. 对 G 的任意两个子群 G_1 和 G_2，记$[G_1, G_2]$为换位子 $[a, b](a \in G_1, b \in G_2)$ 的全体生成的群. 特别，$[G, G]$就是 G 的换位子群，记作 G'.

设群 G 作用于集合 Σ 上. 对 Σ 的任一子集 A，记 $G_A = \{g \in G | Ag = A\}$，称为 A 在 G 中的定驻子群（或稳定子群）. 而对 Σ 的子集族 $A, B, \cdots$，记 $G_{A, B, \cdots} = G_A \cap G_B \cap \cdots$. 反过来，对 G 的任一子集 S，用 Σ_S 表示 S 在 Σ 中的不动点的集合 $\{x \in \Sigma | xS = x\}$. 特别，当 F 是域（或体），而 σ 是 F 的自同构时，F_σ 是由 σ 的不动点组成的子域（或子体），称为 σ 的不变域（或不变体）. 当 J 是体 F 的反自同构时，J 的不动点称为（在 J 下的）对称元，F_J 是这样的对称元的全体组成的加法子群.

设 S 是群或环，则 $Z(S)$表示 S 的中心. $\mathrm{Aut}S$ 表示 S 的自同构群. S 中每个乘法可逆元 g 的共轭作用引起 S 的一个自同构 I_g: $x \mapsto g^{-1}xg$，称为 S 的内自同构. S 的全体内自同构组成 $\mathrm{Aut}S$ 的一个正规子群，记作 $\mathrm{Inn}S$. 商群 $\mathrm{Aut}S/\mathrm{Inn}S$ 称为 S 的外自同构群.

设 K 是体，F 是 K 的子体，如果 K 的自同构 σ 将 F 中所有的元素定驻不动，就称 σ 是 K 的 F-自同构. K 的 F-自同构的全体组成 $\mathrm{Aut}K$ 的一个子群，称为从体 F 到 K 的扩张 K/F 的 Galois 群，

记作 $\mathrm{Gal}K/F$. 如果 K 的反自同构 J 将 F 中所有的元素定驻不动(此时 F 必然是域),则称 J 为 K 的 F-反自同构.

§1.2 体上的向量空间与矩阵

设 F 是体,V 是加群,将 V 的加群自同态环记作 $\mathrm{End}_Z V$. 如果定义了每个 $a \in F$ 在 V 上的左乘作用 $a_L: V \to V$, $v \mapsto av$, 使映射 $a \mapsto a_L$ 是 F 到 $\mathrm{End}_Z V$ 中的同态,则 V 成为 F 上的*左向量空间*,或称*左 F-空间*. 记 $F_L = \{a_L | a \in F\}$, 则 F_L 是 $\mathrm{End}_Z V$ 的子体. F_L 在 $\mathrm{End}_Z V$ 中的中心化子就是左 F-空间 V 上全体线性变换组成的环,记作 $\mathrm{End}_F V$. 类似地可定义*右 F-向量空间* U,将每个 $a \in F$ 在 U 上的右乘作用 $u \mapsto ua$ 记作 a_R,所有的 $a_R(a \in F)$ 组成 $\mathrm{End}_Z U$ 的子体 F_R,它在 $\mathrm{End}_Z V$ 中的中心化子等于 $\mathrm{End}_F U$.

如果 F 是域,则左 F-空间 V 可通过定义 $va = av(\forall a \in F, v \in V)$ 成为右 F-空间,右 F-空间也可类似地定义为左 F-空间. 因此,对域 F 上的左空间和右空间可不加区别,统称为 F-空间. 但当 F 是非交换体时,则不能这样做. 这是因为,左 F-空间要求 $(ab)v = a(bv)$ 对所有的 a、$b \in F$ 和 $v \in V$ 成立,而右 F-空间要求的则是 $v(ab) = (va)b$. 如果对左 F-空间 V 定义 $va = av$, 就会导致 $v(ab) = (ab)v = a(bv) = (vb)a$, 而不是 $v(ab) = (va)b$, 违反了右空间的公理. 但是,如果体 F 与 K 之间存在*反同构* $\tau: F \to K$ 使 $(a+b)^\tau = a^\tau + b^\tau$, $(ab)^\tau = b^\tau a^\tau$ 对所有的 a、$b \in F$ 成立,则左 F-空间 V 可通过定义 $va^\tau = av$ 成为右 K-空间,右 F-空间也可类似地成为左 K-空间. 特别,在体 F 上可重新定义乘法 $a * b = ba$, 使集合 F 在这个乘法及原来的加法下成为另外一个体 F^{op},称为 F 的*对偶体*. 当然 F 也是 F^{op} 的对偶体. 集合 F 的单位变换 $a \mapsto a$ 是体 F 与 F^{op} 之间的反同构. 这样,定义 $va = av$ 就使左 F-空间 V 成为右 F^{op}-空间,右 F-空间也可类似地成为左 F^{op}-空间.

我们总是将体 F 上全体 n 维行向量的集合 $\mathrm{Mat}_{1\times n}F$ 在矩阵运算下看成 n 维左 F-空间,称为 F 上 *n 维行向量空间*;F 上全体 n

维列向量的集合 $\mathrm{Mat}_{n\times 1}F$ 则看成右 F-空间，称为 F 上 n 维列向量空间.

每个矩阵 $A\in\mathrm{Mat}_{n\times m}F$ 的右乘作用引起行向量空间 $\mathrm{Mat}_{1\times n}F$ 到 $\mathrm{Mat}_{1\times m}F$ 的一个线性映射 $g:x\mapsto xA$. 我们把这个线性映射 g 的象 $\mathrm{Im}g$ 和核 $\mathrm{Ker}g$ 也分别称为 A 的象和核，分别记作 $\mathrm{Im}A$、$\mathrm{Ker}A$. $\mathrm{Im}A$ 就是 A 的行向量张成的空间，称为 A 的行空间，它的维数也就是 A 的秩 $\mathrm{rank}A$. 而 $\mathrm{Ker}A$ 就是 n 元齐次线性方程组 $xA=0$ 的解空间，它的维数等于 $n-\mathrm{rank}A$. 有时候，F 上的矩阵 A 同时也可以看成另外一个体 $K\subset\mathrm{Mat}_rF$ 上的矩阵，A 在 F 上和在 K 上可能有不同的秩. 这时我们将 A 在 F 上的秩称为 F-秩，记作 rank_FA，在不会造成混淆的情形下，也直接称为 A 的秩，并记为 $\mathrm{rank}A$；而 A 在 K 上的秩称为 K-秩，记为 rank_KA.

我们用 $V(n,F)$ 表示体 F 上 n 维左向量空间. 对任一 $V=V(n,F)$，取定它的一组基 $\mathscr{E}=\{e_1,\cdots,e_n\}$，则任一向量 $v=x_1e_1+\cdots+x_ne_n\in V(x_i\in F,\forall 1\leq i\leq n)$ 与它的坐标 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathrm{Mat}_{1\times n}F$ 之间的对应是左 F-空间 V 到 $\mathrm{Mat}_{1\times n}F$ 的同构. 在这个同构的意义下，可以把每个 v 与它的坐标 x 等同起来，从而把 V 写成行向量空间 $\mathrm{Mat}_{1\times n}F$. V 的基向量 e_i 被写成 $\mathrm{Mat}_{1\times n}F$ 中第 i 分量为 1、其余分量为 0 的行向量. 以后，当 e_i 是行向量时，我们总认为它表示第 i 分量为 1、其余分量为 0 的行向量，这些向量 $\{e_i\mid 1\leq i\leq n\}$ 构成的基称为 $\mathrm{Mat}_{1\times n}F$ 的自然基.

设 $V=V(n,F)$，$U=V(m,F)$ 是同一个体 F 上的两个左空间，V 到 U 的全体线性映射的集合记作 $\mathrm{Hom}_F(V,U)$. 分别取定 V 的基 $\mathscr{E}=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 和 U 的基 $\mathscr{B}=\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$，将 V 和 U 写成行向量空间 $\mathrm{Mat}_{1\times n}F$、$\mathrm{Mat}_{1\times m}F$. 对每个 $g\in\mathrm{Hom}_F(V,U)$，设 $A\in\mathrm{Mat}_{n\times m}F$ 是以基 $e_i\in V=\mathrm{Mat}_{1\times n}F$ 的象 $e_ig\in U=\mathrm{Mat}_{1\times m}F$ 为第 i 行 $(1\leq i\leq n)$ 组成的矩阵，则 $g:x\mapsto xA$ 成立，即 g 相当于用矩阵 A 右乘 $V\in\mathrm{Mat}_{1\times n}F$ 中的行向量，A 称为线性映射 g 在基 $\mathscr{E}$、$\mathscr{B}$ 下的矩阵.

设 $V=V(n,F)$，则 $\mathrm{Hom}_F(V,F)$就是 V 上的全体线性函数

组成的集合,记为V^*.对f、$f'\in V^*$和$a\in F$定义$f+f':V\to F$, $v\mapsto vf+vf'$和$fa:V\to F$, $v\mapsto(vf)a$,则$f+f'$, $fa\in V^*$, V^*在这样定义的加法和乘法下成为F上n维右空间,称为V的对偶空间.取基$\mathscr{E}=\{e_1, \cdots, e_n\}$,将$V$写成$\mathrm{Mat}_{1\times n}F$,则每个$f\in V^*$具有形式$f:x\mapsto x\beta$,其中$\beta\in\mathrm{Mat}_{n\times 1}F$是$F$上$n$维列向量,它的第$i$分量等于$e_if$, $\forall 1\leq i\leq n$. β也就是f作为线性映射在V的基$\mathscr{E}$和F的基$\{1\}$下的矩阵.映射$V^*\to\mathrm{Mat}_{n\times 1}F$, $f\mapsto\beta$是右向量空间的同构.在这个同构的意义下,可以将线性函数f等同于列向量β,把V^*等同于列向量空间$\mathrm{Mat}_{n\times 1}F$, $x\in V$在$f\in V^*=\mathrm{Mat}_{n\times 1}F$下的值$xf$即是行向量$x$与列向量$f$按矩阵乘法所得的积. $\{e_i'|1\leq i\leq n\}$构成$\mathrm{Mat}_{n\times 1}F$的自然基.这里$e_i'$是行向量$e_i$的转置,即第$i$分量为1、其余分量为0的列向量,它对应的线性函数$e_i^*\in V^*$在$e_i$上取值为1,在其余$e_j(j\neq i)$上取值为0. $\mathscr{E}^*=\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$是$V^*$的一组基,称为$\mathscr{E}$的对偶基.

仍设$V=V(n, F)$,则$\mathrm{Hom}_F(V, V)$就是V上全体线性变换组成的环(即V的自同态环)End_FV,称为V上的全线性变换环.取基$\mathscr{E}=\{e_1, \cdots, e_n\}$将$V=V(n, F)$写成行向量空间$\mathrm{Mat}_{1\times n}F$,则每个$g\in\mathrm{End}V$对应于一个方阵$A$,使$g:x\mapsto xA$, A的第i行等于e_ig, A称为g在基$\mathscr{E}$下的矩阵.线性变换与矩阵的这种对应关系$g\mapsto A$,是全线性变换环End_FV与全方阵环Mat_nF之间的环同构.在这个同构的意义下,可以把End_FV与Mat_nF等同起来.特别当$n=1$时,V可等同于F,而$\mathrm{End}_FV=\mathrm{End}_FF=F_R$.

对体F上n维右向量空间U可以作类似的讨论:取定一组基后,可以将U等同于列向量空间$\mathrm{Mat}_{n\times 1}F$. End_FU由Mat_nF中矩阵的左乘作用的全体组成,当$n=1$时, $U=F$,此时$\mathrm{End}_FU=F_L$.

如果F、E是两个体,V同时是左F-空间和右E-空间,并且$E_R\subseteq\mathrm{End}_FV$,则$V$称为$F$-$E$-双空间.如果$F$-$E$-双空间$V$是一维左$F$-空间,则$E_R$是$\mathrm{End}_FV=F_R$的子体,从而$E$可看作$F$的子体.同样,如果$F$-$E$-双空间$V$是一维右$E$-空间,则$F_L\subseteq E_L$, F可

看作 E 的子体.

如果 $\mathscr{E}=\{e_1, \cdots, e_n\}$ 与 $\mathscr{B}=\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 是 $V=V(n, F)$ 的两组基，它们之间有过渡矩阵 $P=(p_{ij})_{n\times n}$，使 $\beta_i=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}e_j$，$\forall 1\leq i\leq n$. 则同一个向量 $v\in V$ 在这两组基下的坐标 x、y 之间有坐标变换公式 $x=yP$，同一个线性变换 $\mathscr{A}\in \mathrm{End}(V)$ 在这两组基下的矩阵 A、B 之间有共轭关系式 $B=PAP^{-1}$.

在本书的证明中，要反复用到关于矩阵乘法的下述简单知识：设 $A\in \mathrm{Mat}_{m\times n}R$，$B\in \mathrm{Mat}_{n\times k}R$ 都是环 R 上的矩阵，$A_i\in \mathrm{Mat}_{1\times n}R$ 是 A 的第 i 行，则 AB 的第 i 行等于 A_iB，特别，$A_i=0\Longrightarrow AB$ 的第 i 行为零；$P\in \mathrm{Mat}_nR$ 定驻 $A_i\Longrightarrow APB$ 与 AB 的第 i 行相等. B 的列与 AB 的列之间也有类似的关系.

§1.3 线 性 群

设 $V=V(n, F)$ 是体 F 上 n 维左向量空间，则 V 上全体可逆线性变换对变换的乘法而言组成一个群，称为 V 上的一般线性群，记作 $\mathrm{GL}(V)$. 在必要时也记为 $\mathrm{GL}(V/F)$，以指明 F. 换句话说，$\mathrm{GL}(V)$ 就是环 End_FV 的单位群，也就是左 F-空间 V 的自同构群.

对给定的 F 和 n，向量空间 V 在同构的意义下是唯一确定的. 因此 $\mathrm{GL}(V)$ 实质上由 F 和 n 唯一决定，与 V 的具体选取无关，可记作 $\mathrm{GL}(n, F)$，称为 F 上 n 级一般线性群，当 $F=F_q$ 是 q 元有限域时，也记作 $\mathrm{GL}(n, q)$.

取定 $V=V(n, F)$ 的一组基将 End_FV 等同于全方阵环 Mat_nF，从而 End_FV 的单位群等同于 Mat_nF 的单位群，即 F 上全体 n 阶可逆方阵的乘法群. 因此，一般线性群 $\mathrm{GL}(n, F)$ 也可定义为 F 上全体 n 阶可逆方阵在矩阵乘法下所成的群.

当 F 是域时，在线性代数里，定义了 F 上 n 阶方阵 A 的行列式 $\det A$，由公式 $\det(AB)=\det A\det B$ 可知，行列式映射 $\det$: $\mathrm{Mat}_nF\to F$，$A\mapsto \det A$ 保乘法，诱导出乘法群 $\mathrm{GL}(n, F)$ 到 F^* 的

一个满同态，这里 F^* 是 F 中非零元素的乘法群. 这个同态的核称为 F 上 n 级**特殊线性群**，也称作**幺模群**，记作 $\mathrm{SL}(n, F)$. 换言之，$\mathrm{SL}(n, F)=\{A\in \mathrm{GL}(n, F)\mid \det A=1\}$. 当 F 是 q 元有限域时，也将 $\mathrm{SL}(n, F)$记为 $\mathrm{SL}(n, q)$. 由同态基本定理知：$\mathrm{SL}(n, F)$ 是 $\mathrm{GL}(n, F)$的正规子群，商群 $\mathrm{GL}(n, F)/\mathrm{SL}(n, F)\cong F^*$.

设 $n\geq 2$，用 E_{ij}表示第(i, j)-位置是 1、其余位置是 0 的 n 阶方阵. 对 $i\neq j$, $s\in F$，记 $T_{ij}(s)=I+sE_{ij}$ (I 是单位方阵)，则当 F 是域时，所有的 $T_{ij}(s)(i\neq j, s\in F^*)$ 生成的群就是 $\mathrm{SL}(n, F)$. 因此，当 F 是任意体时，我们将 F 上 n 级特殊线性群 $\mathrm{SL}(n, F)$定义为所有的 $T_{ij}(s)(i\neq j, s\in F^*)$ 生成的群，它是 $\mathrm{GL}(n, F)$的正规子群. 每个可逆方阵 $A\in\mathrm{GL}(n, F)$ 可写成 $A=A_1D(d)$ 的形式，其中 $A_1\in\mathrm{SL}(n, F)$, $D(d)=\mathrm{diag}(1, \cdots, 1, d)$ 是对角阵，它的前 $n-1$ 个对角元全是 1，最后一个对角元 $d\in F^*$. 记 C 是乘法群 F^* 的换位子群，则前述表达式 $A=A_1D(d)$ 中 d 所在的 C 的陪集 $dC\in F^*/C$ 由 A 唯一决定. 我们可以定义 A 的行列式 $\det A=dC\in F^*/C$. 映射 $\det: \mathrm{GL}(n, F)\to F^*/C$, $A\mapsto \det A$ 是乘法群的满同态，$\mathrm{SL}(n, F)$是这个同态的核. 由此得到

$$\mathrm{GL}(n, F)/\mathrm{SL}(n, F)\cong F^*/C.$$

对一般的含幺环 R，我们也定义 $\mathrm{GL}(n, R)$为 R 上 n 阶可逆方阵的乘法群，$\mathrm{SL}(n, R)(n\geq 2)$ 为 $T_{ij}(s)(i\neq j, s\in R)$ 生成的 $\mathrm{GL}(n, R)$的子群.

仍设 F 是体，特殊线性群的生成元 $T_{ij}(s)(i\neq j, s\in F^*)$ 及其在$\mathrm{GL}(n, F)$中的共轭称为**平延**. 所有的平延都含于 $\mathrm{SL}(n, F)$，并且共同生成 $\mathrm{SL}(n, F)$. 按矩阵的语言，平延可刻画为满足条件 $(T-I)^2=0$ 且 $\mathrm{rank}(T-I)=1$ 的矩阵 $T\in \mathrm{Mat}_nF$. 按几何的语言，平延是 V 上形如 $\tau_{u,f}: x\mapsto x+(xf)u$ 的线性变换，这里 $0\neq u\in V$ 是非零向量，$0\neq f\in V^*$ 是非零线性函数，且 $uf=0$.

对任意满足 $i\neq j$ 的 $1\leq i, j\leq n$，记

$$P_{ij}=I-E_{ii}-E_{jj}+E_{ij}-E_{ji},$$

则 $P_{ij} \in \mathrm{SL}(n, F)$，它在 $V = \mathrm{Mat}_{1\times n}F$ 上的右乘作用将自然基向量 $e_i \mapsto e_j$，$e_j \mapsto -e_i$，而其余 e_k 不动 $(k \neq i, j)$. 为了叙述方便，我们也对 $i = j$ 的情形约定 $P_{ii} = I \in \mathrm{SL}(n, F)$. 一般地，如果一个矩阵 $P \in \mathrm{GL}(n, F)$ 的每一行和每一列都只有一个非零元，则 P 称为**单项矩阵**，它的右乘作用引起自然基所张成的一维子空间 $\langle e_i \rangle (1 \leq i \leq n)$ 之间的一个置换. 特别，当单项矩阵 P 的每行每列仅有的一个非零元为 1 时，它引起基向量 $e_i (1 \leq i \leq n)$ 之间的一个置换，此时称 P 为**置换阵**，它含于 $\mathrm{SL}(n, F)$ 当且仅当相应的置换是偶置换. 为了让 $\mathrm{SL}(n, F)$ 也含有引起奇置换的方阵，我们把每行每列的唯一的非零元等于 ± 1 的单项矩阵也称为置换阵，它引起 $\pm e_i (1 \leq i \leq n)$ 之间的一个置换. 按这样的定义，$P_{ij} (i \neq j)$ 都是置换阵，而且 $\mathrm{SL}(n, F)$ 的置换阵都可以写成形如 P_{ij} 的置换阵的乘积.

一般线性群 $\mathrm{GL}(n, F)$ 的中心由这样的纯量阵 λI 的全体组成，其中 $\lambda \in Z(F)^*$ (即 λ 是 F 的非零中心元). 我们称这样的矩阵 λI 为**中心纯量阵**，对应的线性变换 $\lambda 1_V$ 称为**中心纯量变换**. 特殊线性群 $\mathrm{SL}(n, F)$ 的中心等于 $\mathrm{SL}(n, F) \cap Z(F)^* I$. $\mathrm{GL}(n, F)$ 和 $\mathrm{SL}(n, F)$ 对它们各自的中心的商群分别叫作**射影一般线性群**和**射影特殊线性群**，分别记作 $\mathrm{PGL}(n, F)$，$\mathrm{PSL}(n, F)$，当 F 是 q 元有限域时，也分别记作 $\mathrm{PGL}(n, q)$，$\mathrm{PSL}(n, q)$. 用 $P_{n-1}(F)$ 表示 V 的一维子空间组成的 $n-1$ 维射影空间，则 $\mathrm{PGL}(n, F)$、$\mathrm{PSL}(n, F)$ 分别是 $\mathrm{GL}(n, F)$、$\mathrm{SL}(n, F)$ 在 $P_{n-1}(F)$ 上诱导出的变换群. 我们有如下定理：

定理 1.3.1 除 $\mathrm{SL}(2, 2)$ 外，$\mathrm{GL}(n, F)$ 的换位子群等于 $\mathrm{SL}(n, F)$；除 $\mathrm{SL}(2, 2)$、$\mathrm{SL}(2, 3)$ 外，$\mathrm{SL}(n, F)$ 的换位子群等于 $\mathrm{SL}(n, F)$ 自身.

定理 1.3.2 除 $\mathrm{PSL}(2, 2)$、$\mathrm{PSL}(2, 3)$ 外，$\mathrm{PSL}(n, F)$ 是单群.

$\mathrm{PSL}(2, 2)$、$\mathrm{PSL}(2, 3)$ 分别同构于置换群 S_3、A_4，确实不是单群.

如果 $\sigma \in \mathrm{End}_Z V$，且存在由 σ 唯一决定的 $\tau \in \mathrm{Aut}F$，使 $(ax)\sigma = a^{\tau}(x\sigma)$ 对所有的 $x \in V$、$a \in F$ 成立，则 σ 称为 V 上的**半线性变换**. 可逆的半线性变换称为**直射变换**. V 上全体直射变换组成一个群，称为**直射变换群**，记作 $\Gamma\mathrm{L}(n,F)$. $\Gamma\mathrm{L}(n, F)$ 在射影空间 PV 上诱导出变换群 $\mathrm{P\Gamma L}(n, F)$. 每个 $\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(n, F)$ 到它所决定的 $\tau \in \mathrm{Aut}F$ 的对应定义了群 $\Gamma\mathrm{L}(n, F)$ 到 $\mathrm{Aut}F$ 的一个满同态，同态核就是 $\mathrm{GL}(n, F)$. 故 $\mathrm{GL}(n, F) \trianglelefteq \Gamma\mathrm{L}(n, F)$，且商群 $\Gamma\mathrm{L}(n, F)/\mathrm{GL}(n, F) \cong \mathrm{Aut}F$.

定理 1.3.3（射影几何基本定理） 设 $n \geq 3$，σ 是 $P_{n-1}(F)$ 的可逆变换，则 σ 保持射影点的共线关系 $\Longleftrightarrow \sigma \in \mathrm{P\Gamma L}(n, F)$.

定理 1.3.4 设 F 是体，$n \geq 2$，则 $\mathrm{SL}(n, F)$ 的自同构 σ 具有形式

$$\sigma: A \mapsto PA^{\tau}P^{-1}, \quad 或 \quad \sigma: A \mapsto P(A^{J})'^{-1}P^{-1};$$

$\mathrm{GL}(n, F)$ 的自同构具有形式

$$\sigma: A \mapsto \chi(\det A)PA^{\tau}P^{-1},$$

或

$$\sigma: A \mapsto \chi(\det A)P(A^{J})'^{-1}P^{-1}.$$

上式中 $P \in \mathrm{GL}(n, F)$，$\tau \in \mathrm{Aut}F$，J 是 F 的反自同构，χ 是 F^*/C 到乘法群 $Z(F)^*$ 中的同态，这里 C 是 F^* 的换位子群.

$\mathrm{PGL}(n, F)$、$\mathrm{PSL}(n, F)$ 的自同构可分别由 $\mathrm{GL}(n, F)$、$\mathrm{SL}(n, F)$ 的具有上述形式的某个自同构诱导出来.

§1.4 内积决定的酉群

设 F 是任意体，$Z(F)$ 是 F 的中心. 设 F 具有反自同构 $J: a \mapsto \overline{a}$，$V$ 是 F 上 n 维左向量空间，V 上二元函数 $h: V \times V \to F$ 如果满足条件

$$h\left(\sum_{i=1}^{2} a_i x_i, \sum_{j=1}^{2} b_j y_j\right) = \sum_{i,j=1}^{2} a_i h(x_i, y_j)\overline{b_j},$$

$$\forall x_i、y_j \in V, a_i、b_j \in F \ (1 \leq i, j \leq 2),$$

则称 h 为 V 上 J-半双线性型. 对给定的 J, V 上全体 J-半双线性型的集合记作 Sesq(V). 在 Sesq(V)上可定义加法,使

$$(h + h_1)(x, y) = h(x, y) + h_1(x, y),$$

$$\forall h、h_1 \in \mathrm{Sesq}(V), x、y \in V.$$

对任意的 $h \in$ Sesq (V)和体的中心元 $\lambda \in Z(F)$, 可定义 $\lambda h \in$ Sesq(V) 使 $(\lambda h)(x, y) = \lambda h(x, y)$. 这样, Sesq($V$)就成为域 $Z(F)$上向量空间. 对任意的 $h \in$ Sesq(V) 和 $\lambda \in F^*$ (λ 不一定是中心元), 也可以定义函数 $h\lambda: V \times V \to F$ 使 $(h\lambda)(x, y) = h(x, y)\lambda$, 但 $h\lambda$ 一般并不是 J-半双线性型, 而是关于 F 的另一个反自同构 $JI_\lambda: a \mapsto \lambda^{-1}\bar{a}\lambda$ 的 JI_λ-半双线性型. $JI_\lambda = J$ 当且仅当 $\lambda \in Z(F)^*$.

如果 F 的反自同构 $J: a \mapsto \bar{a}$ 满足条件 $J^2 = 1$, 就称 J 为 F 的对合性反自同构, 或简称对合. 以下假设取定了 F 的对合 J, Sesq(V)由 V 上全体 J-半双线性型组成. 对每个 $h \in$ Sesq(V), 定义

$$\bar{h}: V \times V \to F, \ \bar{h}(x, y) = \overline{h(y, x)},$$

则 $\bar{h} \in$ Sesq(V). 这就定义了 J 在 Sesq(V)上的一个作用. 对 $\rho = \pm 1 \in F^*$, 当 $f \in$ Sesq(V) 满足条件 $\bar{f} = \rho f$ 时称 f 为 V 上 ρ-Hermite 型. 当 $\rho = 1$ 时称 f 为 Hermite 型; 当 $\rho = -1$ 时称 f 为反 Hermite 型, 也称斜 Hermite 型. (注: 更一般地可取 ρ 为 $Z(F)^*$ 中满足条件 $\rho\bar{\rho} = 1$ 的任一中心元. 但为定义酉群, 取 $\rho = \pm 1$ 也就够了). 每个 ρ-Hermite 型 f 在 V 上定义了一个对称的正交关系:

$$x \perp y \Longleftrightarrow f(x, y) = 0 \Longleftrightarrow f(y, x) = 0.$$

此时对 V 的每个子空间 W 可定义 $W^\perp = \{x \in V \mid f(x, w) = 0, \forall w \in W\}$ 及 $\mathrm{Rad}W = W \cap W^\perp$. 如果 $\mathrm{Rad}W = 0$, 就称子空间 W 是非退化的; 如果 $\mathrm{Rad}V = 0$, 就称 f 是非退化的 ρ-Hermite 型.

记

$$F^{J,\rho}=\{a\in F\,|\,\bar{a}=\rho a\},\ F_{J,\rho}=\{a+\rho\bar{a}\,|\,a\in F\},$$

则 $F^{J,\rho}$ 和 $F_{J,\rho}$ 都是 F 的加法子群，且 $F_{J,\rho}\subseteq F^{J,\rho}$. 仅当 $\mathrm{char}F=2$ 时，才有可能出现 $F_{J,\rho}\subsetneqq F^{J,\rho}$ 的情形. $F^{J,1}$ 中的元素也就是 F 中被 J 固定不动的元素，称为*对称元*，$F^{J,1}$ 也被记为 F_J. $F^{J,-1}$ 中的元素称为*反对称元*. $F_{J,1}$ 的元素 $a+\bar{a}$ $(a\in F)$ 叫做*迹*，$F_{J,1}$ 也被记为 $\mathrm{Tr}F$. 设 f 是 ρ-Hermite 型，则 $f(x,x)\in F^{J,\rho}$ 对所有的 $x\in V$ 成立. 如果进一步要求 $f(x,x)\in F_{J,\rho}$ 对所有的 $x\in V$ 成立，则 f 被称为*迹式 ρ-Hermite 型*. $f\in\mathrm{Sesq}(V)$ 是迹式 ρ-Hermite 型当且仅当它能写成 $f=h+\rho\bar{h}$ 的形式，其中 $h\in\mathrm{Sesq}(V)$. $f=h+\rho\bar{h}$ 称为与 $h\in\mathrm{Sesq}(V)$ *相伴的迹式 ρ-Hermite 型*.

V 上迹式 ρ-Hermite 型 f 称为 V 上的一个*内积*. 除非另外说明，我们将总是假定 f 为非退化的. 在不会引起混淆时，我们也将内积 $f(x,y)$ 简记为 (x,y). 如果需要特别指明 $V=V(n,F)$ 上定义了内积 f，我们将 V 写为 (V,f) 或 $V(n,F,f)$. 设 (V,f) 和 (V_1,f_1) 是 F 上两个同维数的空间，分别定义了关于 F 的同一个对合 J 的两个内积 f 和 f_1. 设有线性同构(即可逆线性映射) $\sigma:V\to V_1$ 及由 σ 决定的 $\gamma\in F^*$ 使 $f_1(x\sigma,y\sigma)=\gamma f(x,y)$ 对所有的 x、$y\in V$ 成立，则 σ 称为 V 到 V_1 的*度量相似*. 由 V 非退化可选 x、y，使 $f(x,y)=1$，从而 $f_1(x\sigma,y\sigma)=\gamma$，且对所有的 $a\in F$ 有

$$a\gamma=f_1(ax\sigma,y\sigma)=\gamma f(ax,y)=\gamma a,$$

这说明 $\gamma\in Z(F)^*$；又由 $\overline{\rho\gamma}=f_1(y\sigma,x\sigma)=\gamma\rho$ 知 $\bar{\gamma}=\gamma$，即 γ 必须是中心对称元. 当 $\gamma=1$ 时称 σ 为*度量同构*. 若 (V,f) 与 (V_1,f_1) 之间存在度量同构(或度量相似)，则称内积 f 和 f_1 是*等价*(或*相似*)的；称空间 V 和 V_1 是*度量等价*(或*度量相似*)的. 在特殊情形 $V=V_1$ 下，上面定义的就是同一个空间 V 上两个内积 f 和 f_1 的相似或等价. 更进一步，在 $V=V_1$ 且 $f=f_1$ 的情形，(V,f) 到自身的度量同构称为 (V,f) 上的*酉变换*，而 (V,f) 到自身的度量相

似称为 V 上的**广义酉变换**. (V, f)上全体酉变换组成 $\mathrm{GL}(V)$的一个子群,称为 V 上由内积 f 决定的**酉群**,记作 $\mathrm{U}(V, f)$,当 $V=V(n, F, f)$ 时,也记作 $\mathrm{U}(n, F, f)$. (V, f)上全体广义酉变换也组成一个群,称为**广义酉群**,记作 $\mathrm{GU}(V, f)$或 $\mathrm{GU}(n, F, f)$. 按照定义,每个 $g\in\mathrm{GU}(V, f)$对应于非零的一个中心对称元 γ,使 $f(xg, yg)=\gamma f(x, y)$ 对所有的 x、$y\in V$ 成立,这个 γ 称为 g 的**乘子**. $g\mapsto\gamma$ 是乘法群的同态,同态核就是 $\mathrm{U}(V, f)$. 因此 $\mathrm{U}(V, f)\trianglelefteq\mathrm{GU}(V, f)$. 事实上,$\mathrm{GU}(V, f)$就是 $\mathrm{U}(V, f)$在 $\mathrm{GL}(V)$中的正规化子. 我们还定义

$$\mathrm{SU}(V, f)=\mathrm{U}(V, f)\cap\mathrm{SL}(V),$$

称为**特殊酉群**,它显然是 $\mathrm{U}(V, f)$的正规子群. 如果 V 上两个内积 f 和 f_1 相似,则它们决定的酉群 $\mathrm{U}(V, f)$和 $\mathrm{U}(V, f_1)$在 $\mathrm{GL}(V)$中相互共轭,可以认为实质上是相同的.

设 W 是(V, f)的子空间,则每个 $g\in\mathrm{U}(V, f)$ 显然诱导出 W 到 Wg 的度量同构. 反过来,我们有(但是并不显然)如下定理:

定理 1.4.1(Witt 扩张定理) 设(V, f)的两个子空间 W 和 W_1 之间存在度量同构 $\sigma: W\to W_1$,则 σ 可扩充为 $g\in\mathrm{U}(V, f)$,使 g 在 W 上的限制 $g|_W=\sigma$.

如果 $J=1$,则 F 是域,J-半双线性型成为**双线性型**,此时称 ρ-Hermite 型 f 为 **ρ-对称双线性型**,当 $\rho=1$ 或 -1 时分别称为 V 上的**对称**或**斜对称双线性型**. f 是迹式的斜对称双线性型,当且仅当 $f(x, x)=0$ 对所有的 $x\in V$ 成立,这样的 f 称为**交错型**. 当 f 是非退化交错型时,n 必然是偶数,此时群 $\mathrm{U}(V, f)$称为**辛群**,记作 $\mathrm{Sp}(V, f)$ 或 $\mathrm{Sp}(n, F, f)$;而 $\mathrm{GU}(V, f)$称为**广义辛群**,记作 $\mathrm{GSp}(V, f)$或 $\mathrm{GSp}(n, F, f)$. 我们有

$$\mathrm{Sp}(n, F, f)\leq\mathrm{SL}(n, F),\text{ 并且 }\mathrm{Sp}(2, F, f)=\mathrm{SL}(2, F),$$

因此 $\mathrm{Sp}(n, F, f)\cap\mathrm{SL}(n, F)$ 就等于 $\mathrm{Sp}(n, F, f)$,不需要使用"特殊辛群"这一名称. 同一空间 $V(2m, F)$上所有的非退化交错

型相互等价,实质上只有一种辛群,因此我们也可将 $\mathrm{Sp}(2m, F, f)$ 简记为 $\mathrm{Sp}(2m, F)$. 当 $\mathrm{char}F \neq 2$ 时,对称双线性型 f 一定是迹式的,它决定的群 $\mathrm{U}(V, f)$ 称为**正交群**,记作 $O(V, f)$ 或 $O(n, F, f)$;而此时 $\mathrm{GU}(V, f)$ 称为**广义正交群**,记作 $\mathrm{GO}(V, f)$ 或 $\mathrm{GO}(n, F, f)$. 群 $\mathrm{SO}(n, F, f) = O(n, F, f) \cap \mathrm{SL}(n, F)$,称为**特殊正交群**,或称**旋转群** ($\mathrm{char}F = 2$ 时的正交群将在下一节另外定义).

由于 $J = 1$ 时的酉群另有辛群、正交群的名称,在很多时候酉群这个名称专指 $J\neq 1$ 的情形. 当 $J \neq 1$ 时,存在 $\theta \in F$ 使 $\delta = \overline{\theta} - \theta \neq 0$, 且 $\overline{\delta} = -\delta$ (即 δ 是非零反对称元). V 上的二元函数 $(f\delta)(x, y) = f(x, y)\delta$ 是关于对合 $J_1: a \mapsto \delta^{-1}\overline{a}\delta$ 的非退化的迹式 $(-\rho)$-Hermite 型,它所决定的群 $\mathrm{U}(V, f\delta)$ 与 f 决定的群 $\mathrm{U}(V, f)$ 相同. 如果我们用 $f\delta$ 代替 f,则酉群不改变,但 ρ 变为 $-\rho$. 因此,当 $J \neq 1$ 时,对同一个酉群我们可以按需要随意假定 $\rho = 1$ 或假定 $\rho = -1$. 特别地,我们可以总是认为 $\rho = -1$. 如果再将 $J = 1$ 的情形也考虑进去,则当 $\mathrm{U}(V, f) \neq O(V, f)$ 时,我们总可以设 $\rho = -1$.

设 V 上已定义了一个内积 f,并简记 $f(x, y)$ 为 (x, y). 对任意 $0 \neq x \in V$,当 $(x, x) = 0$ 时,称 x 为**迷向向量**,称它所张成的一维子空间 $\langle x\rangle$ 为**迷向线**;当 $(x, x) \neq 0$ 时,分别称 x 和 $\langle x\rangle$ 为**非迷向向量**、**非迷向线**. 对 (V, f) 的每个子空间 W,当 $\mathrm{Rad}W = W$ 时,也就是 $f|_W = 0$ 时,称 W 是**全迷向子空间**. 一维的全迷向或非退化子空间分别是奇异线、非奇异线. 如果 W 是全迷向子空间,且不存在全迷向子空间真包含 W,则称 W 是**极大全迷向子空间**. 由 Witt 扩张定理可以推知:V 的极大全迷向子空间的维数都相等,这个维数称为 f 的 Witt **指数**,也称为酉群 $\mathrm{U}(V, f)$ 的 Witt 指数,记作 $\nu(f)$. 我们将主要研究 Witt 指数 $\nu(f) \geq 1$ 的情况.

设 $F^{J, -\rho} \neq 0$, 即 $\mathrm{U}(V, f) \neq O(V, f)$ (此时总不妨设 $\rho = -1$, 从而 $F^{J, -\rho} = F_J$),并且设 Witt 指数 $\nu(f) \geq 1$. 对迷向向量 $u \in V$ (满足 $f(u, u) = 0$) 及 $s \in F^{J, -\rho}$, 定义 V 上线性变换

$\rho_{u,s}: x \mapsto x + f(x, u)su$. 则 $\rho_{u,s} \in \mathrm{U}(V, f)$，且当 $s \neq 0$ 时 $\rho_{u,s}$ 是平延，称为酉平延（当 $\mathrm{U}(V, f)$ 是辛群时也称为辛平延）. 全体酉平延生成 $\mathrm{U}(V, f)$ 的一个正规子群，记作 $\mathrm{TU}(V, f)$，也记作 $\mathrm{TU}(n, F, f)$，称为酉平延群. 显然 $\mathrm{TU}(n, F, f) \leq \mathrm{SU}(n, F, f)$. 事实上，当 f 是交错型时，$\mathrm{TU}(n, F, f) = \mathrm{Sp}(n, F, f)$；当 F 是域且 $J \neq 1$ 时，$\mathrm{TU}(n, F, f) = \mathrm{SU}(n, F, f)$，但当 $n = 3$ 且 $F = F_4$ 时例外.

取定了一组基 $\mathscr{E} = \{e_1, \cdots, e_n\}$，将 V 写成行向量空间 $\mathrm{Mat}_{1\times n}F$，则 V 上每个 J-半双线性型 h 对应于一个矩阵 $H = (h_{ij})_{n\times n}$，$h_{ij} = h(e_i, e_j)$，称为 h 在基 $\mathscr{E}$ 下的方阵. 且 h 具有形式

$$h(x, y) = xH\overline{y}', \quad \forall x、y \in V = \mathrm{Mat}_{1\times n}F.$$

这建立了 $\mathrm{Sesq}(V)$ 与 Mat_nF 之间的一一对应（事实上是加群的同构）. 设 $h \in \mathrm{Sesq}(V)$ 对应于矩阵 H，则 h 是 ρ-Hermite 型 $\Longleftrightarrow$ $\overline{H}' = \rho H$（这样的 H 称为 ρ-Hermite 方阵）；h 非退化 $\Longleftrightarrow$ H 是可逆方阵；h 是迹式 ρ-Hermite 型 $\Longleftrightarrow$ H 是 ρ-Hermite 方阵，且主对角线元素全部含于 $F_{J,\rho}$（这样的方阵 H 称为迹式 ρ-Hermite 方阵）. 设 $h \in \mathrm{Sesq}(V)$ 的矩阵是 Δ，则 h 所关联的迹式 ρ-Hermite 型 $f = h + \rho\overline{h}$ 的矩阵 $H = \Delta + \rho\overline{\Delta}'$. 现在设 f 是 V 上的一个内积（即非退化迹式 ρ-Hermite 型），它在基 $\mathscr{E}$ 下的矩阵是 H；V 上线性变换 g 在基 $\mathscr{E}$ 下的矩阵是 A，则

$$g \in \mathrm{U}(n, F, f) \Longleftrightarrow AH\overline{A}' = H.$$

这样，用几何观点定义的酉群 $\mathrm{U}(n, F, f)$ 就可以用矩阵语言重新定义为

$$\mathrm{U}(n, F, H) = \{A \in \mathrm{Mat}_nF \mid AH\overline{A}' = H\},$$

而广义酉群 $\mathrm{GU}(n, F, f)$ 的矩阵形式为

$$\mathrm{GU}(n, F, H) = \{A \in \mathrm{Mat}_nF \mid AH\overline{A}' = \gamma H, \\ \text{对某个 } \gamma = \overline{\gamma} \in Z(F)^*\}.$$

当 $J=1$ 且 $\rho=-1$ 时，也分别记 $\mathrm{U}(n, F, H)$、$\mathrm{GU}(n, F, H)$ 为 $\mathrm{Sp}(n, F, H)$、$\mathrm{GSp}(n, F, H)$；当 $J=1$ 且 $\rho=1\neq-1$ 时，也分别记 $\mathrm{U}(n, F, H)$、$\mathrm{GU}(n, F, H)$ 为 $O(n, F, H)$、$\mathrm{GO}(n, F, H)$. 注意：酉群 $\mathrm{U}(n, F, H)$ 不仅与 n、F、H 有关，与 J 也有关. 当有必要指明 J 时，我们说 $\mathrm{U}(n, F, H)$ 是关于 J 的酉群. 另一方面，只要给定了 n、F、J、H，就可以定义矩阵群 $\mathrm{U}(n, F, H)$ 和 $\mathrm{GU}(n, F, H)$，不需要涉及任何向量空间 V. 但是，一旦矩阵群 $\mathrm{U}(n, F, H)$ 和 $\mathrm{GU}(n, F, H)$ 已被定义出来，我们总认为它们是通过右乘作用于行向量空间 $M=\mathrm{Mat}_{1\times n}F$ 上的线性变换群，是 $\mathrm{GL}(M/F)$ 的子群. H 在 M 上决定一个内积 $f(x, y)=xH\overline{y}'$，而矩阵群 $\mathrm{U}(n, F, H)$ 和 $\mathrm{GU}(n, F, H)$ 在 M 上引起的变换群恰好分别是作用于 M 上的 $\mathrm{U}(n, F, f)$ 和 $\mathrm{GU}(n, F, f)$. 内积 $f(x, y)=xH\overline{y}'$ 的 Witt 指数 $\nu(f)$ 也称作 H 的 Witt 指数，记作 $\nu(H)$. 当 $\nu(H)=0$ 时称 H 为定号矩阵. 当 $F^{J,-\rho}\neq0$ 且 $\nu(H)\geq 1$ 时，易见酉平延 $\rho_{u,s}$ 的矩阵为 $I+H\overline{u}'su$，其中 $\overline{s}=-\rho s$ 且 $uH\overline{u}'=0$，这样的矩阵全体生成的群记作 $\mathrm{TU}(n, F, H)$，它就是酉平延群 $\mathrm{TU}(n, F, f)$ 的矩阵形式.

设 $\mathscr{E}=(e_1, \cdots, e_n)$ 和 $\mathscr{B}=(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ 是 V 的两组基，有过渡矩阵 $P=(p_{ij})_{n\times n}$ 使 $\beta_i=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}e_j$, $\forall 1\leq i\leq n$. 设 $h\in\mathrm{Sesq}(V)$ 在这两组基 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{B}$ 之下的矩阵分别是 H_1 和 H_2，则 $H_2=PH_1\overline{P}'$. 即 H_1 和 H_2 关于 J 相合. 另一方面，我们指出：同一空间上关于同一个 J 的两个内积 f 和 f_1 等价 $\Longleftrightarrow$ f 和 f_1 在同一组基下的矩阵关于 J 相合. 设 f 是 V 上的内积，其 Witt 指数 $\nu(f)=\nu$. 适当选取 V 的基 $\mathscr{E}=\{e_1, \cdots, e_n\}$，可使 f 在基 $\mathscr{E}$ 下的矩阵为

$$H=\begin{pmatrix} O & I_{(\nu)} & O \\ \rho I_{(\nu)} & O & O \\ O & O & H_0 \end{pmatrix},$$

其中 $H_0\in\mathrm{Mat}_{n-2\nu}F$ 是定号对角阵. 这也就是选取基 $\mathscr{E}$ 使 $\langle e_1, \cdots,$

$e_\nu\rangle$和$\langle e_{\nu+1}, \cdots, e_{2\nu}\rangle$是极大全迷向子空间，$f(e_i, e_{\nu+i}) = 1$对$1 \leq i \leq \nu$成立，而其余的$f(e_i, e_j) = 0(i < j)$. 这样一组基称为酉空间$(V, f)$的**标准酉基**，而称这样的矩阵$H$**具有标准形**.

当$F = F_q$是有限域时，将辛群$\mathrm{Sp}(2m, F_q)$记为$\mathrm{Sp}(2m, q)$；当F是有限域且$J \neq 1$时，$F = F_{q^2}$，此时$V(n, F) = V(n, q^2)$上的非退化酉内积都相似，实质上只有一种酉群，记为$\mathrm{U}(n, q^2)$(也有的作者记为$\mathrm{U}(n, q)$，比如F_9上的n维酉群记作$\mathrm{U}(n, 3^2)$或$\mathrm{U}(n, 3)$而不记作$\mathrm{U}(n, 9)$). 对特征不为2的有限域F_q，当$n = 2m + 1$为奇数时，也只有一种正交群，记作$O(2m + 1, q)$；但当$n = 2m$为偶数时，$V(n, q)$上可以定义两种互不相似的对称内积，其Witt指数分别是m或$m - 1$，对应的正交群分别记作$O^+(2m, q)$、$O^-(2m, q)$.

我们在此只限于讨论具有正Witt指数$\nu(f)$的酉群$\mathrm{U}(V, f) = \mathrm{U}(n, F, f)$，此时当然$n \geq 2$，对这样的酉群，我们有如下定理：

定理 1.4.2 设酉群$G = \mathrm{U}(n, F, f)$的Witt指数$\nu(f) \geq 1$，则它的中心由所含的中心纯量变换$\lambda 1(\lambda \in Z(F)^*, \lambda\bar{\lambda} = 1)$组成，仅当$G = O^+(2, 3)$时例外.

$$O^+(2, 3) = O\left(2, F_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

是由四个元素组成的交换群，确实是定理1.4.2的例外情形.

酉群$\mathrm{U}(n, F, f)$在标准同态

$$\mathrm{GL}(n, F) \to \mathrm{PGL}(n, F) = \mathrm{GL}(n, F)/Z(F)^*1$$

下的象记作$\mathrm{PU}(n, F, f)$，称为**射影酉群**. 它也就是$\mathrm{U}(n, F, f)$对$\mathrm{U}(n, F, f) \cap Z(F)^*1$的商群，除例外情形$O^+(2, 3)$外，是$\mathrm{U}(n, F, f)$对中心的商群. 类似地，$\mathrm{Sp}(n, F, f)$、$O(n, F, f)$、$\mathrm{SU}(n, F, f)$、$\mathrm{TU}(n, F, f)$等在$\mathrm{PGL}(n, F)$中的象分别记为$\mathrm{PSp}(n, F, f)$、$\mathrm{PO}(n, F, f)$、$\mathrm{PSU}(n, F, f)$、$\mathrm{PTU}(n, F, f)$等，分别称为**射影辛群**、**射影正交群**、**射影特殊酉群**、**射影酉平延群**

等.

定理 1.4.3 设$\nu(f)\geq 1$,则$G=\mathrm{PTU}(n, F, f)$是单群,仅在下列情形下例外:$G=\mathrm{PSp}(2, 2)$、$\mathrm{PSp}(2, 3)$、$\mathrm{PSp}(4, 2)$、$\mathrm{PSU}(2, 2^2)$、$\mathrm{PSU}(2, 3^2)$、$\mathrm{PTU}(3, 2^2)$.

事实上,

$$\mathrm{PSp}(2, 2)=\mathrm{PSU}(2,2^2)=\mathrm{SL}(2, 2),$$

$$\mathrm{PSp}(2, 3)=\mathrm{PSU}(2, 3^2)=\mathrm{PSL}(2, 3),$$

它们也是关于$\mathrm{PSL}(n, F)$的单性定理(定理 1.3.2)的例外情形. $\mathrm{PSp}(4, 2)\cong S_6$不是单群. 取$\mathrm{TU}(3, 2^2)$所作用的三维空间$V=V(3, F_4, f)$的任一组正交基$\{e_1, e_2, e_3\}$,则$\mathrm{PTU}(3, 2^2)$是射影点集合$\{\langle e_i\rangle | i=1, 2, 3\}$上的置换群,它到对称群$S_3$中有同态,同态核是非平凡正规子群. 这表明了$\mathrm{PTU}(3, 2^2)$不是单群.

$\mathrm{U}(n, F, f)$是正交群时,不存在$\mathrm{PTU}(n, F, f)$,因此定理 1.4.3 没有涉及正交群,由正交群得出的单群将在下一节叙述.

本书中将用到关于辛群的自同构的定理. 由于辛群$\mathrm{Sp}(2, F)$等于特殊线性群$\mathrm{SL}(2, F)$,它的自同构已在定理 1.3.4 中叙述了. 下面只叙述$m\geq 2$时的辛群$\mathrm{Sp}(2m, F)$的自同构定理.

定理 1.4.4 设F是域,$m\geq 2$,则$G=\mathrm{Sp}(2m, F)$的自同构σ具有形式

$$\sigma: A\mapsto PA^{\tau}P^{-1},\quad 其中\ P\in \mathrm{GSp}(2m, F),\quad \tau\in \mathrm{Aut}F,$$

仅当F是特征 2 的完全域且$G=\mathrm{Sp}(4, F)$时有例外. 在例外情形下,σ将$G=\mathrm{Sp}(4, F)$的辛平延变成辛二平延,而将辛二平延变成辛平延.

§1.5 正 交 群

任意域F上的正交群是由二次型定义的. 设V是域F上n维空间,函数$Q: V\to F$如果满足条件:

(1) $Q(ax) = a^2Q(x)$, $\forall x \in V$, $a \in F$;

(2) $f(x, y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ 是 V 上对称双线性型.

则称 Q 是 V 上的**二次型**. 而上述定义中的 f 称为与 Q **相伴的对称双线性型**,当 $\mathrm{char}F = 2$ 时,f 是 V 上的交错型. 定义了二次型 Q 的空间 $V = V(n, F)$ 也记为 (V, Q) 或 $V(n, F, Q)$. 如果已取定一组基将 $V = V(n, F, Q)$ 写成行向量空间 $\mathrm{Mat}_{1\times n}F$,则 $Q: V \to F$ 是二次型当且仅当它具有形式 $Q(x) = x\Delta x'$,对某个矩阵 $\Delta \in \mathrm{Mat}_n F$. 而相伴对称双线性型具有形式 $f(x, y) = xHy'$,其中矩阵 $H = \Delta + \Delta'$. 当 V 的基给定之后,H 由 f 唯一决定,但 Δ 并不由 Q 唯一决定. 事实上,矩阵 Δ 与 Δ_1 决定同一个二次型 $Q(x) = x\Delta x' = x\Delta_1 x'$ $(x \in V)$ 的充分必要条件是: $\Delta - \Delta_1$ 是交错方阵(记住交错方阵是指对角元全为 0 的斜对称方阵). 按§1.1 中的记号,将 $\mathrm{Mat}_n F$ 中全体交错方阵组成的加群记作 $M_0(n, F)$,则二次型 Q 与加法商群 $\mathrm{Mat}_n F/M_0(n, F)$ 中的元素一一对应.

二次型 Q 称为**正则的**,是指 $\mathrm{Rad}V = V^{\perp}$ 中不存在非零的奇异向量,即: $x \in \mathrm{Rad}V$ 且 $Q(x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$. 如果 f 为非退化,即 $\mathrm{Rad}V = 0$, 当然 Q 正则. 当 $\mathrm{char}F \neq 2$ 时,Q 正则 $\Longleftrightarrow$ f 非退化. 但当 $\mathrm{char}F = 2$ 时,与正则的二次型 Q 相伴的 f 可能退化,此时称 Q 是**有亏数的二次型**,而 $\mathrm{Rad}V$ 的维数 d 称为 Q 的**亏数**.

设 F 上的两个同维数的空间 V 和 V_1 上分别定义了二次型 Q 和 Q_1,如果存在线性同构 $\sigma: (V, Q) \to (V_1, Q_1)$ 及 $\gamma \in F^*$,使 $Q(x\sigma) = \gamma Q(x)$ 对所有的 $x \in V$ 成立,则称 σ 为**度量相似**,当 $\gamma = 1$ 时 σ 还称为**度量同构**. 当 (V, Q) 与 (V_1, Q_1) 之间存在度量同构(或度量相似)时,我们称二次型 Q 与 Q_1 等价(或相似). (V, Q) 到自身的度量同构称为 (V, Q) 上的**正交变换**. $(V, Q) = V(n, F, Q)$ 上全体正交变换组成 $\mathrm{GL}(V)$ 的一个子群,称为**正交群**,记作 $O(V, Q)$,也记作 $O(n, F, Q)$. 换句话说,

$$O(V, Q) = \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid Q(xg) = Q(x), \forall x \in V\}.$$

(V, Q)到自身的度量相似称为广义正交变换. $(V, Q) = V(n, F, Q)$ 上全体广义正交变换组成一个群,称为广义正交群,记作 $\mathrm{GO}(V, Q)$ 或 $\mathrm{GO}(n, F, Q)$. 每个 $g \in \mathrm{GO}(V, Q)$ 决定一个乘子 $\gamma \in F^*$ 使 $Q(xg) = \gamma Q(x)$ 对所有 $x \in V$ 成立,映射 $\mathrm{GO}(V, Q) \to F^*$, $g \mapsto \gamma$ 是群同态,同态核为 $O(V, Q) \trianglelefteq \mathrm{GO}(V, Q)$. 事实上, $\mathrm{GO}(V, Q)$就是 $O(V, Q)$在 $\mathrm{GL}(V)$中的正规化子. 正交群 $O(V, Q) = O(n, F, Q)$ 的换位子群记作 $\Omega(V, Q)$或 $\Omega(n, F, Q)$. 虽然正交群的定义适合于任意的二次型,但我们只研究正则二次型 Q 所决定的群 $O(V, Q)$、$\Omega(V, Q)$和 $\mathrm{GO}(V, Q)$.

与酉群的情形类似,对正交群也有 Witt 扩张定理如下:

定理 1.5.1(Witt 扩张定理)　设(V, Q)的两个子空间 W 和 W_1 之间存在度量同构

$$\sigma: W \to W_1 (\text{使 } Q(x\sigma) = Q(x), \forall x \in W).$$

则 σ 可扩充为某个 $g \in O(V, Q)$.

设 V 上已定义了二次型 Q 及相伴的对称双线性型 f,向量 $x \in V$ 如果满足条件 $Q(x) = 0$, 就称为奇异向量;否则,称为非奇异向量. $Q(x) = 0 \Longrightarrow f(x, x) = 0$, 即:奇异向量一定迷向. 当 $\mathrm{char}F \neq 2$ 时,迷向向量一定奇异. 但当 $\mathrm{char}F = 2$ 时,f 是交错型,所有的向量都迷向,但却不一定奇异. 非零的奇异(或非奇异)向量张成的一维子空间称为奇异线(或非奇异线). V 的全迷向子空间 W 中的向量如果全都是奇异向量,就称 W 是全奇异子空间. 由 Witt 扩张定理可推知:(V, Q)的极大全奇异子空间的维数都相等,称为二次型 Q 的 Witt 指数,记作 $\nu(Q)$, $\nu(Q) = 0$ 时称(V, Q)为定号空间. 我们把二次型的 Witt 指数 $\nu(Q)$也称为正交群 $O(V, Q)$ 的 Witt 指数.

如果 V 上的两个二次型 Q 和 Q_1 相似,则它们决定的正交群 $O(V, Q)$与 $O(V, Q_1)$在 $\mathrm{GL}(V)$中共轭,可以认为实质上是相同的群. 特别当 $F = F_q$ 为有限域时,F_q 上奇数维空间 $V(2m + 1, q)$

上所有的二次型都是相似的,本质上只有一种正交群 $O(2m+1, F_q, Q)$, 我们将它记为 $O(2m+1, q)$, 其换位子群记作 $\Omega(2m+1, q)$. 偶数维 F_q-空间 $V(2m, q)$上可定义两种互不相似的二次型 Q 和 Q_1,它们的 Witt 指数分别为 $\nu(Q)=m$ 和 $\nu(Q_1)=m-1$. 我们将具有这两种不同的 Witt 指数的空间 $V(2m, F_q, Q)$、$V(2m, F_q, Q_1)$分别记为 $V^+(2m, q)$、$V^-(2m, q)$, 相应的正交群分别记作 $O^+(2m, q)$、$O^-(2m, q)$,换位子群则分别记作 $\Omega^+(2m, q)$、$\Omega^-(2m, q)$. 一般地,在 $n=2m$ 是偶数的情形,对任意域 F,我们也写为 $V^+(2m, F)$来表示具有极大 Witt 指数 $\nu(Q)=m$ 的空间 $V(2m, F, Q)$,用 $O^+(2m, F)$、$\Omega^+(2m, F)$表示$V^+(2m, F)$上的正交群 $O(2m, F, Q)$及其换位子群 $\Omega(2m, F, Q)$.

由于(V, Q)上的内积 $f(x, y)=Q(x+y)-Q(x)-Q(y)$ 由 Q 决定,我们有 $O(V, Q)\leq \mathrm{U}(V, f)$. 当 $\mathrm{char}F\neq 2$ 时, $\mathrm{U}(V, f)=O(n, F, f)$, 而此时 $Q(x)=\frac{1}{2}f(x, x)$, 反过来也由 f 唯一决定,故 $O(V, Q)=O(V, f)$. 当 $\mathrm{char}F=2$ 时, $\mathrm{U}(V, f)=\mathrm{Sp}(V, f)$, $O(V, Q)<\mathrm{Sp}(V, f)$.

如果 V 已被写成行向量空间且 $Q(x)=x\Delta x'$, 则 $O(n, F, Q)$就是矩阵群

$$O(n, F, \Delta)=\{A\in \mathrm{GL}(n, F)\,|\,A\Delta A'-\Delta\in M_0(n, F)\},$$

$M_0(n, F)$是 $\mathrm{Mat}_n F$ 中全体交错方阵的集合. 而 $\mathrm{GO}(n, F, Q)$的矩阵形式是

$$\mathrm{GO}(n, F, \Delta)=\{A\in \mathrm{GL}(n, F)\,|\,A\Delta A'-\gamma(A)\Delta\in M_0(n, F), \text{对某个依赖于 } A \text{ 的 } \gamma(A)\in F^*\}.$$

每个非奇异向量 $v\in V$ 决定 $O(V, Q)$中一个元素

$$S_v: x\mapsto x-Q(v)^{-1}f(x, v)v.$$

$O(V, Q)$可由所有这样的 S_v 生成,仅当 $O(V, Q)=O(4, F_2, Q)$

且 $\nu(Q)=2$ 时例外. 事实上,除这一例外情形外,每个 $g\in O(n, F, Q)$ 可写成不超过 n 个 S_v 之积,偶数个 S_v 之积组成 $O(V, Q)$ 的正规子群,记作 $\mathrm{SO}(V, Q)$或 $\mathrm{SO}(n, F, Q)$,称为**特殊正交群**,也称为**旋转群**. 当 $\mathrm{char}F\neq 2$ 时,S_v 将 $v\mapsto -v$ 而将超平面 $v^{\perp}$中的向量固定不动,称为**关于超平面 $v^{\perp}$ 的对称**. 每个对称 S_v 的行列式 $\det S_v=-1$, 因此

$$\mathrm{SO}(V, Q)=O(V, Q)\cap \mathrm{SL}(V),$$

$$[O(V, Q):\mathrm{SO}(V, Q)]=2.$$

当 $\mathrm{char}F=2$ 时,S_v 是平延,称为**正交平延**. 当 Q 无亏数(即 f 非退化)时,每个 $g\in O(V, F, Q)$ 写成正交平延的积 $\prod_{i=1}^{k}S_{v_i}$ 时,因子的个数 k 的奇偶性由 g 唯一决定,此时仍有

$$[O(V, Q):\mathrm{SO}(V, Q)]=2.$$

当 Q 有亏数时, $\mathrm{SO}(V, Q)=O(V, Q)$. 记 $O(V, Q)$的换位子群为 $\Omega(V, Q)$(或 $\Omega(n, F, Q)$),则

$$\Omega(V, Q)=\{S_{v_1}\cdots S_{v_{2r}}\mid Q(v_1)\cdots Q(v_{2r})\in F^{*2}\},$$

式中 F^{*2}是 F 中非零平方元的集合. 如果 Witt 指数 $\nu(Q)\geq 1$, 对 V 中任一奇异向量 $u\neq 0$ 及向量 $w\in u^{\perp}$, 定义 V 上的变换

$$t_{u,w}:x\mapsto x+(x, w)u-(x, u)(w+Q(w)u),$$

则 $t_{u,w}\in\Omega(V, Q)$. 当 w 与 u 不共线时 $t_{u,w}\neq 1$, 称作 $\Omega(V, Q)$ 的**根元素**. $\Omega(V, Q)(\nu(Q)\geq 1)$ 可以由它所含的全体根元素生成. 当 w 也是奇异向量(即$\langle u, w\rangle$是全奇异平面)时,根元素 $t_{u,w}$ 称为**正交二平延**;当 w 非奇异时,$t_{u,w}$称为**短根元素**. 本书第 3 章将对正交群的根元素及其生成的群作详细讨论.

设 $\mathrm{char}F=2$, F 中所有元素的平方 $a^2(a\in F)$ 构成 F 的子域 F^2,F 可以看作 F^2 上的向量空间. 对任意 x、$y\in\mathrm{Rad}V$ 和 a、$b\in F$, 由 $f(x, y)=0$ 得

$$Q(ax+by)=a^2Q(x)+b^2Q(y).$$

这说明集合 $L=\{Q(x)\mid x\in \mathrm{Rad}V\}$是 F^2 上的向量空间，是 F 作为 F^2-空间的子空间. 如果 $Q(x)=Q(y)$ 对 x、$y\in\mathrm{Rad}V$ 成立，则

$$Q(x+y)=Q(x)+Q(y)=0,$$

Q 的正则性迫使 $x+y=0$，$x=y$. 这说明映射 $\mathrm{Rad}V\to L$，$x\mapsto Q(x)$ 是集合之间的一一映射，并且是加群同构. $O(V,Q)$定驻 $\mathrm{Rad}V$，且保持每个向量的二次型值，因而定驻 $\mathrm{Rad}V$ 中所有的向量，在 $\mathrm{Rad}V$ 上诱导出单位变换，写为 $V=V_0\oplus\mathrm{Rad}V$，则 V_0 是非退化子空间，$x\mapsto x+\mathrm{Rad}V$ 是 V_0 到商空间 $V/\mathrm{Rad}V$ 的线性同构. 将 Q、f 在 V_0 上的限制分别记作 Q_0、f_0. 则每个 $g\in\mathrm{Sp}(V,f)$ 定驻 $\mathrm{Rad}V$，诱导出商空间 $V/\mathrm{Rad}V$ 上一个线性变换，从而诱导出 V_0 上线性变换 $\varphi(g)$使 $x\varphi(g)-xg\in\mathrm{Rad}V$. 易见 $\varphi(\mathrm{Sp}(V,f))\leq\mathrm{Sp}(V_0,f_0)$. 而 $g\in O(V,Q)\Longleftrightarrow g$ 定驻 $\mathrm{Rad}V$ 中每一个向量，且 $Q(x\varphi(g))-Q(x)\in L$，$\forall x\in V_0$. 因此，φ 诱导出 $O(V,Q)$到$\mathrm{Sp}(V_0,f_0)$中的嵌入映射：

$$\begin{aligned}\varphi(O(V,Q))&=O(V_0,Q_0,L)\\&=\{g\in\mathrm{Sp}(V_0,f_0)\mid Q(xg)\\&\qquad-Q(x)\in L,\ \forall x\in V\}.\end{aligned}$$

因此，我们可以用$O(V_0,Q_0,L)$代替$O(V,Q)$，从而用 f_0 代替 f，化为 f 非退化的情形. 除非另外声明，我们在以后总不妨假定二次型 Q 相伴的对称双线性型 f 为非退化的，而将正交群定义为

$$O(V,Q,L)=\{g\in\mathrm{U}(V,f)\mid Q(xg)-Q(x)\in L,\forall x\in V\},$$

其中当 $\mathrm{char}F\neq 2$ 时，$L=0$，而当 $\mathrm{char}F=2$ 时，L 是 F 在 F^2 上的一个子空间. 广义正交群定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{GO}(V,Q,L)=\{g\in\mathrm{U}(V,f)\mid &\text{存在}\ \gamma(g)\in F^*\ \text{使}\\&Q(xg)-\gamma(g)Q(x)\in L,\ \forall x\in V\}.\end{aligned}$$

$O(V, Q, L)$的换位子群记作$\Omega(V, Q, L)$. 群$O(V, Q, L)$、$\mathrm{GO}(V, Q, L)$、$\Omega(V, Q, L)$也分别记作$O(n, F, Q, L)$、$\mathrm{GO}(n, F, Q, L)$、$\Omega(n, F, Q, L)$. 显然$O(V, Q, 0) = O(V, Q)$. 而$L \neq 0$代表有亏数的情形,L在F^2上的维数就等于亏数. 当$L = F$时,有$O(V, Q, L) = \mathrm{Sp}(V, f)$. 特别当$F$是特征2的完全域时,此时$L$只能为0或$F$,就得到

$$O(2m+1, F, Q) \cong \mathrm{Sp}(2m, F, f_0).$$

特别,当q是2的幂时,有

$$O(2m+1, q) \cong \mathrm{Sp}(2m, q).$$

设V已被写成行向量空间且$Q(x) = x\Delta x'$. 记

$$M_L(n, F) = \{H \in \mathrm{Mat}_n F \mid H' = -H, \text{且} \\ H\text{的主对角线元素全含于}L\},$$

则$O(n, F, Q, L)$对应于矩阵群

$$O(n, F, \Delta, L) = \{A \in \mathrm{GL}(n, F) \mid A\Delta A' - \Delta \\ \in M_L(n, F)\}.$$

上面将有亏数的(V, Q)上正交群$O(V, Q)$变成非退化空间(V_0, Q_0)的正交群$O(V_0, Q_0, L)$, $L = \{Q(x) \mid x \in \mathrm{Rad}V\}$是$F$的$F^2$-子空间,而$x_0 \mapsto x_0 + \mathrm{Rad}V$定义了$V_0$到商空间$V/\mathrm{Rad}V$的同构. 注意,每个$x \in V$与它所在陪集$x + \mathrm{Rad}V = x_0 + \mathrm{Rad}V$的代表元$x_0 \in V_0$的$Q$值不一定相等. 但一定满足条件$Q(x) - Q(x_0) \in L$. 特别$x$是奇异向量当且仅当$Q(x_0) \in L$. 我们将$V_0$中满足条件$Q(x) \in L$的向量称为$L$-奇异向量,$V_0$中全体$L$-奇异向量代表了$V$中全体奇异向量.

一般地,假设预先给定了特征2的域F的一个F^2-子空间L,并在F-向量空间V上定义了一个二次型及相伴的对称双线性型f(并不要求f非退化). 仍将满足条件$Q(x) \in L$的向量$x \in V$定

义为 L-奇异向量. 如果 $\mathrm{Rad}V = V^{\perp}$ 中不含非零的 L-奇异向量,即 $x \in \mathrm{Rad}V$ 且 $Q(x) \in L \Longleftrightarrow x = 0$,则称 Q 是 V 上的 L-正则的二次型. $\dim\mathrm{Rad}V$ 称为 Q 的 L-亏数. (V, Q, L)仍决定一个正交群

$$O(V, Q, L) = \{g \in \mathrm{GL}(V) | Q(xg) - Q(x) \in L, \forall x \in V\}.$$

如果 $L = 0$ 或者 $\mathrm{Rad}V = 0$,当然又回到前面讨论过的情形. 但即使 $L \neq 0$ 并且 $\mathrm{Rad}V \neq 0$,这样定义的正交群仍可重新写成 $\mathrm{Rad}V = 0$ 的情形,也可重写成 $L = 0$ 的情形. 为化为 $\mathrm{Rad}V = 0$ 的情形,我们记

$$V = V_0 \oplus \mathrm{Rad}V, \ L_1 = L \oplus \{Q(x) | x \in \mathrm{Rad}V\},$$

则 L_1 仍是 F^2-空间,L 是它的子空间. V_0 非退化并且可以与 $V/\mathrm{Rad}V$等同,Q 在 V_0 上的限制 Q_0 是无亏数的二次型,而 $O(V_0, Q_0, L_1) = O(V, Q, L)$,其中 $\mathrm{Rad}V_0 = 0$. 反过来,我们取 L 在 F^2 上的任一组基 $\mathscr{L} = \{s_i | i \in M\}$,其中的指标集合 M 可能有限或无限,但每个 $s \in L$ 是有限个 $a_i^2 s_i (a_i \in F, i \in M)$ 的和. 再取与 $\mathscr{L}$ 等势的集合 $\mathscr{U} = \{u_i | i \in M\}$ 作为基,在 F 上张成向量空间 $U = \oplus_{i\in M} F u_i$. 在 F-向量空间 $V_1 = V \oplus U$ 上可唯一地定义二次型 Q_1 及相伴的对称双线性型 f_1,使 $U \subseteq \mathrm{Rad}V_1$, $Q_1(x) = Q(x) (\forall x \in V)$ 且 $Q_1(u_i) = s_i (\forall i \in M)$. 则

$$O(V_1, Q_1) = O(V, Q, L) = O(V_0, Q_0, L_1).$$

可见,我们既可以将正交群 $O(V, Q) = O(V, Q, 0)$ 写成 $O(V_Q, Q_0, L)$使 Q_0 无亏数(即 $\mathrm{Rad}V_0 = 0$),但也可根据需要写成其他形式 $O(V_1, Q_1, L_1)$, L_1 可以取 L 的任何 F^2-子空间,使

$$L = L_1 \oplus \{Q(x) | x \in \mathrm{Rad}V_1\}.$$

不论在哪种情形,对 V 的子空间 W,如果 $w \in \mathrm{Rad}W$ 且 $Q(w) \in L$ 仅当 $w = 0$ 时才能成立,就称 W 是 V 的 L-正则子空间.

正交群 $G = O(n, F, Q, L)$ 所含的纯量变换只有$\{\pm 1\}$,因此

G 在 $\mathrm{PGL}(n, F)$ 中的象就是 $G/\{\pm 1\}$，记作 $\mathrm{PO}(n, F, Q, L)$，称为**射影正交群**. $G' = \Omega(n, F, Q, L)$ 在 $\mathrm{PGL}(n, F)$ 中的象 $G'/(G' \cap \{\pm 1\})$ 记作 $\mathrm{P\Omega}(n, F, Q, L)$. 当 $\mathrm{char}F = 2$ 时

$$\mathrm{P\Omega}(n, F, Q, L) = \Omega(n, F, Q, L).$$

关于 $\mathrm{P\Omega}(n, F, Q, L)$ 的单性有如下定理：

定理 1.5.2　设 $V = V(n, F)$ 上定义了二次型 Q，与 Q 相伴的对称双线性内积 f 为非退化的，则

(1) 当 $n \geq 3$ 且 $\nu(Q) \geq 1$ 时，$G = \mathrm{P\Omega}(n, F, Q)$ 是单群，仅在以下情形例外：$G = \mathrm{P\Omega}(3, 3)$，$\mathrm{P\Omega}^+(4, F)$，$\Omega^-(4, 2)$.

(2) 当 $\mathrm{char}F = 2$，$\nu_L(Q) \geq 1$ 且 $0 \neq L \neq F$ 时，$\Omega(n, F, Q, L)$ 是单群.

定理中排除了 $\mathrm{P\Omega}(2, F, Q)$，是因为它是交换群，不是非交换单群. 而当 $\mathrm{char}F = 2$ 时，排除 $L = F$ 的情形，是因为当 $L = F$ 时，$O(n, F, Q, L) = \mathrm{Sp}(n, F)$，它的单性已在定理 1.4.3 中叙述了(除 $\mathrm{Sp}(2, 2)$，$\mathrm{Sp}(4, 2)$ 外都是单群). 而 $0 \neq L \neq F$ 仅当 F 是特征 2 的非完全域(从而一定是无限域)时可能出现.

§1.6　体上酉群的一般定义

二次型和正交群的上述定义可以推广到非交换体上. 设 F 是任意体，且带有对合 $J: a \mapsto \bar{a}$，V 是 F 上 n 维左向量空间，设 h 是 V 上 J-半双线性型，与之相伴的迹式 ρ-Hermite 型 $f = h + \rho\bar{h}$ 为非退化的，h 决定一个函数 $Q: V \to F$，$Q(x) = h(x, x)$，称为伪二次型. Q 与 f 之间有关系式

$$f(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y) (\mathrm{mod} F_{J, -\rho}),$$

$$\forall x, y \in V.$$

当 $F_{J, -\rho} \neq F$ 时，f 由 Q 唯一决定. 设 L 是 F 的加法子群，且满足条件 $F_{J, -\rho} \subseteq L \subseteq F^{J, -\rho}$ 及 $aL\bar{a} \subseteq L$，$\forall a \in F$，则当 $L \neq F$ 时，定

义

$$\mathrm{U}(V, Q, L) = \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid Q(xg) - Q(x) \in L, \\ \forall x \in V\},$$

称为由 Q、L 决定的**伪正交群**，也记作 $\mathrm{U}(n, F, Q, L)$. $\mathrm{U}(V, Q, L)$是酉群 $\mathrm{U}(V, f)$的子群，且当 $L = F^{J, -\rho} \neq F$ 时，$\mathrm{U}(V, Q, L) = \mathrm{U}(V, f)$ 成立. 当 $F_{J, -\rho} \neq F = F^{J, -\rho}$ 时，f 由 Q 唯一决定，因而可定义 $\mathrm{U}(V, Q, F) = \mathrm{U}(V, f)$，此时仍有 $\mathrm{U}(V, Q, F^{J, -\rho}) = \mathrm{U}(V, f)$. 注意，当 $J = 1$（从而 F 是域）时，Q 就是二次型，$\mathrm{U}(V, Q, L)$ 就是正交群 $O(V, Q, L)$. $\mathrm{U}(V, Q, L) < \mathrm{U}(V, f)$ 当且仅当 $L \subsetneqq F^{J, -\rho}$ 时成立. 此时必然 $F_{J, -\rho} \subsetneqq F^{J, -\rho}$，$\mathrm{char}F = 2$，且 F 的中心元全是对称元.

我们将 $\mathrm{U}(V, Q, L)$作用的空间 V 记作(V, Q, L)，(V, Q, L)的子空间 W 和 W_1 之间的线性同构 $\sigma: W \to W_1$ 若使 $f(x\sigma, y\sigma) = f(x, y)$ 及 $Q(x\sigma) \equiv Q(x) \pmod L$ 对任意 x、$y \in V$ 成立，则称 σ 为**度量同构**. 我们有如下定理：

定理 1.6.1（Witt 扩张定理） 设 W 和 W_1 是(V, Q, L)的两个子空间，若存在度量同构 $\sigma: W \to W_1$，则 σ 可扩充为某个 $g \in \mathrm{U}(V, Q, L)$.

$\mathrm{U}(V, Q, L)$也可用另一方式定义：仍设 h、L、Q、f 如前，对 $g \in \mathrm{GL}(V)$、$h \in \mathrm{Sesq}(V)$ 定义 $hg: V \times V \to F$ 使 $(hg)(x, y) = h(xg, yg)$，则 $hg \in \mathrm{Sesq}(V)$. 这样就定义了 $\mathrm{GL}(V)$ 在 $\mathrm{Sesq}(V)$ 上的作用. 按照这个定义，$\mathrm{U}(V, f)$就是 f 在 $\mathrm{GL}(V)$中的稳定子群，$\mathrm{GU}(V, f)$是 f 所张成的 $Z(F)$-空间 $Z(F)f$ 的稳定子群. 记

$$\mathrm{Sesq}_L^{-\rho}(V) = \{h \in \mathrm{Sesq}(V) \mid \bar{h} = -\rho h, h(x, x) \in L\}.$$

则 $\mathrm{GL}(V)$ 定驻 $\mathrm{Sesq}_L^{-\rho}(V)$，诱导出了在加法商群 $\mathrm{Sesq}(V) / (\mathrm{Sesq}_L^{-\rho}(V))$ 上的一个作用. 于是可以定义 h 所在的同余类在 $\mathrm{GL}(V)$中的稳定子群：

$$\mathrm{U}(V,h,L)=\{g\in \mathrm{GL}(V)\mid hg-h\in \mathrm{Sesq}_L^{-\rho}(V)\},$$

或记为 $\mathrm{U}(n,F,h,L)$，称为由 h 和 L 决定的酉群. 当 $F_{J,-\rho}\neq F$ 时，$\mathrm{U}(V,h,L)=\mathrm{U}(V,Q,L)$，特别，$\mathrm{U}(V,h,F^{J,-\rho})=\mathrm{U}(V,f)$；而当 $F^{J,-\rho}=F$ (即 $J=1$, $\rho=-1$ 并且 $\mathrm{char}F\neq 2$) 时，$\mathrm{U}(V,h,L)$ 仍有定义，等于 $\mathrm{Sp}(V,f)$. 可见 $\mathrm{U}(V,h,L)$ 包括了前面所定义的辛群、酉群、正交群、伪正交群的所有的情况，可以作为酉群的最广泛的定义.

在 $L\neq 0$ (即 $\mathrm{U}(V,h,L)\neq O(V,Q)$) 的情形，任取 $0\neq\delta\in L$，则 F 的反自同构：$J_1:a\mapsto\tilde{a}=\delta\,\bar{a}\delta^{-1}$ 也是对合性反自同构. 分别将集合 $F_{J,-\rho}$、L、$F^{J,-\rho}$ 中的所有的元素右乘 δ^{-1}，得到集合 $F_{J,-\rho}\delta^{-1}$、$L\delta^{-1}$、$F^{J,-\rho}\delta^{-1}$，则 $F_{J,-\rho}\delta^{-1}$ 与 $F^{J,-\rho}$分别是在对合 J_1 下的迹集合 $\mathrm{Tr}F$ 和对称元集合 F_{J_1}，而 $L_1=L\delta^{-1}$ 是二者之间的加法子群，且满足 $aL_1\tilde{a}=L_1$, $\forall a\in F^*$，并且 $1\in L_1$. 定义 $h_1(x,y)=h(x,y)\delta^{-1}$, $\forall x$、$y\in V$，则 h_1 是 J_1-半双线性型，且 $\mathrm{U}(V,h_1,L_1)=\mathrm{U}(V,h,L)$. 因此，可以用 J_1、L_1、h_1 分别代替 J、L、h 而不改变酉群 $\mathrm{U}(V,h,L)$. 相关的 f 和 Q 也相应地被 $f_1(x,y)=f(x,y)\delta^{-1}$ 和 $Q_1(x)=Q(x)\delta^{-1}$ 代替. 经过这样代替之后，化成了 $-\rho=1$ (即 $\rho=-1$) 且 $1\in L$ 的情形. 因此，当 $L\neq 0$ 时，总不妨设 $\rho=-1$，从而 $F^{J,-\rho}$ 和 $F_{J,-\rho}$ 分别是对称元集合 F_J 和迹集合 $\mathrm{Tr}F$，且假定 $1\in L$，特别当 $\mathrm{Tr}F\neq 0$ 时，假定 $1\in\mathrm{Tr}F$.

设 n 是任意自然数，F 是带对合 $J:a\mapsto\bar{a}$ 的体，$\rho=\pm 1\in F$，矩阵 $\Delta=\mathrm{Mat}_nF$ 满足条件 $H=\Delta+\rho\bar{\Delta}'\in \mathrm{GL}(n,F)$，$L$ 是 F 的加法子群，且 L 满足条件 $F_{J,-\rho}\subseteq L\subseteq F^{J,-\rho}$ 及 $aL\,\bar{a}\subseteq L(\forall a\in F)$，则可以定义矩阵群

$$\mathrm{U}(n,F,\Delta,L)=\{A\in \mathrm{GL}(n,F)\mid A\Delta\bar{A}'-\Delta\in \mathrm{Sesq}_L^{-\rho}(n,F)\},$$

式中 $\mathrm{Sesq}_L^{-\rho}(n,F)=\{S=(s_{ij})_{n\times n}\in \mathrm{Mat}_nF\mid \bar{S}'=-\rho S,\ s_{ii}\in L,\ \forall 1\leq i\leq n\}$，

且

$$\mathrm{U}(n,\ F,\ \Delta,\ L) \leq \mathrm{U}(n,\ F,\ H)$$
$$= \{A \in \mathrm{GL}(n,\ F) \mid AH\overline{A}' = H\}.$$

我们将这样定义的矩阵群 $\mathrm{U}(n, F, \Delta, L)$及 $\mathrm{U}(n, F, H)$看成是(通过右乘作用)作用于行向量空间 $M = \mathrm{Mat}_{1\times n}F$ 上的变换群,即 $\mathrm{GL}(M/F)$的子群. 在 M 上定义 J-半双线性型 $h(x, y) = x\Delta\overline{y}'$,则 $f(x, y) = xH\overline{y}'$ 是与 h 相伴的迹式 ρ-Hermite 型. 而 $\mathrm{U}(n, F, \Delta, L)$和 $\mathrm{U}(n, F, H)$分别是作用于 M 上的 $\mathrm{U}(n, F, h, L)$和 $\mathrm{U}(n, F, f)$. 反过来,设 $\mathrm{U}(n, F, h, L) \leq \mathrm{U}(n, F, f)$ 是作用于空间 $V = V(n, F)$ 上的酉变换群. 任意取定一组基将 V 写成行向量空间 $\mathrm{Mat}_{1\times n}F$,则 h 具有形式 $h(x, y) = x\Delta\overline{y}'$,对应于一个矩阵 $\Delta \in \mathrm{Mat}_nF$,且 $f(x, y) = xH\overline{y}'$,其中 $H = \Delta + \rho\overline{\Delta}'$. 而群 $\mathrm{U}(n, F, h, L)$、$\mathrm{U}(n, F, f)$分别具有矩阵形式 $\mathrm{U}(n, F, \Delta, L)$、$\mathrm{U}(n, F, H)$.

设 h、L 已给定,从而相关的 f、Q 也已给定,非零向量 $x \in V$ 如果满足条件 $Q(x) \in L$,就称为 *L-奇异向量*,它所张成的一维子空间 $\langle x\rangle$ 称为 *L-奇异线*,或简称为奇异向量、奇异线. 反之,当 $Q(x) \notin L$ 时,则分别称 x, $\langle x\rangle$为*非奇异向量*、*非奇异线*. 当 $L = F^{J,-\rho}$ 时,$Q(x) \in L \Longleftrightarrow f(x, x) = 0$,“$L$-奇异”就是“迷向”. 当 $L \neq F^{J,-\rho}$ 时,奇异向量 x 必然是迷向,但迷向向量不一定是奇异向量. V 的全迷向子空间 W 中的向量如果都是 L-奇异向量,则称 W 是 *L-全奇异子空间*,或简称全奇异子空间. V 的极大全奇异子空间的维数都相等,称为群 $\mathrm{U}(V, h, L)$的 Witt *指数*,记作 $\nu_L(h)$,当 $F_{J,-\rho} \neq F$ 时也记作 $\nu_L(Q)$,当 $L = F_{J,-\rho} \neq F$ 时也简记为 $\nu(Q)$. 矩阵群 $\mathrm{U}(n, F, \Delta, L)$的 Witt 指数 $\nu_L(\Delta)$定义为 $\nu_L(h)$,这里 $h(x, y) = x\Delta\overline{y}'$ 是 $\Delta \in \mathrm{Mat}_nF$ 在行向量空间 $\mathrm{Mat}_{1\times n}F$ 上定义的 J-半双线性型. 设群 $\mathrm{U}(V, h, L)$的 Witt 指数 $\nu_L(h) = \nu$,则可适当选取 V 的基 $\mathscr{E}$ 将 V 写成行向量空间,使

$$\mathrm{U}(V,\ h,\ L) = \mathrm{U}(n,\ F,\ \Delta,\ L),$$

其中

$$\Delta=\begin{pmatrix} O & I_{(\nu)} & O \\ \rho I_{(\nu)} & O & O \\ O & O & \Delta_0 \end{pmatrix},$$

$\Delta_0 \in \mathrm{Mat}_{n-2\nu}F$ 是定号方阵(即 $x\Delta_0\,\overline{x}' \neq 0$ 对所有 $0 \neq x \in \mathrm{Mat}_{1\times(n-2\nu)}$ 成立)，且 $H_0=\Delta_0+\rho\,\overline{\Delta_0}'$ 是可逆的单项矩阵(即 H_0 的每一行和每一列除了有一个元素不为零外，其余元素都是零). 这样的矩阵 Δ 称为具有标准形，而这样一组基 $\mathscr{E}$ 称为标准酉基.

如果 $L\neq 0$ 且 $\nu_L(h)\geq 1$，则 $\mathrm{U}(V,h,L)$包含形如 $\rho_{u,s}$的酉平延，其中 $Q(u)\in L$ 且 $s\in L$. 这样的酉平延的全体生成 $\mathrm{U}(V,h,L)$的一个正规子群，记作 $\mathrm{TU}(V,h,L)$或 $\mathrm{TU}(n,F,h,L)$，相应的矩阵群记作 $\mathrm{TU}(n,F,\Delta,L)$. 当 F 是特征 2 的域且 $J=1$ 时，$\mathrm{TU}(n,F,h,L)$就等于 $\Omega(n,F,Q,L)$. 我们将 $\mathrm{U}(n,F,h,L)$ 的换位子群记作 $\mathrm{U}'(n,F,h,L)$，则当 $L\neq 0$ 且 $\nu_L(h)\geq 1$ 时，

$$\mathrm{U}'(n,F,h,L)=\mathrm{TU}(n,F,h,L);$$

而当 $L=0$ (从而 $\mathrm{U}(n,F,h,L)=O(n,F,Q)$) 时，

$$\mathrm{U}'(n,F,h,L)=\Omega(n,F,Q).$$

我们希望从 $\mathrm{U}'(V,h,L)$在 $\mathrm{U}(V,h,L)$中的每个陪集中找出一个比较简单的陪集代表元. 为此，需要涉及到 $\mathrm{U}(V,h,L)$中的如下类型的元素：

双曲旋转：在 Witt 指数 $\nu_L(h)\geq 1$ 的情形下，一对奇异向量 u、v 如果满足条件 $(u,v)=1$，就称为**双曲对**. 每一个双曲对 u、v 和每个元素 $\lambda\in F^*$ 决定 $\mathrm{U}(V,h,L)$的一个元素 $\Lambda_{u,v,\lambda}$，称为**双曲旋转**，它将 $u\mapsto\lambda u$, $v\mapsto\overline{\lambda}^{-1}v$ 且定驻$\langle u,v\rangle^{\perp}$中所有的向量.

拟对称：对 V 中任一非迷向向量 w，如果 $1\neq\lambda\in F^*$ 满足条件

$$Q(\lambda w)\equiv Q(w)(\mathrm{mod}\ L),$$

则 V 上的变换 $S_{w,\lambda}: w\mapsto\lambda w$, $x\mapsto x$, $\forall x\in w^{\perp}$ 是 $\mathrm{U}(V,h,L)$的

元素，称为关于超平面$w^{\perp}$的一个拟对称. 当$\mathrm{U}(V, h, L) = O(V, Q)$是特征不为2的域上的正交群时，$S_w = S_{w,-1}$称为关于超平面$w^{\perp}$的对称，它具有形式

$$S_w: x \mapsto x - Q(w)^{-1}(x, w)w.$$

当$\mathrm{U}(V, h, L) = O(V, Q)$是特征2的域上的正交群时，对每个非奇异向量$w$，$S_w: x \mapsto x - Q(w)^{-1}(x, w)w$仍是$O(V, Q)$的元素，此时$S_w$是平延，称为正交平延.

引理 1.6.1 （1）设$L \neq 0$并且$\nu_L(h) \geq 1$，$\{u, v\}$是V中的双曲对，则除$\mathrm{U}(V, h, L) = \mathrm{U}(3, 2^2)$的情形外，对每个$g \in \mathrm{U}(V, h, L)$，存在一个$\lambda \in F^*$，使$g\Lambda_{u,v,\lambda} \in \mathrm{TU}(V, h, L)$. 当$F$是域时，任意给定非迷向向量$w$，则对每个$g \in \mathrm{U}(n, F, f)$，有$gS_{w,\lambda} \in \mathrm{SU}(n, F, f)$，其中$\lambda = (\det g)^{-1}$.

（2）对每个$g \in O(V, Q)$，当$g \notin \mathrm{SO}(V, Q)$时，$gS_w \in \mathrm{SO}(V, Q)$对任意非奇异向量$w$成立. 如果$\nu(Q) \geq 1$，$\{u, v\}$是任一双曲对，则对任一$g \in \mathrm{SO}(V, Q)$存在一个$\lambda \in F^*$，使$g\Lambda_{u,v,\lambda} \in \Omega(V, Q)$.

关于$\mathrm{PTU}(n, F, f)$和$\mathrm{P}\Omega(n, F, Q, L)$的单性，已分别在定理1.4.3和定理1.5.2中叙述了. 对剩下的情形有：

定理 1.6.2 设F是特征2的非交换体，$L \neq F_J$且$\nu_L(h) \geq 1$，则$\mathrm{TU}(n, F, h, L)$是单群.

§1.7 体的若干性质

本书在对体上典型群进行讨论的过程中将用到体的如下一些性质：

一、关于体的正规子体和乘法群

设K是非交换体，如果K的子体F在K的所有的内自同构$I_\alpha: x \mapsto \alpha^{-1}x\alpha(\alpha \in K^*)$的作用下都保持不变，就称$F$是$K$的正规子体. 显然，$K$是自己的正规子体，$K$的中心$Z(K)$的所有子域也

都是 K 的正规子体. 但除了这些平凡情形外,是否还有别的正规子体呢? 答案是否定的.

定理 1.7.1 非交换体 K 的正规子体如果不含于 K 的中心,就必然等于 K.

设 K 是非交换体,则它的乘法群 $G = K^*$ 是非交换群. 定义 $G^{(0)} = \Gamma_0 = G$, 并归纳定义

$$G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}] \quad 及 \quad \Gamma_n = [G, \Gamma_{n-1}], \forall n \geq 1,$$

则

$$G \trianglerighteq G^{(1)} \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G^{(n)} \trianglerighteq \cdots \quad 和 \quad G \trianglerighteq \Gamma_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq \Gamma_n \trianglerighteq \cdots$$

分别是 G 的导群列和下中心列. 这两个群列中的每一项都是 G 的正规子群,并且可以证明它们都不含于 G 的中心,因而在 K 中生成不含于中心的正规子体. 由定理 1.7.1 就得到以下定理:

定理 1.7.2 非交换体 K 的乘法群 K^* 的导群列和下中心列的每一项在 K 中生成的子体都等于 K,从而 K^* 不是可解群(更不是幂零群). 特别,K^* 的换位子群生成的子体等于 K.

推论 1.7.3 如果非交换体 K 在它的中心上的维数为有限数 n,则 K^* 的导群列和下中心列的每一项 H 生成的加群等于 K.

证明 * 设 H 生成的加群为 S,显然 S 是环. 只要能证明 S 是体,则由定理 1.7.2 即得 $S = K$. 故只须证明:任一非零元 $\alpha \in S$ 的逆 α^{-1} 含于 S. 记 F 为 K 的中心,则扩域 $F(\alpha) \subset K$ 在 F 上的维数 $[F(\alpha) : F] < n < \infty$, 从而

$$F(\alpha) = F[\alpha] \subseteq S, \ \alpha^{-1} \in S.$$

如所欲证. ▌

任一群 G 的上中心列

$$\{1\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n \trianglelefteq \cdots$$

由下面的条件定义: G_{n+1}/G_n 是 G/G_n 的中心, $\forall n \geq 0$. 关于非交换 K^* 的上中心列,有如下定理:

定理 1.7.4 非交换体 K 的乘法群 K^* 对中心 $Z(K)^*$ 的商群 $K^*/Z(K)^*$ 的中心元只有单位元,从而 $G = K^*$ 的上中心列为

$\{1\} \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots$，其中 $G_1 = Z(K)^*$.

二、关于广义四元数体

实数域 R 上的四元数体 Q 是 R 上的由两个元素 i、j 生成的以 R 为中心的四维代数，$\{1, i, j, ij\}$是 Q 在 R 上的一组基，且 i、j 满足条件 $i^2 = j^2$ 及 $ij = -ji$，记 $k = ij = -ji$，则 $k^2 = -1$. Q 有对合性反自同构 $q \mapsto \bar{q}$，

$$\overline{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k}$$
$$= a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k \quad (\forall a_0, a_1, a_2, a_3 \in R).$$

对 $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ 定义

$$\mathrm{Tr}(q) = q + \bar{q} = 2a_0, \quad \mathrm{N}(q) = q\,\bar{q} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

则当 $q \neq 0$ 时，$\mathrm{N}(q) > 0$，$q^{-1} = \mathrm{N}(q)^{-1}\,\bar{q}$.

实数域上四元数体的概念可以推广为任意域 F 上的广义四元数体. 首先，域 F 上的广义四元数环 Q 是指 F 上由两个元素 α、β 生成的以 F 为中心的一个四维代数 $F[\alpha, \beta]$，$\{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$是 Q 在 F 上的一组基，且 α、β 满足以下条件：

(1) α 是 $F[x]$中一个不可约多项式 $x^2 - x - a$ 的根，从而 $F(\alpha)$是 F 的一个二次扩域，它有唯一的一个保持 F 中的元素不变的非单位自同构，将每个 $a_0 + a_1\alpha \in F(\alpha)(a_0, a_1 \in F)$ 映到

$$\overline{a_0 + a_1\alpha} = a_0 + a_1(1 - \alpha).$$

(2) $\beta^2 = b \in F^*$，而 b 不是 $F(\alpha)$中任何元素的平方，且 $\beta\alpha\beta^{-1} = \bar{\alpha} = 1 - \alpha$，从而 $\beta\theta\beta^{-1} = \bar{\theta}$对所有的 $\theta \in F(\alpha)$ 成立. $F(\beta)$ 是 F 的二次扩域，$a_0 + a_2\beta \mapsto a_0 - a_2\beta$ $(\forall a_0, a_2 \in F)$ 是$F(\beta)$的保持 F 中的元素不变、且将 $\beta \mapsto -\beta$ 的唯一自同构.

广义四元数环 $Q = F[\alpha, \beta]$ 的子域 $F(\alpha)$、$F(\beta)$的上述自同构可以扩充为 Q 的反自同构 $J: q \mapsto \bar{q}$，

$$\overline{a_0 + a_1\alpha + a_2\beta + a_3\alpha\beta}$$
$$= a_0 + a_1(1 - \alpha) - a_2\beta - a_3\alpha\beta \quad (\forall a_0, a_1, a_2, a_3 \in F).$$

当 $\mathrm{char}F \neq 2$ 时，对称元的集合 Q_J 等于 Q 的中心 F；当 $\mathrm{char}F = 2$ 时，$Q_J = F \oplus F\beta \oplus F\alpha\beta$ 是 Q 的三维 F-子空间.

对每个 $q = a_0 + a_1\alpha + a_2\beta + a_3\alpha\beta \in Q$，定义

迹 $\mathrm{Tr}(q) = q + \bar{q} = 2a_0 + a_1 \in F$；

范 $N(q) = q\,\bar{q} = a_0^2 + a_0a_1 - aa_1^2 - ba_2^2 - ba_2a_3 + aba_3^2 \in F$.

迹集合 $\mathrm{Tr}Q = \{\mathrm{Tr}(q) \mid q \in Q\}$ 等于 F. 对 q_1、$q_2 \in Q$，有

$$\mathrm{Tr}(q_1 + q_2) = \mathrm{Tr}(q_1) + \mathrm{Tr}(q_2),$$

$$\mathrm{N}(q_1q_2) = \mathrm{N}(q_1)\mathrm{N}(q_2).$$

特别当 $q \in Q$ 可逆时，$\mathrm{N}(q)\mathrm{N}(q^{-1}) = 1$，$\mathrm{N}(q) \neq 0$. 反过来，当 $\mathrm{N}(q) \neq 0$ 时，有 $\mathrm{N}(q)^{-1}\,\bar{q} = q^{-1}$. 因此，$q \in Q$ 可逆当且仅当 $\mathrm{N}(q) \neq 0$，如果对所有的 $0 \neq q \in Q$ 都有 $\mathrm{N}(q) \neq 0$，则 Q 是体，称为 F 上的广义四元数体. 特别当 F 是实数域 R 时，取 α 为 R 上的不可约多项式 $x^2 - x + 5/4 = (x - 1/2)^2 + 1$ 的根，取 β 满足条件 $j^2 = -1$，则 $Q = R[\alpha, \beta]$ 就是实数域上的四元数体 $R[i, j]$，其中 $i = \alpha + 1/2$，$j = \beta$. 在广义四元数体 Q 中，每个非中心元 $q \in Q \backslash F$ 都是 F 上一个不可约二次方程

$$x^2 - \mathrm{Tr}(q)x + \mathrm{N}(q) = 0$$

的根（另一个根是 $\bar{q}$）. 反过来，有如下定理：

定理 1.7.5　设 K 是体，F 是 K 的子域，且含于 K 的中心. 如果 K 中任一不属于 F 的元素都适合 F 上的一个不可约的二次方程，则：

（1）当 K 非交换时，它一定是 F 上的广义四元数体.

（2）当 K 交换时，它是 F 的二次扩域，或是特征 2 的非完全域 F 添加 F 中一些元素的平方根所得到的扩域.

前面定义了广义四元数体 Q 的反自同构 $J: q \mapsto \bar{q}$，它在 Q 的中心 F 上的限制 $J|_F$ 等于 1_F（即 J 定驻 F 中所有的元素）. 设 τ 是 Q 的任意一个反自同构，则 $\sigma = \tau J^{-1}$ 是 Q 的自同构，而 $\tau = \sigma J$，且

当 $\tau|_F = 1_F$ 时，$\sigma|_F = 1_F$. 特别当 σ 是 Q 的内自同构时，τ 具有形式 $\tau: q \mapsto \delta \bar{q} \delta^{-1}$，其中 $\delta \in Q^*$ 预先取定. 下面的定理指出，这样的 τ 实际上穷尽了所有的满足条件 $\tau|_F = 1_F$ 的反自同构.

定理 1.7.6 设 σ、τ 分别是四元数体 Q 的自同构和反自同构，并且都定驻 F 中所有的元素，则 σ 是 Q 的内自同构，而 τ 具有形式 $\tau: q \mapsto \delta \bar{q} \delta^{-1}$，其中 $\delta \in Q^*$.

证明 只须证明 σ 是内自同构，具有形式 $I_\delta: q \mapsto \delta q \delta^{-1}$，则由 τJ^{-1} 是自同构且诱导出 1_F 即可知道 τJ^{-1} 是内自同构，τ 也就具有所说的形式了. 在文献[15]中对 F 是实数域的情形进行了证明，那里的证明思路也完全适用于 F 是任意域的情形. 不过，为了简化运算，我们稍微作了一点改动. 按文献[15]中的方法，是将 δ 写成 F 上的 4 维向量，在 F 上解四元线性方程组. 而我们是将 δ 写成域 $F[\alpha]$ 上的 2 维向量，在 $F[\alpha]$ 上解二元线性方程组.

(1.7.6.1) *设 $u \in Q$ 被 σ 映到 v，则 $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(v)$，$N(u) = N(v)$.*

u 满足二次方程 $u^2 - \mathrm{Tr}(u)u + N(u) = 0$. 由 σ 的作用知，v 也满足同一个方程 $v^2 - \mathrm{Tr}(u)v + N(u) = 0$，这说明 $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(v)$，$N(u) = N(v)$.

(1.7.6.2) *设 $v = \sigma(\alpha)$，则存在 $\delta \in Q^*$，使 $\delta v \delta^{-1} = \alpha$.*

记 $v = v_0 + v_1\beta$，$\delta = d_0 + d_1\beta$，其中 v_i、d_i $(i = 0, 1)$ 含于 Q 的子域 $E = F[\alpha] = F \oplus F\alpha$，且

$$\mathrm{Tr}(v) = v_0 + \overline{v_0} = \mathrm{Tr}(\alpha) = 1,$$

$$N(v) = v_0\overline{v_0} - v_1\overline{v_1}b = N(\alpha) = -a.$$

我们用待定系数法求不全为零的 d_0、$d_1 \in E$，使 $\delta v = \alpha\delta$，所得的 δ 即为所求. d_0、d_1 所满足的条件为

$$(d_0 + d_1\beta)(v_0 + v_1\beta) = \alpha(d_0 + d_1\beta),$$

$$(v_0 - \alpha)d_0 + \overline{v_1}bd_1 = 0, \tag{1}$$

$$v_1d_0 + (\overline{v_0} - \alpha)d_1 = 0. \tag{2}$$

(1)、(2)两式组成关于 d_0、d_1 的齐次线性方程组,其系数行列式为

$$\begin{aligned}\Delta &= (v_0 - \alpha)(\overline{v_0} - \alpha) - v_1 \overline{v_1} b \\ &= \alpha^2 - (v_0 + \overline{v_0})\alpha + (v_0 \overline{v_0} - v_1 \overline{v_1} b) \\ &= \alpha^2 - \alpha - a = 0.\end{aligned}$$

这说明方程组存在非零解(d_0、d_1),恰如所需.

(1.7.6.3) 设 σ 将 α、β 分别映到 u、v,则存在 $\delta \in Q^*$,使 Q 的内自同构 $I_\delta: q \mapsto \delta q \delta^{-1}$ 将 α、β 分别映到 u、v,从而 $\sigma = I_\delta$.

首先,由(1.7.6.2)知存在内自同构 σ_1,将 $u \mapsto \alpha$. 记 $\sigma_1(v) = w$. 只要能找到内自同构 σ_2 在定驻 α 的同时将 $\beta \mapsto w$,则内自同构 $\sigma_1^{-1}\sigma_2$ 将 α、β 分别映到 u、v,恰如所求. 以下只需找出 σ_2 即可. 也就是说,只要找出一个 $\delta \in Q^*$ 将 α、β 分别共轭到 α、w.

δ 中心化 α,因而含于 $E = F[\alpha]$.

记 $v = v_0 + v_1\beta$, v_0、$v_1 \in E$. 由 $\alpha\beta = \beta\overline{\alpha}$ 知 $\alpha v = v\overline{\alpha}$, 即

$$\alpha v_0 + \alpha v_1 \beta = \overline{\alpha} v_0 + \alpha v_1 \beta.$$

从而 $(\alpha - \overline{\alpha})v_0 = 0$, $v_0 = 0$. v 具有形式 $v = v_1\beta$. 且由 $N(v) = -v_1\overline{v_1}b = N(\beta) = -b$ 知 $v_1\overline{v_1} = 1$.

我们需要选 $\delta \in E^*$, 使 $\delta\beta\delta^{-1} = v$, 即

$$\delta\beta = v\delta = (v_1\beta)\delta = v_1\overline{\delta}\beta,\ \delta = v_1\overline{\delta}.$$

如果 $v_1 \neq -1$, 取 $\delta = v_1 + 1 \neq 0$, 则

$$v_1\overline{\delta} = v_1\overline{v_1} + v_1 = 1 + v_1 = \delta,$$

恰如所需;如果 $v_1 = -1$, 则要求 $\delta = -\overline{\delta}$. 当 $\mathrm{char}F = 2$ 时,取 $\delta = 1$, 当 $\mathrm{char}F \neq 2$ 时,取 $\delta = -\frac{1}{2} + \alpha$, 都能满足需要. ▌

三、关于带对合的非交换体

设 K 是非交换体,具有对合性反自同构 $J: a \mapsto \overline{a}$. 为了定义酉群,我们在§1.6中考虑了满足以下条件的 K 的加法子群 L:

(i) $\mathrm{Tr}K \subseteq L \subseteq K_J$，$\mathrm{Tr}K$ 与 K_J 分别是在对合 J 下的迹集合及对称元集合，且由于 $\mathrm{Tr}K \neq 0$，总假定 $1 \in \mathrm{Tr}K$；

(ii) $aL\bar{a} = L$ 对所有的 $a \in K^*$ 成立.

注意，$a(\mathrm{Tr}K)\bar{a} = \mathrm{Tr}K$ 与 $a(K_J)\bar{a} = K_J$ 也对所有的 $a \in K^*$ 成立. 特别由 $1 \in \mathrm{Tr}K$ 得 $a\bar{a} = a1\bar{a} \in \mathrm{Tr}K$ 对所有 $a \in K$ 成立，即迹集合 $\mathrm{Tr}K$ 也包含了所有的范数 $a\bar{a}(a \in K)$.

由于 K 非交换，它一定是无限集合. 进一步还有如下命题：

命题 1.7.7 $\mathrm{Tr}K$ 是无限集合.

命题 1.7.8 设 L 如上定义，E 是 L 在 K 中生成的子环. 则

(1) 如果 L 不含于 K 的中心，则 $E = K$；

(2) 如果 L 含于 K 的中心，则 L 等于 K 的中心，K 是 L 上的广义四元数体.

证明 (注：在文献[15]中可以找到 $L = K_J$ 的情形的证明. 我们在这里对任意 L 给出证明如下：)

对每个 $x \in L \subseteq K_J$，有 $\bar{x} = x \in L$. 故 L 在 J 的作用下不变，从而 L 生成的环 E 在 J 的作用下也不变，$\overline{E} = E$.

我们证明 E 是 K 的子体：对任意 $0 \neq x \in E$，$\bar{x} \in E$，且 x^{-1} 的范数 $x^{-1}\overline{x^{-1}} \in \mathrm{Tr}K \subseteq E$，故 $x^{-1} = (x^{-1}\overline{x^{-1}}) \cdot \bar{x} \in E$. 即 E 是体.

再证明 E 是 K 的正规子体：对任意 $a \in K^*$ 和 $x \in L$，有 $ax\bar{a} \in L$，且范数 $\overline{a^{-1}}a^{-1} \in \mathrm{Tr}K \subseteq L$. 故

$$axa^{-1} = (ax\bar{a})(\overline{a^{-1}}a^{-1}) \in E.$$

这说明 E 的生成元集合 L 在任意 $a \in K^*$ 的共轭作用下被映到 E 中. 从而 $aEa^{-1} = E$，E 是 K 的正规子体.

如果 L 不含于 K 的中心，由定理 1.7.1 即知 $E = K$.

设 L 含于 K 的中心 F，从而 $\mathrm{Tr}K$ 含于 F. 每个 $\theta \in K \backslash F$ 的迹 $a = \mathrm{Tr}\theta = \theta + \bar{\theta}$ 和范数 $b = \mathrm{N}(\theta) = \theta\bar{\theta}$ 都含于 $\mathrm{Tr}K \subseteq F$，故 θ 是 F 上二次方程 $x^2 - ax + b = 0$ 的根. 此方程的二根 θ 和 $a-\theta$ 都不含于 F，故方程左边是 F 上的不可约二次多项式. 由定理 1.7.5 得

K 是 F 上的广义四元数体. 于是 $L \supseteq \mathrm{Tr}K = F$. 但 $L \subseteq F$, 故 $L = F$. ▌

第 2 章

体上典型群的极大子群类型

群论研究的一个重要论题是研究典型群的极大子群. 这一研究的目标当然是希望定出所有的极大子群,但要最终完成这一目标,至少现在看来是很难实现的. 因此,群论学者们就希望先做一些较有可能做出的工作,一步一步向上述最终目标接近. 比如说,先对某些特定类型的极大子群做出完全的分类,或先对某些类型的典型群做出极大子群的分类,或先研究某些特定类型的子群是不是极大子群,等等. 在这一方向上最重要的成果,首推 M. Aschbacher[1]关于有限典型群的极大子群的纲领性的定理,由于这个定理,以及 P. Kleidman-M. Liebeck[30]、G. Seitz[65]等在这个定理所指的方向上的一系列工作,有限典型群的极大子群的分类已经有希望完成. Aschbacher 的论文中定义了有限典型群的 8 类子群. 对无限的典型群,也可以定义类似的子群类型,并研究它们的极大性,这构成了本书的主要内容. 当然,应该设法将 Aschbacher的定理向无限典型群作某种程度的推广,本章在这方面作了一些初步的讨论,但尚未能最后完成.

§2.1 M. Aschbacher 关于有限典型群极大子群的定理

本节讨论有限域上的典型群.

设 G 是有限域 $F = F_q$ 上的典型群,作用于 n 维 F-空间 $V = V(n, F)$ 上. 设 M 是 G 的极大子群,则 Aschbacher 的论文[1]的

主要定理所述，必有以下两种情况之一成立：

1. M 属于下面将要定义的子群类型 $C_1 \sim C_8$ 之一；

2. M 是非交换的几乎单群，不属于 $C_1 \sim C_8$ 的任何一类，因而它在 V 上的作用绝对不可约，不定驻 V 的任何一种张量积结构，也不能定义在 F 的真子域上.

G 的子群类型 $C_1 \sim C_8$ 定义如下：

C_1：由可约的极大子群 M 的全体组成，每个 M 是 V 的某个非平凡子空间 W 的稳定子群，且当 G 是辛群、酉群或正交群时，要求下列情况之一成立：

(i) W 非退化且与 $W^{\perp}$ 度量不相似；

(ii) W 全奇异；

(iii) G 是特征 2 的域上的正交群，W 是非奇异线.

C_2：由非本原的极大子群 M 的全体组成，每个 M 是 V 的某一个直和分解 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ 中的直和因子的集合 $\{V_1, \cdots, V_m\}$ 的稳定子群. 所有的直和因子 $V_i (1 \leq i \leq m)$ 的维数相等，且度量相似，它们或非退化且两两正交，或当 $m = 2$ 时全奇异.

C_3：由 $F = F_q$ 的极小扩域 $K = F_{q^r}$ 上的空间结构 $V = V(n/r, K)$ 的稳定子群组成，$r = [K:F]$ 是 n 的素因子.

C_4：由张量积结构 $V = U \otimes_F W$ 的稳定子群组成.

C_5：由 F 的极大子域 K 上的空间 $V(n, K)$（使 $V = F \otimes_K V(n, K)$）的稳定子群组成.

C_6：由这样的 r-群 R 的正规化子组成，r 是素数，且不等于域 F 的特征 p，n 是 r 的幂，R 的中心 $Z(R)$ 是 r 阶循环群，且含于 G 的中心，商群 $R/Z(R)$ 是初等 Abel r 群（这样的 R 称为 Extra-special r 群）.

C_7：由多重张量积结构 $V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_m (m \geq 3)$ 的稳定子群组成，其中所有的 $V_i (1 \leq i \leq m)$ 度量相似.

C_8：由嵌在 G 中且作用于同一空间 $V(n, F)$ 上的典型群 M 组成，即：(i) $\mathrm{SL}(n, F) \leq G \leq \mathrm{GL}(n, F)$，$M$ 是 $\mathrm{Sp}(n, F)$、$\mathrm{SU}(n, F, f)$ 或 $\Omega(n, F, f)$ 的正规化子；(ii) $\mathrm{char} F = 2$，$M =$

$O(n, F, Q) < G = \mathrm{Sp}(n, F, f)$.

关于上述类型的子群的更详细的描述，请参见本章的下一节§2.2.

上面所述的 Aschbacher 的主要定理将有限典型群的极大子群的分类工作归结为两件事：1) 验证 $C_1 \sim C_8$ 中的哪些子群确实是极大子群，哪些子群不是；2) 对 $C_1 \sim C_8$ 之外的几乎单的极大子群作出完全的分类. P. Kleidman 和 M. Liebeck 在文献[30]中做了第一件事，对各类有限典型群验证了 $C_1 \sim C_8$ 各类子群的极大性，但他们的论证严重依赖于有限非交换单群的分类定理，因而难以向任意域上的典型群推广. 本书作者在一系列工作中对任意域上的典型群验证了 $C_1 \sim C_8$ 中大部分类型的子群的极大性，甚至对任意体上的典型群的若干类型的子群成功地进行了验证，所作的论证是基于几何方法或矩阵技巧. 上面所说的第二件事要困难得多，但 G. Seitz 在这方面也取得了重大进展，对 M 是李型单群的情形做出了分类（见文献[65]）. 这样，基本上只剩下 M 是对称群或交错群的情形有待解决. 当然，我们可以对对称群或交错群在典型群中的一些具体的嵌入方式验证极大性，但要作出完全的分类，就相当于定出对称群和交错群的所有的本原的模表示，其难度可想而知.

§2.2 体上典型群的若干子群类型

设 G 是任意体 F 上的典型群，作用于空间 $V = V(n, F)$ 上. 我们可仿照 Aschbacher 关于有限域上的典型群的子群类型 $C_1 \sim C_8$ 的定义，对体上典型群 G 定义子群类型如下：

C_1：由可约的极大子群 M 的全体组成. 每个 M 是 V 的某个非平凡子空间 W 的稳定子群 G_W，且当 $G \leq \mathrm{GU}(n, F, h, L) \leq \mathrm{GU}(n, F, f)$ 时以下情况之一成立：

(i) W 非退化且与 $W^{\perp}$ 度量不相似；

(ii) W 全奇异；

(iii) $\mathrm{char}F = 2$，$L \neq K_J$，W 是非奇异的迷向线.

C_2：由非本原的极大子群 M 的全体组成，每个 M 是 V 的某一个直和分解 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m (m \geq 2)$ 中的直和因子的集合 $\{V_1, \cdots, V_m\}$的稳定子群，诱导出这个集合上的传递置换群，因而每一个 V_i $(1 \leq i \leq m)$ 都与 V_1 维数相等. 当

$$G \leq \mathrm{GU}(n, F, h, L) \leq \mathrm{GU}(n, F, f)$$

时，还要求所有的 V_i 度量相似，并且以下情况之一成立：

(i) 所有的 V_i 非退化，且两两相互正交；

(ii) $m = 2$，$V_i (i = 1, 2)$ L-全奇异.

以上 C_1、C_2 中给出了可约的或非本原的极大子群应当满足的必要条件，但这些条件是否充分，C_1、C_2 所说的子群是否确实是极大子群，仍然是需要验证的. 本书的第 3 章 § 3.6 和 § 3.7 将讨论这些子群的极大性.

C_8：由嵌在 G 中且作用于同一空间 $V(n, F)$上的典型群 M 组成.

关于同一空间 $V(n, F)$上的典型群的相互包含关系，我们有

$$\mathrm{U}(n, F, h, L) \leq \mathrm{U}(n, F, h, L_1) \leq \mathrm{U}(n, F, f)$$
$$\leq \mathrm{GL}(n, F),$$

其中 $L \subseteq L_1$. 我们只考虑其中涉及的酉群的 Witt 指数 ≥ 1 的情形. 这样，可能的情况是：

(i) $\mathrm{SL}(n, F) \leq G \leq \mathrm{GL}(n, F)$ 是线性群，M 是 $\mathrm{SU}(n, F, f)$在 G 中的正规化子；

(ii) $\mathrm{U}'(n, F, h, L_1) \leq G \leq \mathrm{GU}(n, F, h, L_1)$，$M$ 是 $\mathrm{U}'(n, F, h, L)$的正规化子，其中 $L \subset L_1$，且 L 在 L_1 中为极大.

对这些子群的极大性的验证将在本书第 4 章中给出. 我们所作的还不限于此，而是解决了更一般的问题. 即：

C_8 问题：定出 $N = \mathrm{U}'(n, F, h, L)$ 在 $\mathrm{GL}(n, F)$中的全部扩群.

我们在 N 的 Witt 指数 $\nu \geq 1$ 这一假设下完全解决了 C_8 问题，并作为推论导出了关于 C_8 类子群 M 极大性的结论.

C_3：由 F 的极小扩体 K 上的空间结构 $V(n/r, K)$ 的稳定子群 M 组成，其中 $r = \dim_F K$ 整除 n.

设 K 是 F 的扩体，扩张次数 $r = \dim_F K \geq 2$ 整除 n，$m = n/r$，则 $V(m, K)$ 可看成 $V = V(n, F)$. 作用于 $V(m, K)$ 上的 $\mathrm{GL}(m, K)$ 是 $V(n, F)$ 上的 $\mathrm{GL}(n, F)$ 的子群. $V(m, K)$ 是在 $V(n, F)$ 中定义的 K-空间结构. 当 $m \geq 2$ 时，这一空间结构在 $\mathrm{GL}(n, F)$ 中的稳定子群是指所有的一维 K-子空间的集合 $\{Kx \mid 0 \neq x \in V\}$ 的稳定子群，由满足条件 $(Kx)g = K(xg)$，$\forall x \in V$ 的所有 $g \in \mathrm{GL}(n, F)$ 组成. 它就是 $\mathrm{GL}(m, K)$ 在 $\mathrm{GL}(n, F)$ 中的正规化子，等于 $\mathrm{GL}(n, F) \rtimes (\mathrm{Gal}\ K/F)$，这里

$$\mathrm{Gal}\ K/F = \{\sigma \in \mathrm{Aut}\ K \mid a^\sigma = a, \forall a \in F\}$$

是 K 相对于 F 的自同构群，按如下方式作用于 $V(m, K)$ 上：取定 V 在 K 上的一组基 $\{e_1, \cdots, e_m\}$，则每个 $\sigma \in \mathrm{Gal}\ K/F$ 将每个 $\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i$ 映到 $\sum_{i=1}^m \alpha_i^\sigma e_i$ 而组成，也就是将 σ 作用于坐标 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ 的每个分量. 当 $m = 1$ 时，整个 V 就是一维 K-空间，K-空间结构 $V(1, K)$ 的稳定子群定义为

$$\mathrm{GL}(1, K) \rtimes (\mathrm{Gal} K/F) = K^* \rtimes (\mathrm{Gal}\ K/F),$$

它也正是 K^* 在 $\mathrm{GL}(n, F)$ 中的正规化子. 一般地，对 $V(n, F)$ 上的典型群 $G \leq \mathrm{GL}(n, F)$，K-空间结构 $V(m, K)$ 在 G 中的稳定子群 $M = G \cap (\mathrm{GL}(m, K) \rtimes \mathrm{Gal} K/F)$.

如果在 K 与 F 之间还有中间体 E，使 $F \subsetneq E \subsetneq K$，则 $d = \dim_E K$ 整除 r 从而也整除 n，$V(m, K)$ 也可看作 $V(md, E)$. $V(md, E)$ 在 G 中的稳定子群 X 满足 $M < X < G$，因此，要想使 M 是 G 的极大子群，一个必要条件为：K 是 F 的极小扩体(即 F 是 K 的极大子体).

设 $\mathrm{U}(m, K, h_K, L_K) \leq \mathrm{U}(m, K, f_K)$ 是 $V(m, K)$ 上的酉

群，$f_K = h_K + \rho\overline{h}_K$，$J: a \mapsto \overline{a}$ 是 K 的对合. 我们来看看 K 上的这个酉群 $\mathrm{GL}(n, F)$ 中的嵌入象含于怎样的 $\mathrm{U}(n, F, h, L)$ 之中. 对 K 上每个非零 F-线性函数 φ，可定义 V 上二元函数 $h = \varphi h_K$，使 $h(x, y) = \varphi(h_K(x, y))$，以及二元函数 $f = \varphi f_K$ 使 $f(x, y) = \varphi(f_K(x, y))$. 如果可适当选取 φ，使 $\varphi(\overline{\theta}) = \lambda(\varphi(\theta))^\tau$ 和 $\varphi(\theta \overline{a}) = \varphi(\theta) a^\tau$ 对 F 的某个对合 τ，某个 $\lambda = \pm 1 \in F^*$ 和所有的 $\theta \in K$，$a \in F$ 成立，则 $h = \varphi h_K$ 是 $V(n, F)$ 上的 τ-半双线性型，$f = \varphi f_K = h + \lambda\rho h^\tau$ 是 h 所对应的迹式 $(\lambda\rho)$-Hermite 内积，且非退化，$\mathrm{U}(m, K, f_K) < \mathrm{U}(n, F, f)$，且 $\mathrm{U}(m, K, h_K, L_K) < \mathrm{U}(n, F, h, L)$，这里 $L = \varphi(L_K)$ 满足条件

$$F_{\tau, -\lambda\rho} \subseteq L \subseteq F^{\tau, -\lambda\rho} \quad \text{及} \quad aLa^\tau \subseteq L, \ \forall a \in F.$$

设 $\mathrm{U}'(n, F, h, L) \trianglelefteq G \leq \mathrm{GU}(n, F, h, L)$，则 $\mathrm{U}'(m, K, h_K, L_K)$ 在 G 中的正规化子 M 就是 K-空间结构 $V(m, K)$ 在 G 中的稳定子群.

综上所述，G 的 C_3 类子群 M 包括以下两种情况：

(i) $\mathrm{SL}(n, F) \leq G \leq \mathrm{GL}(n, F)$，$M$ 是 $N = SL(n/r, K)$ 在 G 中的正规化子；

(ii) $\mathrm{U}'(n, F, h, L) \trianglelefteq G \leq \mathrm{GU}(n, F, h, L)$，$M$ 是 $N = \mathrm{U}'(n/r, K, h_K, L_K)$ 在 G 中的正规化子，$h = \varphi h_K$，$L = \varphi(L_K)$ 如上定义.

M 在 G 中的极大性可由下面的更一般的问题(C_3 问题)的结论导出来.

C_3 问题：设 K 是 F 的任意扩体(不要求 K 是极小扩体)，$r = \dim_F K < \infty$，定出 $N = \mathrm{SL}(m, K)$ 或 $\mathrm{U}'(m, K, h_K, L_K)$ 在 $\mathrm{GL}(mr, F)$ 中的全部扩群.

我们在第6章中相当成功地做到了这一点，仅仅附加了如下的限制：

(i) 对 $N = \mathrm{SL}(m, K)$ 的情形要求 $m \geq 2$，遗留下 $m = 1$ 的情形待解决；

(ii) 对 $N=\mathrm{U}'(m, K, h_K, L_K)$ 的情形要求 N 的 Witt 指数 $\nu\geq 2$，遗留下 $\nu\leq 1$（主要是 $\nu=1$）的情形待解决.

C_5：由 F 的极大子体 K 上的空间 $V(n, K)$（使 $V=F\otimes_K V(n, K)$）的稳定子群 M 组成，$V(n, K)$的基也是 $V(n, F)$ 的基. 取这样一组基，将 G 写成矩阵群 $G(F)\subset \mathrm{Mat}_n F$ 的形式，则 $G(K)=G(F)\cap \mathrm{Mat}_n K$ 是$G(F)$的子群，而 M 等于 $G(K)$在$G(F)$中的正规化子. M 的极大性将在第 8 章中讨论. 我们希望解决的是更一般的问题：

C_5 问题：对体 F 的任意子体（不一定极大）K，定出 $N=\mathrm{SL}(n, K)$ 或 $\mathrm{U}'(n, K, h, L)$在 $\mathrm{GL}(n, F)$中的全部扩群.

F 是有限域的情形已在文献[3]中完全解决了，在那里不限于讨论典型群，并且处理了一般的李型单群. 本书第 8 章讨论了 F 是任意域的情形，并在 $[F:K]$ 与 n 相比不是太大的假设下，定出了 N 在 $\mathrm{GL}(n, F)$中的扩群. C_5 问题还可进一步推广为：

对体 F 的子环 K，定出 $G(K)=G(F)\cap \mathrm{Mat}_n K$ 在 $\mathrm{GL}(n, F)$中的扩群，这里 $G(F)\subset \mathrm{Mat}_n F$ 是作用于 $V(n, F)$的某个典型群.

我们在第 8 章中对此做了尝试，在 K 是域 F 的极大子环，但不是域的情形下，证明了 $\mathrm{SL}(n, K)$的正规化子在 $G(\mathrm{SL}(n, F)\leq G\leq \mathrm{GL}(n, F))$ 中的极大性.

C_4 与 C_7：在 F 是域的情形下，很自然地可将 Aschbacher 的定义作如下的推广：C_4 与 C_7 类子群由张量积结构 $V=V_1\otimes_F\cdots\otimes_F V_k$ 在 G 中的稳定子群 M 组成. 当 $k=2$ 时，M 组成的类型称为 C_4，当 $k\geq 3$ 时 M 组成 C_7. 这里，张量积结构在 G 中的稳定子群 M 是指 V 的真子集 $\{u_1\otimes\cdots\otimes u_k \mid u_i\in V_i, \forall 1\leq i\leq k\}$ 在 G 中的稳定子群. 我们来看 M 由哪些元素组成？

先设 $\mathrm{SL}(V)\leq G\leq \mathrm{GL}(V)$，易见 $\mathrm{GL}(V)$的子群

$$\begin{aligned}M_1&=\mathrm{GL}(V_1)\times\cdots\times\mathrm{GL}(V_k)\\&=\{g_1\otimes\cdots\otimes g_k \mid g_i\in \mathrm{GL}(V_i),\ 1\leq i\leq k\}\end{aligned}$$

定驻张量积结构，其中 $g_1\otimes\cdots\otimes g_k$ 将每个 $\sum_j \otimes_{i=1}^k u_{ji}\in V$ 送到 $\sum_j \otimes_{i=1}^k u_{ji}g_i$. 如果所有的 V_i 的维数 $n_i=\dim V_i(1\leq i\leq k)$ 不全相等，记 $U_1=\otimes_{n_i=n_1}V_i$，$U_2=\otimes_{n_i\neq n_1}V_i$，则 M 也定驻张量积结构 $V=U_1\otimes U_2$，M 的极大性迫使 $k=2$ 且 $M=M_1\cap G$. 设所有的 $V_i(1\leq i\leq k)$ 具有相同的维数，则对每个 i 存在一个线性同构 $\varphi_i:V_1\to V_i$，V 中每个向量具有形式

$$\sum_j \otimes_{i=1}^k u_{ji}\varphi_i，其中 u_{ji}\in V_1，\forall 1\leq i\leq k.$$

k 元集合 $\{i|1\leq i\leq k\}$ 上的对称群 S_k 中的每个元素 σ 对应于 GL(V)中的一个元素，仍记作 σ，它将

$$\sum_j \otimes_{i=1}^k u_{ji}\varphi_i \mapsto \sum_j \otimes_{i=1}^k u_{ji}\varphi_{\sigma(i)}.$$

粗略地说，σ 引起了 $V_i(1\leq i\leq k)$ 的互换，这样就将 S_k 嵌入 GL(V). 此时 $M=(M_1\rtimes S_k)\cap G$.

现设在每个 V_i 上定义了关于对合 J 的一个 $\mathscr{E}_i$-Hermite 内积 f_i，J 与 i 无关，$\mathscr{E}_i=\pm 1$ 依赖于 i. 设 $\mathscr{E}=\pm 1$ 是所有的 $\mathscr{E}_i(1\leq i\leq k)$ 之积，则 V 上可定义 $\mathscr{E}$-Hermite 内积 $f=f_1\otimes\cdots\otimes f_k$，使

$$f(u_1\otimes\cdots\otimes u_k,\ v_1\otimes\cdots\otimes v_k)=\prod_{i=1}^k f_i(u_i,\ v_i),$$

对任意 u_i、$v_i\in V_i$，$1\leq i\leq k$. 当 f 是对称双线性型时，还可在 V 上定义二次型 Q，使它对应的对称双线性型等于 f，并且所有的 $Q(u_1\otimes\cdots\otimes u_k)=0$. $M_1=\mathrm{GL}(V_1)\times\cdots\times\mathrm{GL}(V_k)$ 的子群 $M_0=\mathrm{U}(V_1,f_1)\times\cdots\times\mathrm{U}(V_k,f_k)$ 被嵌入 $\mathrm{U}(V,f)$，且当 f 是对称双线性型时，被嵌入 $O(V,Q)$. 当 Q 有定义时，记 $G_0=\mathrm{GO}(V,Q)$，$G_0'=\Omega(V,Q)$；否则，记 $G_0=\mathrm{GU}(V,f)$，$G_0'=\mathrm{U}'(V,f)$. 设 $G_0'\leq G\leq G_0$. 如果 V_i 不全度量等价，则 M 的极大性迫使 $k=2$，且 $M=M_0\cap G$. 如果所有的 $V_i(1\leq i\leq k)$ 相互度量等价，则对每个 i 存在一个度量同构 $\varphi_i:V_1\to V_i$，用这一组 φ_i

按前述方式的定义，将 S_k 嵌入 GL(V)，则嵌入象含于 G_0，而

$$M = (M_0 \rtimes S_k) \cap G.$$

本书第 7 章将研究在 $k = 2$ 的情形下 M 的极大性，即研究 C_4 类子群的极大性. 这类子群的极大性可以由以下问题的结论推出来.

C_4 问题：定出 $N = \mathrm{SL}(V_1) \times \mathrm{SL}(V_2)$ 或 $\mathrm{U}'(V_1, f_1) \times \mathrm{U}'(V_2, f_2)$ 在 GL(V)中的全部扩群.

在本书第 7 章中对 $N = \mathrm{SL}(V_1) \times \mathrm{SL}(V_2)$ 或 $\mathrm{Sp}(V_1, f_1) \times \mathrm{Sp}(V_2, f_2)$ 的情形完全解决了 C_4 问题. 对 $N = \mathrm{U}'(V_1, f_1) \times \mathrm{U}'(V_2, f_2)$ 的其他情形，我们在对 f_1、f_2 的 Witt 指数附加了若干限制之后，定出了 N 的扩群(将这些限制取消或放宽之后的情形遗留下来待解决). 而对 $k \geq 3$ 的情形(即对 C_7 类子群)，除文献[30]中解决了 F 为有限域的情形外，对 F 是无限域的情形至今尚无进展.

C_4 类子群的更一般的推广如下：

设 F 是任意体(可以是域或非交换体). 设 Y 是 d 维左 K-空间，K 是 $\mathrm{End}_F Y$ 的不可约子体，则 Y 可看作左 F 右 K 双空间，K 在 $\mathrm{End}_F Y$ 中的中心化子 $E = \mathrm{End}_{FK} Y$ 也是体. Y 也可看作左 F 右 E 双空间. 取 r 维左 E-空间 U，m 维左 K-空间 Π. 则可定义张量积 $V = (Y \otimes_E U) \otimes_K \Pi$，并且 V 是 mrd-维左空间. 我们假定 K 与 E 在 $\mathrm{End}_F Y$ 中互为中心化子，此时

$$M_0 = (1_Y \otimes \mathrm{GL}(U/E)) \otimes \mathrm{GL}(\Pi/K)$$

在 V 上不可约，它在 GL(V/F)中的正规化子 M 就是 V 的张量积结构的稳定子群. 对 V/F 上的典型群 G，这个张量积结构的稳定子群等于 $M \cap G$.

当 m、r 都大于 1 时，我们将所有这样的稳定子群 $M \cap G$ 称为 C_4 类子群.

如果 $r = 1$，则可将 $Y \otimes_E U$ 等同于 Y，$V = Y \otimes_K \Pi$，假如此时

Y 还是一维右 K-空间，则可写为 $Y = eK$（其中 $0 \neq e \in Y$），将每个 $e\alpha$（$\alpha \in K$）与 α 等同起来，就可将 Y 与 K 等同起来. 还可将 F 看成 K 的子体（$a \in F$ 等同于 $\alpha \in K$ 使 $ae = e\alpha$），K 看成 F 的真扩体，这样，V 的上述张量积结构成为扩体 K 上的空间结构 $V = \Pi$，$M_0 = \mathrm{GL}(\Pi/K)$ 在 $\mathrm{GL}(V/F)$ 中的正规化子 $M = \mathrm{GL}(V/K) \rtimes (\mathrm{Gal}K/F)$，这一结构的稳定子群 $M \cap G$ 是 C_3 类子群. 现在假设 $r = 1$ 并且 $\dim_F Y = 1$，但是 $K \subsetneq F$，则张量积结构 $V = F \otimes_K \Pi$ 在 $\mathrm{GL}(V/F) = \mathrm{GL}(n, F)$ 中的稳定子群 M 就是真子体 K 上的典型群 $\mathrm{GL}(\Pi/K) = \mathrm{GL}(n, K)$ 的正规化子，$M \cap G$ 是 G 的 C_5 类子群.

同理，如果 $m = 1$，则当 Y 是一维右 E-空间时，$M \cap G$ 是 C_3 类子群，当 $\dim_F Y = 1$ 时，$M \cap G$ 是 C_5 类子群.

在 $r = 1$ 或 $m = 1$ 的其他情形，我们仍将 $M \cap G$ 称为 C_4 类子群.

对 F 是域的情形下的 C_4 类子群可作进一步的讨论如下：

当 F 是域时，$K = \mathrm{End}_F Y$ 包含 F，因此，不可约 F-K-双模 Y 也就是不可约右 K-模，即一维右 K-空间，可以等同于 K，而 K 在 $\mathrm{End}_F Y$ 中的中心化子 $E = \mathrm{End}_K Y = K_L$，当然 Y 也是一维右 E-空间，故 $Y \otimes_E U = U$. 左 E-空间（即左 K_L-空间）U 也就是右 K-空间. $V = U \otimes_K \Pi$ 可等同于 $\mathrm{Mat}_{r\times m} K$，而 $M_0 = \mathrm{GL}(r, K_L) \otimes \mathrm{GL}(m, K)$ 由 V 上全体相抵变换 $A_L \otimes B_R: X \mapsto AXB$ 组成，其中 $A \in \mathrm{GL}(r, K)$，$B \in \mathrm{GL}(m, K)$. $K \cap K_L$ 就是 K 的中心 $Z(K)$，它包含 F. 设 $\dim_{Z(K)} K = t$，则 M_0 在 $\mathrm{GL}(V/F) = \mathrm{GL}(n, F)$ 中的中心化子等于 $I^{(n/t)} \otimes Z(K)^*$. 如果 $Z(K)$ 是 F 的真扩域，则 M_0 的正规化子 M 真包含于 V 的 $Z(K)$-空间结构 $V(n/t, Z(K))$ 的稳定子群 M_1，$M \cap G \subsetneq M_1 \cap G \subsetneq G$，$M \cap G$ 不是 G 的极大子群，故设 $F = Z(K)$. 当 $d = 1$ 时，$F = K = E$，仅当 m、$r \geq 2$ 时，$M \cap G$ 才是 G 的真子群，它也就是有限域的情形下 Aschbacher 对 C_4 类子群定义的直接推广. 当 $d \geq 2$ 时，K 是非交换体. 如果 $r = 1$ 或 $m = 1$，则张量积结构 $V = U \otimes_K \Pi$ 就是 K-空间结构，

$M \cap G$ 是 C_3 类子群. 因此,只将 r、$m \geq 2$ 的情形列入 C_4 类型. 本书第 7 章证明了 $\mathrm{SL}(r, K_L) \otimes \mathrm{SL}(m, K)$ 的正规化子在 $\mathrm{SL}(mrd, F)$ 中的极大性.

能否将 C_7 类子群也作类似的推广呢? 这个问题待研究.

C_6: 与 §2.1 中对有限典型群定义的 C_6 相同,即由 Extra-special r 群的正规化子组成,r 是素数且不等于 char$F$, n 是 r 的幂. 在 §2.7 中我们将证明,具有可解的正规子群的极大子群 M 都属于 C_3 或 C_6 类. 需要指出的是,即使 G 是无限典型群,C_6 类子群 M 在射影群 $\mathrm{PGL}(n, F)$ 中的象却都是有限群. 这样的 M 能否成为 G 的极大子群,尚待研究.

§2.3 线性表示的若干特殊例子

本书主要研究典型群的子群. 典型群 G 的每个子群都可以看成某个抽象群 X 在某个线性表示 φ 下的象 $\varphi(X)$. 除了前面比较系统地定义的子群类型外,本节补充介绍一些这种表示的特殊例子,以备应用.

一、正交群的 Clifford 代数及其旋量表示

关于这方面的知识,在文献[4]中有详细的叙述,以下只是作一个简明的介绍,以备本书应用.

设 F 是域,在 $V = V(n, F)$ 上定义了正则二次型 Q 及其相伴的对称双线性型

$$f(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y).$$

不妨简记 $f(x, y)$ 为 (x, y). 以 V 中的向量为生成元生成 F 上一个代数 C,满足关系式 $x^2 = Q(x)(\forall x \in V)$,则 C 称为 (V, Q) 的 Cliford 代数,也称为正交群 $O(V, Q)$ 的 Clifford 代数. 由基本定义关系 $x^2 = Q(x)$ 还可推出:对任意 x、$y \in V$,有

$$(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$$

$$= (x+y)^2 - x^2 - y^2 = xy + yx.$$

特别当 x、y 正交时，$xy = -yx$.

任取 V 在 F 上的一组基 $\{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. 集合 $M = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的每一子集 S 对应于 C 的一个元素 u_S：当 S 是空集时，定义 $u_S = 1 \in F^*$；当 $|S| = k \geq 1$ 时，将 S 所含的 k 个自然数按从小到大的次序排成 $i_1 < \cdots < i_k$，定义 $u_S = v_{i_1} \cdots v_{i_k}$，则 $\{u_S \mid S \subseteq M\}$ 组成 C 作为 F-向量空间的一组基. M 的子集共有 2^n 个，因此 $\dim_F C = 2^n$. 利用 V 的基向量之间的乘法关系式 $v_i v_j = (v_i, v_j) - v_j v_i$ 和 $v_i^2 = Q(v_i)$ 可以得出 C 的基向量 u_S 之间的乘法关系式.

$\left\{u_S \,\middle|\, |S| \text{为偶数}\right\}$张成 C 的一个子空间，记作 C^+，其中的元素称为*偶元素*；$\left\{u_S \,\middle|\, |S| \text{为奇数}\right\}$张成 C 的一个子空间，记作 C^-，其中的元素称为*奇元素*. 显然 C^+、C^- 都是 C 的 2^{n-1} 维子空间，$C = C^+ \otimes C^-$. 且 C^+ 是 C 的子代数，C^+ 与 C^- 都是 C^+-双模.

如果 $\alpha \in C$ 是 C 的乘法可逆元，并且 α 在 C 上的共轭作用 I_α：$c \mapsto \alpha^{-1} c \alpha$ 将 V 仍映到 V，则称 α 为 C 的*正则元*. 正则元的全体在 C 的乘法下组成一个群，称为 Clifford *群*，记作 Γ. $\Gamma \cap C^+$ 是 Γ 的正规子群，称为*特殊* Clifford *群*，记作 Γ^+. 每个 $\alpha \in \Gamma$ 的共轭作用引起 V 上的一个线性变换 $\varphi(\alpha)$：$x \mapsto \alpha^{-1} x \alpha$. 且对任意 $x \in V$，有

$$Q(x\varphi(\alpha)) = (\alpha^{-1} x \alpha)^2 = \alpha^{-1} x^2 \alpha = \alpha^{-1} Q(x) \alpha = Q(x),$$

这说明 $\varphi(\alpha) \in O(V, Q)$. $\varphi: \Gamma \to O(V, Q)$，$\alpha \mapsto \varphi(\alpha)$ 是群 Γ 的一个表示，称为 Γ 的*向量表示*. φ 诱导出特殊 Clifford 群到特殊正交群中的一个表示 $\varphi^+: \Gamma^+ \to \mathrm{SO}(V, Q)$，这个表示的核 $\mathrm{Ker}\varphi^+ = F^*$.

V 中的非奇异向量 w 都是正则元. 事实上，由于 $w^2 = Q(w) \neq 0$，$w^{-1} = Q(w)^{-1} w$，对任意 $x \in V$ 有

$$\begin{aligned} w^{-1} x w &= Q(w)^{-1}((x, w)w - xw^2) \\ &= -(x - Q(w)^{-1}(x, w)w) = x(-S_w), \end{aligned}$$

可见 $w \in \Gamma$，且 $\varphi(w) = -S_w$ 是负对称或正交平延. 对任一组非奇异向量 $w_1, \cdots, w_k$ 有 $g(w_1 \cdots w_k) = (-1)^k S_{w_1} \cdots S_{w_k}$. 特别，$w_1 \cdots w_k \in \Gamma^+$ (k 是偶数)在向量表示下的象 $S_{w_1} \cdots S_{w_k}$ 可取遍 $SO(V, Q)$. 故 φ^+ 是满同态. 而 $\mathrm{Ker}\varphi^+ = F^*$，可见任一 $\alpha \in \Gamma^+$ 具有形式

$$\alpha = \lambda w_1 \cdots w_{2m} = (\lambda w_1) \cdots w_{2m} \quad (\text{其中 } \lambda \in F^*),$$

即 α 是偶数个非奇异向量之积，且 α 在相差一个常数因子的意义上由 $\varphi(\alpha) \in SO(V, Q)$ 唯一决定，$\Gamma^+/F^* \cong SO(V, Q)$. $Q(w_1) \cdots Q(w_{2m}) \in F^*$ 在相差平方因子的意义上由 $\varphi(\alpha)$ 唯一决定，$\varphi(\alpha) \in \Omega(V, Q) \Longleftrightarrow Q(w_1) \cdots Q(w_{2m})$ 是平方元.

设 $\nu(Q) \geq 1$，u、w 是 V 中一对线性无关且相互正交的向量，且 $Q(u) = 0$，则对 $uw \in C^+$ 有

$$(wu)^2 = -w^2u^2 = -Q(w)Q(u) = 0,$$

故 $(1 + wu)^{-1} = 1 - wu$，对任意 $x \in V$，有

$$\begin{aligned}(1+wu)^{-1}x(1+wu) &= x + (x, w)u - (x, u)(w + Q(w)u) \\ &= wt_{u,w},\end{aligned}$$

$1 + wu$ 在向量表示下的象正是 $\Omega(V, Q)$ 的根元素 $t_{u,w}$.

设 $(V, Q) = V(2m, F, Q)$ 的维数是偶数 $2m$，且具有极大的 Witt 指数 $\nu(Q) = m$. 取 V 的标准酉基 $\mathscr{E} = \{u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m\}$，即 $U_0 = \langle u_i | 1 \leq i \leq m \rangle$ 与 $V_0 = \langle v_i | 1 \leq i \leq m \rangle$ 都是极大全奇异子空间，且 $(u_i, v_j) = 0 (\forall i \neq j)$，$(u_i, v_i) = 1 (\forall i)$. 记 $e = u_1 \cdots u_m \in C$. 设 eC^+ 是 e 生成的右 C^+-模，则

$$\{ev_{i_1} \cdots v_{i_k} | 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m,\ k \text{ 是偶数}\}$$

组成 eC^+ 的一组基(约定 $k = 0$ 时的基向量为 e 本身)，$W = eC^+$ 是 F 上 2^{m-1} 维空间. 每个 $\alpha \in \Gamma^+$ 通过右乘诱导出 W 上的 F-线性变换

$$\chi(\alpha) \in \mathrm{GL}(W/F) = \mathrm{GL}(2^{m-1}, F), \chi(\alpha): z \mapsto z\alpha.$$

$\chi: \Gamma^+ \to \mathrm{GL}(2^{\nu-1}, F)$ 称为特殊 Clifford 群 Γ^+ 的旋量表示. 由此得到特殊正交群 $\mathrm{SO}^+(2m, F)$ 到 $\mathrm{PGL}(2^{m-1}, F)$ 中的表示 $\sigma: \varphi(\alpha) \mapsto \chi(\alpha)$, 也就得到了 $\Omega^+(2m, F)$ 到 $\mathrm{PSL}(2^{m-1}, F)$ 中的一个表示. 注意, $\Omega^+(2m, F)$ 可由全体正交二平延 t_{u_i, su_j}、t_{v_i, sv_j}、t_{u_i, sv_j} $(i \neq j, s \in F^*)$ 生成. 将这些正交二平延所对应的 $1 + su_ju_i$、$1 + sv_jv_i$、$1 + sv_ju_i \in \Gamma^+$ 在 eC^+ 上的右乘作用在适当的基下写成矩阵, 就得到 $\Omega^+(2m, F)$ 在 $\mathrm{SL}(2^{m-1}, F)$ 中的一个矩阵表示, 仍记为 σ.

特别取 $\nu = 2, 3, 4, 5$, 就得到如下表示:

$$m = 2: \sigma: \Omega^+(4, F) \to \mathrm{PSL}(2, F)$$

是满同态而非单同态, $\mathrm{Ker}\sigma \cong \mathrm{SL}(2, F)$. 事实上, $\mathrm{P}\Omega^+(4, F) \cong \mathrm{PSL}(2, F) \times \mathrm{SL}(2, F)$.

$$m = 3: \sigma: \Omega^+(6, F) \to \mathrm{SL}(4, F)$$

是同构, σ 诱导出任一非奇异向量在 $\Omega^+(6, F)$ 中的稳定子群 $\Omega(5, F, Q)$ $(\nu(Q) = 2)$ 到 $\mathrm{Sp}(4, F)$ 的同构.

$m = 4$、5 的情形: 将 $\sigma(\Omega^+(2m, F)) \leq \mathrm{SL}(2^{m-1}, F)$ 所作用的空间 $eC^+ = V(2^{m-1}, F)$ (维数 $2^{m-1} = 8$ 或 16) 在适当的基下写成行向量空间, 并定义二次型 $\tilde{Q}$ 如下:

取 F 上 4 维行向量空间 $V_1 = \mathrm{Mat}_{1\times 4}F$ 和 r 维行向量空间 $V_2 = \mathrm{Mat}_{1\times r}F$, 则它们的张量积 $\tilde{V} = V_1 \otimes_F V_2$ 是 $4r$ 维 F-空间. 取 F 上具有标准形的 4 阶交错方阵 H_1 和 r 阶交错方阵 H_2, 在行向量空间 V_1、V_2 上分别定义辛内积 $f_1(x, y) = xH_1y'$ 和 $f_2(x, y) = xH_2y'$, 则在 $4r$ 维空间 $\tilde{V} = V_1 \otimes_F V_2$ 上有对称双线性内积 $\tilde{f} = f_1 \otimes f_2$ 使

$$\tilde{f}(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) = f_1(x_1, y_1) f_2(x_2, y_2),$$

并唯一决定一个与 $\tilde{f}$ 相伴的二次型 $\tilde{Q}$, 使所有的 $\tilde{Q}(x \otimes y) = 0$, 则

$N = \mathrm{Sp}(V_1, f_1) \otimes \mathrm{Sp}(V_2, f_2)$ 是 $\Omega(\tilde{V}, \tilde{Q})$的 C_4 类子群. 设 V_1 的自然基为 $\mathscr{E}_1 = \{e_1, \cdots, e_4\}$, V_2 的自然基为 $\mathscr{E}_2 = \{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r\}$, 则 $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2 = \{e_i \otimes \varepsilon_j \mid 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq r\}$ 是$\tilde{V}$的基,在这组基下,$\tilde{f}$的矩阵为 $H_1 \otimes H_2$, $\tilde{Q}$的矩阵为

$$\tilde{\Delta} = \begin{pmatrix} O^{(2r)} & \mathrm{diag}(H_2, H_2) \\ O & O \end{pmatrix}.$$

而 $N < \Omega(\tilde{V}, \tilde{Q})$ 被写成矩阵群

$$N = \mathrm{Sp}(4, F, H_1) \otimes \mathrm{Sp}(r, F, H_2)$$

$$< \Omega(4r, F, \tilde{\Delta}) = \Omega^+(4r, F).$$

下面建立空间 eC^+ 与$\tilde{V}$之间的对应,并将$\tilde{V}$上的二次型$\tilde{Q}$赋予 eC^+.

$m = 4$ 的情形: $\sigma: \Omega^+(8, F) \to \mathrm{SL}(eC^+/F) = \mathrm{SL}(8, F)$. 将 eC^+的基向量按下面的顺序排列为 eC^+的基:

$$\mathscr{B} = \{e, \quad ev_3v_4; \quad ev_1v_3, ev_1v_4;$$

$$ev_1v_2, ev_1v_2v_3v_4; ev_2v_3, ev_2v_4\}.$$

在这组基下,将 eC^+写成行向量空间 $\mathrm{Mat}_{1\times 8}F$, 并与$\tilde{V}$等同起来,则$\tilde{Q}$可以看作 eC^+上的二次型. 将生成 $\Omega^+(8, F)$的正交二平延在 σ 下的象在基 $\mathscr{B}$ 下写成矩阵,可以发现 σ 将 $\Omega^+(8, F)$映到 $\Omega(8, F, \tilde{\Delta}) = \Omega^+(8, F)$, 因此 σ 看作 $\Omega^+(8, F)$的自同构.

取 V 的正则子空间 $W_1 = \langle u_1, u_2, v_1, v_2, u_3 - v_3\rangle$ 及 $W_2 = W_1^{\perp} = \langle u_4, v_4, u_3 + v_3\rangle$. 对 $i = 1, 2$, 记 $\Omega(W_i)$为满足条件 u、$w \in W_i$ 的全体根元素 $t_{u,w} \in \Omega(V, Q)$ 所生成的子群,则 $X = \Omega(W_1) \times \Omega(W_2)$ 是 $\Omega(V, Q)$的可约子群,但计算表明 $\sigma(X) = N = \mathrm{Sp}(4, F, H_1) \otimes \mathrm{Sp}(2, F, H_2)$, 它是 $\Omega(\tilde{V}, \tilde{Q})$的不可约子群. 当 $\mathrm{char}F \neq 2$ 时, $V = W_1 \oplus W_2$. 在第 3 章中将证明 $X =$

$\Omega(W_1)\times\Omega(W_2)$ 的正规化子是 $\Omega^+(8, F)=\Omega(V, Q)$ 的极大子群. 从而 C_4 类子群 $N=\sigma(X)$ 的正规化子是 $\Omega^+(8, F)=\Omega(\widetilde{V}, \widetilde{Q})$ 的极大子群. 当 $\mathrm{char}F=2$ 时, $W_1+W_2=x^{\perp}$ 是 V 的 7 维正则子空间, 其中 $x=u_3+v_3$ 是非奇异向量, 从而 $X=\Omega(W_1)\times\Omega(W_2)$ 含于 x 在 $\Omega(V, Q)$中的稳定子群 $\Omega(x^{\perp})=\Omega(7, F, Q_1)$, 其中 Q_1 是 Q 在 $x^{\perp}$上的限制, 其 Witt 指数 $=3$. $\Omega_7=\sigma(\Omega(x^{\perp}))$ 同构于可约子群 $\Omega(7, F, Q_{x^{\perp}})$, 但 Ω_7 本身在$\widetilde{V}$上不可约. 子群的包含关系

$$\Omega(W_1)\times\Omega(W_2)<\Omega(x^{\perp})<\Omega(V, Q)$$

经过 σ 作用后变为 $\mathrm{Sp}(4, F)\otimes\mathrm{Sp}(2, F)<\Omega_7<\Omega^+(8, F)$. 取正交平延 $t_{u_2, v_4}\in\Omega(x^{\perp})\backslash X$, 则 $\Omega(x^{\perp})=\langle X, t_{u_2, v_4}\rangle$. 由计算可知 $\sigma(t_{u_2, v_4})$的矩阵为

$$T_{32}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)T_{41}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right).$$

而 $\Omega_7=\langle N, \sigma(t_{u_2, v_4})\rangle$ 可由具有下面的形式的全体矩阵生成: $T_{ij}(B)T_{j+2, i\pm 2}(B)\left(1\leq j\leq 2, i\notin\{j, j+2\}, B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & a\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_2F\right)$.

当 $m=5$ 时, $\sigma:\Omega^+(10, F)\to\mathrm{SL}(eC^+/F)=\mathrm{SL}(16, F)$. 将 eC^+的基向量按下面的顺序排列为基:

$$\begin{aligned}\mathscr{B}=\{e,\quad & ev_1v_3, & & ev_1v_2, & & ev_2v_3;\\ ev_3v_4,\quad & ev_1v_4, & & ev_1v_2v_3v_4, & & ev_2v_4;\\ ev_4v_5,\quad & ev_1v_3v_4v_5, & & ev_1v_2v_4v_5, & & ev_2v_3v_4v_5;\\ -ev_3v_5,\quad & -ev_1v_5, & & -ev_1v_2v_3v_5, & & -ev_2v_5\}.\end{aligned}$$

将 eC^+ 在这组基下写成 16 维行向量空间, 并与 $\widetilde{V}=V(4, F)\otimes_F V(4, F)$ 等同起来, 从而把$\widetilde{Q}$看作是 $\widetilde{V}=eC^+$ 上的二次型.

取 $V = V(10, F, Q)$ 的正则子空间 $W_1 = \langle u_1, u_2, v_1, v_2, u_3 - v_3\rangle$ 及 $W_2 = W_1^{\perp} = \langle u_4, u_5, v_4, v_5, u_3 + v_3\rangle$，则对 $X = \Omega(W_1)\times\Omega(W_2) < \Omega(V, Q)$ 有

$$\sigma(X) = N = \mathrm{Sp}(4, F, H_1)\otimes\mathrm{Sp}(4, F, H_2)$$

$$< \Omega(\tilde{V}, \tilde{Q}) = \Omega^+(16, F).$$

由 $\Omega(V, Q) = \langle X, t_{u_5, v_3}\rangle$ 得

$$\Omega_{10} = \sigma(\Omega^+(10, F)) = \langle N, \sigma(t_{u_5, v_3})\rangle$$

$$= \langle N, T_{32}(\mathrm{diag}(1, 0, 1, 0))T_{41}(\mathrm{diag}(0, 1, 0, 1))\rangle$$

$$\not\leq \Omega^+(16, F).$$

另外,取 $Y = \langle X, t_{u_2, v_5}\rangle$，则当 $\mathrm{char}F \neq 2$ 时,$Y = \Omega^+(10, F)$，$\sigma(Y) = \Omega_{10}$；当 $\mathrm{char}F = 2$ 时，

$$Y = \Omega((u_3 + v_3)^{\perp}) = \Omega(9, F, Q_1)(\nu(Q_1) = 4),$$

$$\sigma(Y) = \Omega_9 < \Omega_{10}，且\ \Omega_9 < \Omega(\tilde{V}, \tilde{Q}) = \Omega^+(16, F).$$

由计算表明 $\sigma(t_{u_2, v_5})$的矩阵为 $T_{32}(-B_0)T_{41}(B_0)$，其中 $B_0 = E_{14} + E_{23} \in \mathrm{Mat}_4F$. 记 $R_{10} = \{SH_2 | S \in \mathrm{Mat}_4F$ 是交错方阵$\}$，$R_9 = \{B = (b_{ij})_{4\times4} \in R_{10} | b_{11} = b_{22}\}$. 并定义 R_{10}上的可逆变换将每个 $B = (b_{ij})_{4\times4} \in R_{10}$ 映到 $\overline{B} = (b_{11} + b_{22})I - B$，则所有的 $T = T_{ij}(B)T_{j+2, i\pm2}(\mp\overline{B})$ $(1 \leq j \leq 2, i \in \{1, 2, 3, 4\}\backslash\{j, j+2\}, B \in R_{10})$ 生成 Ω_{10}，其中 $B \in R_9$ 的全体 T 生成 Ω_9.

二、对称群或交错群的本原表示的若干例子

这里当然不可能给出对称群或交错群的所有的不可约且本原的表示,但下面一些例子在本书的定理和证明中将被引用.

1. 对称群和交错群在 F_2 上辛群或正交群中的嵌入

设自然数 $m \geq 5$，S_m 和 A_m 分别是作用于 m 元集合 $\mathscr{E} = \{e_1, \cdots, e_m\}$ 上的对称群和交错群. 以 $\mathscr{E}$ 为基在二元域 F_2 上张成 m 维空间 $V_m = V(m, F_2)$，则基向量的每个置换 $\sigma \in S_m$ 引起 V_m 上一

个线性变换 $\tilde{\varphi}\in \mathrm{GL}(m, 2)$. 这就得到 S_m 在 V_m 上一个忠实表示. 在 V_m 上定义二次型 $\tilde{Q}$ 及相伴的辛内积 $\tilde{f}$,使

$$\tilde{f}(e_i, e_j)=1\ (\forall i\neq j),\ \tilde{f}(e_i, e_i)=0(\forall i),$$

且所有的 $\tilde{Q}(e_i)$ 相等. 则易见 $\tilde{\varphi}(S_m)\leq O(V_m, \tilde{Q})<\mathrm{Sp}(V_m, \tilde{f})$, 进而 $\tilde{\varphi}(A_m)\leq \Omega(V_m, \tilde{Q})$. 不过,$S_m$ 在 V_m 上的这个表示是可约的. 比如,$V_{m-1}=\left\{\sum_{i=1}^m a_ie_i \,\middle|\, \sum_i a_i=0\right\}$ 是 S_m 的 $m-1$ 维不变子空间,所有基向量的和 $w_0=e_1+\cdots+e_m$ 也被 S_m 定驻不动,张成 S_m 的一维不变子空间 $\langle w_0\rangle$. 将 $\tilde{f}$、$\tilde{Q}$ 在 V_{m-1} 上的限制分别记为 f_1、Q_1,则 $\tilde{\varphi}$ 诱导出 S_m 在 V_{m-1} 上的忠实表示

$$\varphi_1: S_m\rightarrow O(V_{m-1}, Q_1)<\mathrm{Sp}(V_{m-1}, f_1),$$

并进而诱导出忠实表示 $A_m\rightarrow \Omega(V_{m-1}, Q_1)$. 注意,$S_m$ 由对换生成,每个对换 (ij) 在 $O(V_m, \tilde{Q})$ 中的象就是正交平延 $\rho_{e_i+e_j, 1}$. 而 A_m 可由两个不相交对换之积 $(ij)(st)$ $(i, j, s, t$ 两两不同$)$ 的全体生成,$\tilde{\varphi}((ij)(st))=\rho_{e_i+e_j, 1}\rho_{e_s+e_t, 1}=t_{e_i+e_j+e_s+e_t, e_i+e_j}$ 是 $\Omega(V_m, \tilde{Q})$ 的短根元素,$\tilde{\varphi}(A_m)$ 就是由这种形式的短根元素的全体生成的子群.

先设 $m=2t$ 是偶数:此时

$$w_0=e_1+\cdots+e_m\in V_{m-1}=V_{2t-1},\ \text{且}\ \langle w_0\rangle=\mathrm{Rad}V_{2t-1}.$$

由 S_{2k} 定驻 w_0 知,φ_1 诱导出 S_m 在商空间 $V_{2t-2}=V_{2t-1}/\langle w_0\rangle$ 上的忠实表示 φ,且 f_1 在 V_{2t-2} 上诱导出一个退化内积 f. φ 将 S_{2t} 嵌入 $\mathrm{Sp}(V_{2t-2}, f)=\mathrm{Sp}(2t-2, 2)$.

如果 $t=2k+1$ 是奇数,$m=4k+2$:则当 $m=6$ 时,得到同构 $S_6\cong \mathrm{Sp}(4, 2)$. 而 $m=4k+2\geq 10$ 时,S_{4k+2} 是 $\mathrm{Sp}(4k, 2)$ 的极大子群.

当 $t=2k$ 是偶数时,w_0 是奇异向量,非正则的二次型 Q_1 在商空间 $V_{4k-2}=V_{4k-1}/\langle w_0\rangle$ 上诱导出正则的二次型 Q, φ 将 S_{4k} 嵌入

$O(V_{4k-2}, Q)$，从而将 A_{4k} 嵌入 $\Omega(V_{4k-2}, Q)$. 当 $m = 4k = 8$ 时，得到同构 $A_8 \cong \Omega^+(6, 2)$，而当 $m = 4k \geq 12$ 时，A_{4k} 是 $\Omega(V_{4k-2}, Q)$ 的极大子群.

再考虑 $m = 2t + 1$ 是奇数的情形：此时 $V_{m-1} = V_{2t}$ 是 V_{2t+1} 的非退化子空间，内积 f_1 非退化，φ_1 将 S_{2t+1} 嵌入

$$O(V_{2t}, Q_1) < \mathrm{Sp}(V_{2t}, f_1) = \mathrm{Sp}(2t, 2),$$

且将 A_{2t+1} 嵌入 $\Omega(V_{2t}, Q_1)$.

如果 $t = 2k$ 是偶数，$m = 4k + 1$：则当 $m = 5$ 时，得到同构 $A_5 \cong \Omega^-(4, 2)$. 当 $m = 4k + 1 \geq 9$ 时，A_{4k+1} 是 $\Omega(V_{4k}, Q_1)$ 的极大子群.

再设 $t = 2k - 1$ 是奇数，$m = 4k - 1$：将 m 元集合 $\mathscr{E} = \{e_1, \cdots, e_m\}$ 扩充为 $m + 1$ 元集合 $\mathscr{E}_1 = \{e_1, \cdots, e_m, e_{m+1}\}$，取 $\mathscr{E}_1$ 在 F_2 上张成的空间 $W_{m+1} = V(4k, 2)$，将 V_m 自然地看作 W_{m+1} 的子空间，V_m 上的辛内积 $\tilde{f}$ 和二次型 $\tilde{Q}$ 可扩充为 W_{m+1} 上的辛内积 $\tilde{f}_0$ 和二次型 $\tilde{Q}_0$，使 $\tilde{Q}_0(e_{m+1}) = \tilde{Q}_0(e_i)$ 及 $\tilde{f}_0(e_i, e_{m+1}) = 1$ 对所有的 $1 \leq i \leq m$ 成立. 将 $\mathscr{E}$ 上的对称群 S_m 看作 $\mathscr{E}_1$ 上的对称群 S_{m+1} 的子群（即 e_{m+1} 的稳定子群），$\mathrm{Sp}(V_m, \tilde{f})$ 看作 $\mathrm{Sp}(W_{m+1}, \tilde{f}_0)$ 的子群. 取

$$W_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m+1} a_i e_i \,\middle|\, \sum_i a_i = 0 \right\},$$

$$W_{m-1} = W_m / \langle e_1 + \cdots + e_{m+1} \rangle,$$

并记 $\tilde{Q}_0$ 在 W_{4k-2} 上诱导出的二次型为 Q_0，则 $V_{m-1} = W_m \cap V_m$ 是 W_m 的子空间，且 $V_{m-1} \cap \langle e_1 + \cdots + e_{m+1} \rangle = 0$，故 W_m 到商空间 W_{m-1} 的自然同态导出子空间 V_{m-1} 到 W_{m-1} 上的同构. 在这个同构的意义下可以将 V_{m-1} 与 W_{m-1} 等同起来，从而将 $O(V_{m-1}, Q_1)$ 与 $O(W_{m-1}, Q_0)$ 等同起来. 于是嵌入在 $O(V_{m-1}, Q_1)$ 中的 $S_m = S_{\mathscr{E}}$ 可以看作嵌入在 $O(W_{m-1}, Q_0)$ 的 $S_{4k} = S_{\mathscr{E}_1}$ 的真子群. 我们知道，S_{m+1} 可以由 S_m 添加对换 $(m, m+1)$ 而得到. 注意到 $e_m + e_{m+1} \in$

W_{m-1}等同于V_{m-1}中的$e_1+\cdots+e_{m-1}$，故$S_m \leq O(V_{m-1}, Q_1)$添加正交平延$\rho_{e_1+\cdots+e_{m-1}, 1} \in O(V_{m-1}, Q_1)$而得到的真扩群就相当于$S_{m+1} \leq O(W_{m-1}, Q_0)$. 这说明：当$m=4k-1$时有$S_m < S_{m+1} \leq O(V_{m-1}, Q_1)$，从而$A_m < A_{m+1} \leq \Omega(V_{m-1}, Q_1)$. 当$m=7$时，$A_8 = \Omega^+(6, 2)$，$A_7$是$A_8$的极大子群从而是$\Omega^+(6, 2)$的极大子群. 而当$m=4k-1 \geq 11$时，$A_{m+1}$是$A_m$在$\Omega(V_{m-1}, Q_1)$中的非平凡扩群，$A_m$不是$\Omega(V_{m-1}, Q_1)$极大子群.

2. 对称群和交错群在F_3上的正交群中的嵌入

设V_m是三元域F_3上m维向量空间，$\mathscr{E}=\{e_1, \cdots, e_m\}$是它的一组基，并在$V_m$上定义了二次型$\tilde{Q}$及相伴的对称双线性型$\tilde{f}$，使所有的$\tilde{Q}(e_i)=1$，且$\tilde{f}(e_i, e_j)=0\ (i \neq j)$，则作用在基向量集合$\mathscr{E}$上的对称群$S_m$被嵌入正交群$O(V_m, \tilde{Q})$，而$A_m$被嵌入$\Omega(V_m, \tilde{Q})$. $V_{m-1}=\left\{\sum_{i=1}^m a_ie_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^m a_i=0\right\}$是$S_m$的不变子空间. 于是又得到$S_m$在$O(V_{m-1}, Q_1)$中的嵌入，其中$Q_1$是$\tilde{Q}$在$V_{m-1}$上的限制. 而$A_m$被嵌入$\Omega(V_{m-1}, Q_1)$. 注意，$S_m$可由对换生成，而每个对换$(ij)$就是$O(V_m, \tilde{Q})$中的对称$S_{e_i-e_j}$. 交错群$A_m$可由三轮换生成，而每个三轮换$(ijs)=(ij)(is)$ (i, j, s两两不同)在$\Omega(V_{m-1}, Q_1)$中相当于$S_{e_i-e_j}S_{e_i-e_s}=t_{e_i+e_j+e_s, e_i-e_j}$，是$\Omega(V_{m-1}, Q_1)$的一个根元素. 全体基向量的和$w_0=e_1+\cdots+e_m$被$S_m$定驻，从而$\langle w_0\rangle$是$S_m$的一维不变子空间.

如果m是3的倍数，则$w_0 \in V_{m-1}$，且$\langle w_0\rangle=\mathrm{Rad}\, V_m$是奇异线，$Q_1$在商空间$V_{m-2}/\langle w_0\rangle$上诱导出正则二次型$Q$，$S_m$被嵌入$O(V_{m-2}, Q)$，从而$A_m$被嵌入$\Omega(V_{m-2}, Q)$. 当$m=6$时，就得到$A_6 \cong \Omega^-(4, 3)=\mathrm{P}\Omega^-(4, 3)$. 当$m=3k \geq 9$时，$A_m$是$\Omega(V_{m-2}, Q)$的极大子群.

设m不是3的倍数，则V_{m-1}本身就是非退化空间，Q_1是正则二次型(相伴于非退化内积)，$A_m \to \Omega(V_{m-1}, Q)$是所需的嵌入. 特别当$m=4$时，得到$A_4 \cong \Omega(3, 3)$. 当$m=3k+1 \geq 7$时，$A_m$

是 $\Omega(V_{m-1}, Q_1)$的极大子群. 当 $m = 3k - 1 \equiv 2 \pmod 3$ 时,将 $\mathscr{E}$ 扩充为 $\mathscr{E}_1 = \{e_1, \cdots, e_m, e_{m+1}\}$, V_m 扩充为 $W_{m+1} = V_m \perp \langle e_{m+1} \rangle$, 使 $\tilde{Q}(e_{m+1}) = \tilde{Q}(e_i)$ $(\forall 1 \leq i \leq m)$. 取

$$W_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m+1} a_i e_i \,\middle|\, \sum_i a_i = 0 \right\},$$

$$w_1 = e_1 + \cdots + e_{m+1},$$

则 $\langle w_1 \rangle = \mathrm{Rad}\, W_m$, $\mathscr{E}_1$ 上的 S_{m+1}被嵌入 $W_{m-1} = W_m / \langle w_1 \rangle$ 上的正交群 $O(W_{m-1})$. 由 $V_{m-1} \cap \langle w_1 \rangle = 0$ 可将 V_{m-1}与商空间 W_{m-1}等同起来. 于是

$$S_m < S_{m+1} \leq O(V_{m-1}, Q),$$

$$A_m < A_{m+1} \leq \Omega(V_{m-1}, Q).$$

当 $m = 5$ 时, A_5 是 $A_6 = \Omega(V_4, Q) = \Omega^-(4, 3)$ 的极大子群. 当 $m = 3k - 1 \geq 8$ 时, A_{m+1}是 A_m 在 $\Omega(V_{m-1}, Q)$中的非平凡扩群, A_m 在 $\Omega(V_{m-1}, Q)$中不是极大子群.

§ 2.4 加群的自同态环

我们希望将 M. Aschbacher 关于有限典型群的极大子群的定理推广到任意体 F 上的典型群 G,对 G 的极大子群 M 的可能的类型尽可能做出刻画. 为此,我们将 G 作用的空间 V 看作 M 上的模, G 的元素和 F 的元素的作用都引起 V 的加群的自同态. 本节先考察由 V 的加群自同态组成的环在 V 上的作用.

设 V 是任意加法群,即整数环 Z 上的模. V 的加群的每一个自同态称为 V 上的一个算子. V 上的全体算子(即加群自同态)组成一个环 $\mathscr{R} = \mathrm{End}_Z(V)$, V 是这个环上的模. 环 $\mathscr{R}$ 中乘法的定义依赖于是把 V 看成右 $\mathscr{R}$-模还是左 $\mathscr{R}$-模. 如果把 V 看成右 $\mathscr{R}$-模, 则算子 α、$\beta \in \mathscr{R}$ 的积 $\alpha\beta \in \mathscr{R}$ 由 $v(\alpha\beta) = (v\alpha)\beta$ $(\forall v \in V)$ 定义, 即 $\alpha\beta$ 是先作用 α,后作用 β 的合成结果. 但如果把 V 看成左 $\mathscr{R}$-

模，则 $\alpha\beta$ 由 $(\alpha\beta)v=\alpha(\beta v)$ 定义，是先施行 β，后施行 α 的合成结果. 在这两种情形下的 $\mathscr{R}$ 虽然是同一个集合，加法的定义也是相同的，但乘法的定义却不同(顺序恰好相反)，因此是两个相互不同的环，恒等映射 $a\mapsto a$ 是这两个环之间的反同构.

一般地，对任意环 R，我们可在 R 的加群上重新定义乘法 $a*b=ba$，得到另一个环 R^{op}，称为 R 的对偶环. 集合 R 的恒等映射 τ 是两个环之间的反同构(在 R 是交换环的特殊情形，R^{op} 与 R 是同一个环). 按照这样的说法，将加群 V 分别看作 $\mathscr{R}=\mathrm{End}_Z V$ 上的右模或看作左 $\mathscr{R}$-模的两种情形下的 $\mathscr{R}$ 的两种环结构是相互对偶的环. 一般来说，如果两个环 R 和 R' 之间存在反同构 $\tau:R\to R'$，则每个右 R-模 V 可通过定义 $\tau(a)v=va$ $(\forall a\in R,\ v\in V)$ 成为左 R'-模，而每个左 R-模也可类似地定义成右 R'-模. 特别，当 R' 是 R 的对偶环时是如此.

本书中通常认为加群 V 是 $\mathscr{R}=\mathrm{End}_Z V$ 上的右模. 也就是说，每个算子 $\alpha\in\mathscr{R}$ 在 V 上的作用都写成右乘的形式，每个 $v\in V$ 在 α 下的象记作 $v\alpha$. 如果 V 是某个环 S 上的忠实右模，则认为 S 是 $\mathscr{R}$ 的子环. 如果 V 是某个环 S 上的忠实左模，由于 S 与 $\mathscr{R}$ 的乘法定义的顺序不一致，不能直接说 S 是 $\mathscr{R}$ 的子环，但可以认为每个 $s\in S$ 在 V 上的左乘作用 $s_L:v\mapsto sv$ 是 $\mathscr{R}$ 的元素，记 $vs_L=sv$. 也就是说，把 $s\in S$ 在 V 上的左乘作用认为是算子 s_L 的右乘作用. $s_L(s\in S)$ 的全体组成 $\mathscr{R}$ 的子环 S_L. 对任意 s、$t\in S$ 和 $v\in V$，有：

$$v(s_L+t_L)=(s+t)v=v(s+t)_L,$$

$$v(s_Lt_L)=tsv=v(ts)_L.$$

可见，映射 $s\mapsto s_L$ 定义了环 S 到 S_L 的反同构. 忠实左 S-模 V 成了忠实右 S_L-模(在 S 是交换环的情形下，S 到 S_L 的反同构 $s\mapsto s_L$ 也是同构，此时可以认为 $S=S_L$，直接将 S 看作 $\mathscr{R}$ 的子环). 将 S 通过反同构映射 $S\to S_L\subseteq\mathscr{R}$ 嵌入 $\mathscr{R}$ 之后，V 作为左 S-模的自同态环 $\mathrm{End}_S V$ 也就是 S_L 在 $\mathscr{R}=\mathrm{End}_Z V$ 中的中心化子. 当 V 是忠实右

S-模时，为了强调 S 在 V 上的右乘作用，也可将每个 $s \in S$ 在 V 上的作用 $v \mapsto vs$ 记为 s_R，并把 $S_R = \{s_R | s \in S\}$ 看作 $\mathscr{R}$ 的子环. 但 $s \mapsto s_R$ 是环 S 到 S_R 的同构，$vs_R = vs$ 对所有的 $v \in V$、$s \in S$ 成立. 因此，我们总可认为 $s_R = s$, $S_R = S$.

设加法群 V 可以分解为有限个子群 $V_i(1 \leq i \leq n)$ 的直和 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$，则每个元素 $v \in V$ 可以唯一地写成 $v = v_1 + \cdots + v_n$ 的形式，其中每个 $v_i \in V_i(1 \leq i \leq n)$. 我们把 $v = v_1 + \cdots + v_n$ 写成 n 维行向量 $(v_1, \cdots, v_n)$ 形式. 对每个 $1 \leq i \leq n$，定义投影映射

$$\mathrm{pr}_i: V \to V_i, \ (v_1, \cdots, v_n) \mapsto v_i,$$

则每个 $g \in \mathscr{R} = \mathrm{End}_Z V$ 可写成 $g = g_1 + \cdots + g_n$，其中每个 $g_j = g\mathrm{pr}_j(1 \leq j \leq n)$ 是 V 到 V_j 的加群同态. 对任意 $1 \leq i, j \leq n$，记 $g_{ij}: V_i \to V_j$ 为 g_j 在 V_i 上的限制，则 g_{ij} 也是加群同态. 并且 $vg = \sum_{1 \leq i, j \leq n} v_i g_{ij}$ 对所有的 $v = (v_1, \cdots, v_n) \in V$ 成立，或写成矩阵形式：

$$(v_1, \cdots, v_n)g = (v_1, \cdots, v_n)\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix},$$

也就是说，g 可以用矩阵 $A = (g_{ij})_{n \times n}$ 的右乘作用来实现，矩阵中的元素 $g_{ij} \in \mathrm{Hom}_Z(V_i, V_j)$ 是 V_i 到 V_j 的加群同态. 我们将这样的矩阵 $(g_{ij})_{n \times n}$ 称为**算子矩阵**. 每个 $g \in \mathscr{R}$ 在 V 上的作用可以由相应的算子矩阵的右乘来实现. 于是 $\mathscr{R} = \mathrm{End}_Z V$ 可以等同于所有这样的算子矩阵组成的环.

以下我们设 F 是任意体，V 是 F 上 n 维左向量空间，$R = \mathrm{End}_F(V)$ 是 V 作为左 F-空间的自同态环，即 V 上全体 F-线性变换组成的环.

任取 V 的一组左 F-基 $\mathscr{E} = \{e_i | 1 \leq i \leq n\}$，则 $V = Fe_1 \oplus \cdots \oplus Fe_n$. 每个基向量 e_i 张成的一维子空间 Fe_i 可在加群同构 $Fe_i \to$

F, $ae_i \mapsto a$ 下等同于 F,于是 $V = F^n = F \oplus \cdots \oplus F$ 是将 F 重复 n 次的直和,$\mathrm{Hom}_Z(Fe_i, Fe_j) = \mathrm{End}_Z F$. 将每个 $v \in V$ 在基 $\mathscr{E}$ 下写成行向量 $v \in \mathrm{Mat}_{1\times n}F$, 则 $\mathscr{R} = \mathrm{End}_Z V$ 可等同于算子环 $\mathscr{R}_1 = \mathrm{End}_Z F$ 上的 n 级全方阵环 $\mathrm{Mat}_n(\mathscr{R}_1)$, V 的每个加群自同态(即 $\mathscr{R}$ 中的元素)可由相应的算子矩阵 $g = (a_{ij})_{n\times n}(a_{ij} \in \mathscr{R}_1)$ 的右乘作用来实现.

$\mathrm{End}_Z F$ 的如下两类算子具有特别的重要性:每个 $a \in F$ 在 F 上引起一个左乘算子 $a_L:\theta \mapsto a\theta$ 和一个右乘算子 $a_R:\theta \mapsto \theta a$,它们都是 $\mathscr{R}_1 = \mathrm{End}_Z F$ 的元素. $F_L = \{a_L | a \in F\}$ 和 $F_R = \{a_R | a \in F\}$ 都是 $\mathscr{R}_1$ 的子体.

对每个 $a \in F$, a_R 将每个 $\theta \in F$ 送到 $\theta a_R = \theta a$,因此可以将算子 $a_R \in F_R$ 与元素 $a \in F$ 等同起来,从而将 F_R 与 F 等同起来. 进而将 $\mathrm{Mat}_n(F_R)$ 与 $\mathrm{Mat}_n F$ 等同起来,它们在 n 维左 F-空间 $V = \mathrm{Mat}_{1\times n}F$ 上的右乘作用就是 $\mathrm{End}_F V$.

再来看 F_L,由于 V 是左 F-空间,每个 $a \in F$ 在 V 上的左乘作用引起 V 的一个加群自同态:

$$(\theta_1, \cdots, \theta_n) \mapsto (a\theta_1, \cdots, a\theta_n) = (\theta_1, \cdots, \theta_n)\mathrm{diag}(a_L, \cdots, a_L).$$

这个自同态可以由算子矩阵 $a_L I^{(n)} = \mathrm{diag}(a_L, \cdots, a_L)$ 在 V 上的右乘作用来实现,算子矩阵 $a_L I^{(n)}$ 可以看作是 $a_L \in F_L$ 所对应的"纯量阵". 这样的"纯量阵"$a_L I^{(n)}$的全体组成了 $\mathscr{R} = \mathrm{End}_Z V$ 的一个子体 $F_L I^{(n)}$,我们可以将"纯量"a_L 与"纯量阵"$a_L I^{(n)}$等同起来,从而将 F_L 与 $F_L I^{(n)}$等同起来,而直接认为 $F_L \subset \mathscr{R}$(但应该将每个 $a_L \in F_L$ 理解为 $a_L I^{(n)}$). F_L 在 $\mathscr{R} = \mathrm{Mat}_n(\mathscr{R}_1)$ 中的中心化子也就是 F-线性变换环 $\mathrm{End}_F V = \mathrm{Mat}_n(F_R)$. 特别,当 $n = 1$ 时,F_L 在 $\mathscr{R}_1 = \mathrm{End}_Z F$ 中的中心化子等于 F_R. 同样,F_R 在 $\mathscr{R}_1$ 中的中心化子等于 F_L, $F_R I^{(n)}$ 在 $\mathrm{End}_Z V = \mathrm{Mat}_n(\mathscr{R}_1)$ 中的中心化子等于 $\mathrm{Mat}_n(F_L)$.

如果 E 是 F 的子体,将 F 看成 E 上的左向量空间,则 $F_R \subset \mathrm{End}_E F$. 如果 $\dim_E F = d < \infty$, 在 F 的一组左 E-基 $\mathscr{Z}$ 下可将

$\mathrm{End}_E F$ 写成全方阵环 $\mathrm{Mat}_d E$,从而 $F = F_R$ 被嵌入 $\mathrm{Mat}_d E$. 即 F 中每个元素 a 被写成 E 上的 d 阶方阵(其实是 a_R 在基 $\mathscr{Z}$ 下的方阵),而 $\mathrm{Mat}_n F$ 被嵌入

$$\mathrm{Mat}_n(\mathrm{Mat}_d E) = \mathrm{Mat}_{nd} E.$$

在本书中,对 V 的左 F-基 $\mathscr{E} = \{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ 和 F 的左 E-基 $\mathscr{Z} = \{\zeta_j \mid 1 \leq j \leq d\}$, 记

$$\mathscr{Z}\mathscr{E} = \{\zeta_j e_i \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq d\},$$

其中 $\zeta_j e_i$ 的排列顺序是先考虑 i 后考虑 j 的字典式排列,即:当 $i < i'$, 或当 $i = i'$ 且 $j < j'$ 时,$\zeta_j e_i$ 排在 $\zeta_{j'} e_{i'}$ 的前面. 则 $\mathscr{Z}\mathscr{E}$ 是 V 的左 E-基,$\mathrm{End}_F V$ 在这组基之下具有矩阵形式 $\mathrm{Mat}_n F \subseteq \mathrm{Mat}_{nd} E$, 其中 $F = F_R$ 在基 $\mathscr{Z}$ 下按前述方式嵌入 $\mathrm{Mat}_d E$. F_L 的元素一般并不是 F 作为左 E-空间的线性变换,不能写成 E 上的 d 阶方阵,但作为 $\mathscr{R}_1 = \mathrm{End}_Z F$ 中的元素则可写成算子环 $\mathrm{End}_Z E$ 上的 d 阶方阵. 由 F_L 中心化 E_R 可知 F_L 含于 $E_R I^{(d)}$ 在 $\mathrm{Mat}_d(\mathrm{End}_Z E)$ 中的中心化子 $\mathrm{Mat}_d(E_L)$. 于是 $\mathrm{Mat}_n(F_L)$ 被嵌入 $\mathrm{Mat}_{nd}(E_L)$. 如果 F 在自身的中心 $Z(F)$ 上的维数有限,可以取 $E \subseteq Z(F)$, 此时 $E_L = E_R = E$, F_L 和 F_R 都可嵌入 $\mathrm{Mat}_d E$,且在 $\mathrm{Mat}_d E$ 中互为中心化子,而 $\mathrm{Mat}_n(F_L)$、$\mathrm{Mat}_n(F_R)$ 都被嵌入 $\mathrm{Mat}_{nd} E$.

§ 2.5 线性变换环上的模

设 V 是体 F 上 n 维左向量空间, $R = \mathrm{End}_F(V)$ 是 V 上全体 F-线性变换组成的环,我们把 V 看成右 R-模,从而是左 F 右 R 双模. 按照前一节所述,将 F 在 V 上的左乘作用组成的体 F_L 看成环 $\mathscr{R} = \mathrm{End}_Z V$ 的子体,则 R 就是 F_L 在 $\mathscr{R}$ 中的中心化子. 我们将 F_L 中的元素称为 V 上的"纯量",R 中所含的"纯量"组成的集合 $F_L \cap R = Z(F)1_V$ 就是 R 的中心,它由 F 的中心 $Z(F)$ 在 V 上所引起的中心纯量变换的全体组成. 在不会引起歧义的情况下,我们

也将 $Z(F)1_V$ 简记为 $Z(F)$，将 $Z(F)^*1_V$ 简记为 $Z(F)^*$.

对 $\mathscr{R}=\mathrm{End}_Z V$ 的任一子集 S，我们将 F_L 与 S 在 $\mathscr{R}$ 中生成的子环记作 FS，V 可以看作 FS-模. 如果 V 是单 FS-模(也称不可约 FS-模)，就称 S 在 V 上不可约，否则，称 S 在 V 上可约.

如果 S 是 $R=\mathrm{End}_F(V)$ 的子环，则 V 也可以看作左 F 右 S 双模. V 的 F-S-双子模就是 V 中在 S 的作用下不变的子空间，也就是 V 作为 FS-模的子模. 对 R 的任一子集(不一定是子环)M，我们也说 V 是右 M-模，从而是 F-M-双模，并将 V 中在 M 作用下不变的子空间称为 F-M-子模. 实际上，V 的 F-M-双模结构也就是 V 作为环 FM 上的模的结构.

我们所重视的，主要是 M 是 $\mathrm{GL}(V)$ 的子群的情况，按这个观点将 V 看成群 M 上的模并考察它的 F-S-双模结构，也就是 FM-模结构.

对 $\mathrm{GL}(V)$ 的子群 M，如果存在直和分解

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_m,\ m\geq 2,$$

使 M 诱导出直因子集合 $\Omega=\{V_i\mid 1\leq i\leq m\}$ 上的置换群，就称 M 在 V 上的作用非本原，反之就称 M 的作用本原.

我们总是认为体 F 上的全方阵环 Mat_nF 通过右乘作用于行向量空间 $V=\mathrm{Mat}_{1\times n}F$，将每个矩阵 $A\in\mathrm{Mat}_nF$ 与它在 $\mathrm{Mat}_{1\times n}F$ 上的右乘作用 $A_R:x\mapsto xA$ 等同起来，从而将全方阵环 Mat_nF 与全线性变换环 $R=\mathrm{End}_FV$ 等同起来. 因此，我们可以对 Mat_nF 的子环或 $\mathrm{GL}(n,F)$ 的子群讨论可约性、本原性等. 比如说，矩阵环或矩阵群不可约即是指它在 $\mathrm{Mat}_{1\times n}F$ 上的右乘作用不可约.

当 $M\leq\mathrm{GU}(n,F,h,L)\leq\mathrm{GU}(n,F,f)$ 时，对于群 M 上的模 $V=V(n,F)$ 上的单子模，有如下引理：

引理 2.5.1 若 $M\leq\mathrm{GU}(n,F,h,L)\leq\mathrm{GU}(n,F,f)$，$W$ 是 V 的单 FM-子模，则下列结论之一成立：

(i) W 是非退化子空间；

(ii) W 是全奇异子空间；

(iii) $\mathrm{char}F=2$，W 是定号的全迷向子空间，特别当 $M\leq$ $\mathrm{U}(n, F, h, L)$ 时，W 是非奇异的迷向线.

证明　M 在定驻 W 的同时定驻 $U=W\cap W^{\perp}$，U 是 W 的 FM-子模，由 W 是单模知 $U=0$ 或 W. 当 $U=0$ 时 W 非退化，(i) 成立. 设 $U=W$，即 W 全迷向，W 中所有的奇异向量(连同零向量)组成一个全奇异子空间 U_0，U_0 是 M 的不变子空间，即 W 的 FM-子模. 于是又有 $U_0=W$ 或 $U_0=0$. $U_0=W$ 时 W 全奇异，(ii) 成立. $U_0=0\neq W$ 只有在 $\mathrm{char}F=2$ 时才有可能. 此时 W 是定号的全迷向子空间. 如果 $M\leq\mathrm{U}(n, F, h, L)$，任取 $0\neq x\in W$，则 x 迷向而非奇异，且对任意 $g\in M$ 有

$$Q(xg+x)\equiv Q(xg)+Q(x)\equiv 0(\mathrm{mod}\ L),$$

即 $Q(xg+x)\in L$，从而 $xg+x\in U_0=0$，$xg=x$. 这说明 x 被 M 定驻，从而 $\langle x\rangle$ 是 FM-子模. 由 W 是单模知 $W=\langle x\rangle$，是非奇异的迷向线. (iii) 成立. ▌

如果 M 不可约，但正规化 $\mathrm{End}_F V$ 的某个非纯量可约子集 S ("非纯量"是指 $S\nsubseteq Z(F)1_V$)，则单 FM-模 V 作为 FS-模有以下分解：

引理 2.5.2(Clifford 定理)　设 $M\in\mathrm{GL}(V)$ 在 V 上不可约，但正规化 $\mathrm{End}_F V$ 的某个非纯量可约子集 S，则下面的结论成立：

(1) V 有唯一的分解 $V=\bigoplus_{i=1}^{m}V_i$，其中每个 V_i 是相互同构的单 FS-子模的直和，而当 $i\neq j$ 时，V_i 的任一单 FS-子模与 V_j 的任一单 FS-子模必然不同构. 每个 V_i 称为 FS-模 V 的一个齐次分量，它的所有的单 FS-子模相互同构. 当 $m=1$ 时，称 V 是齐次 FS-模，否则，称 V 为非齐次 FS-模.

(2) 从每个齐次分量 $V_i(1\leq i\leq m)$ 中取一个单 FS-子模 W_i，则 V 的任一单 FS-子模 W 必同构于唯一的一个 W_i 并且含于 W_i 所属的齐次分量 V_i.

(3) M 将齐次分量 $V_i(1\leq i\leq m)$ 互变，诱导出集合 $\Sigma=\{V_i\mid 1\leq i\leq m\}$ 上的传递置换群. 于是各齐次分量的维数相等，且

当 $M \leq \mathrm{GU}(n, F, h, L)$ 时,相互度量相似,当 $M \leq \mathrm{U}(n, F, h, L)$ 时,相互度量同构.

引理 2.5.3 M、S 仍如引理 2.5.2 所述,且 $M \leq \mathrm{GU}(n, F, h, L)$. 设 $V_i (1 \leq i \leq m)$ 是 FS-模 V 的全体齐次分量. 则下列结论之一成立:

(i) $V_i (1 \leq i \leq m)$ 是两两正交的非退化子空间;

(ii) m 是偶数, $V_i (1 \leq i \leq m)$ 是全奇异子空间,或是定号的全迷向子空间. 适当调整 $V_i (1 \leq i \leq m)$ 的编号,可使 $W_i = V_{2i-1} \oplus V_{2i} (1 \leq i \leq m/2)$ 非退化,而 W_i 两两正交. M 诱导出集合 $\{W_i \mid 1 \leq i \leq m/2\}$ 上的传递置换群.

证明 由 M 在集合 $\Omega = \{V_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ 上传递知,每个 V_i 可写成 $V_i = V_1 g_i$, $g_i \in M$, 且可取 $g_1 = 1$. 设 M_1 是 V_1 在 M 中的稳定子群,则 V_1 是 FM_1-模, $M = \bigcup_{i=1}^m M_1 g_i$ 是 M 的右陪集分解. 设 U_1 是 V_1 的单 FM_1-子模,取 $U = \bigoplus_{i=1}^m U_1 g_i$, 则

$$U = \bigoplus_{i=1}^m U_1 M_1 g_i = \sum_{g \in M} U_1 g,$$

这说明 U 是 V 的 FM-子模. 由 M 在 V 上不可约知,必有 $U = V$, 从而

$$\dim U_1 = \frac{1}{m} \dim U = \frac{1}{m} \dim V = \dim_F V_1,$$

$$U_1 = V_1.$$

这证明了 V_1 是单 FM_1-模. 于是可由引理 2.5.1 得 V_1 非退化或全迷向.

先设 V_1 非退化,从而所有的 $V_i (1 \leq i \leq m)$ 非退化. S 定驻 V_1,从而定驻 $V_1^\perp$, $V_1^\perp$ 是 FS-子模. $V_1^\perp$ 的任一单 FS-子模 W 也是 V 的单 FS-子模,含于某个 V_i. 且 W 不能含于 V_1,否则, $0 \neq W \subseteq V_1^\perp \cap V_1 = 0$, 产生矛盾. 故 $V_1^\perp$ 的每个单 FS-子模 W 含于某个 V_i, $i \geq 2$, 从而 W 含于 $\hat{V}_1 = \bigoplus_{i=2}^m V_i$. 这说明 $V_1^\perp$ 含于从而等于 $\hat{V}_1$. 对任意 $1 \leq j \leq m$, 有

$$V_j^{\perp} = V_1^{\perp} g_j = \hat{V}_1 g_j = \hat{V}_j = \bigoplus_{1 \leq i \leq m,\ i \neq j} V_i.$$

由此可知齐次分量 $V_i(1 \leq i \leq m)$ 两两正交,(i)成立.

再设 V_1 全迷向,并且全奇异或定号,所有的 $V_i(1 \leq i \leq m)$ 也是如此. 由此还可知道 V 的所有的单 FS-子模全迷向. $V_1^{\perp}$ 是 FS-子模,有 V 的 FS-子模 U_2,使 $V = V_1^{\perp} \oplus U_2$, $W_1 = V_1 \oplus U_2$ 非退化. 齐次分量 $V_1 = \bigoplus_{i=1}^{k} X_i$, $X_i(1 \leq i \leq k)$ 是相互同构的单 FS-子模. 对每个 $1 \leq i \leq k$,记

$$Y_i = (\bigoplus_{1 \leq j \leq k,\ j \neq i} X_j)^{\perp} \cap U_2 ,$$

则 Y_i 是 FS-子模, $U_2 = \bigoplus_{i=1}^{k} Y_i$, 且由 $\dim_F Y_i = \dim_F X_i$ 知 Y_i 是单 FS-子模. 由于 FS-模 $X_i(1 \leq i \leq k)$ 相互同构,可适当选取每个 X_i 的 F-基 $\{e_{ij} | 1 \leq j \leq r\}$, 使每个 $g \in S$ 在 V_1 上的作用在基 $\{e_{ij} | 1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq r\}$ 下的矩阵具有形式 $\mathrm{diag}(P, \cdots, P)$, $P \in \mathrm{GL}(r, F)$. 对每个 $1 \leq i \leq k$, 由 $X_i \perp X_l(\forall l \neq i)$ 及 $V_1 \oplus U_2$ 非退化知 $X_i \oplus Y_i$ 非退化,于是可选 Y_i 的 F-基 $\{e_{i+k,\,j} | 1 \leq j \leq r\}$ 使 $f(e_{ij}, e_{i+k,\,j}) = 1$ 且 $f(e_{ij}, e_{i+k,\,l}) = 0(\forall l \neq j)$. $\{e_{ij} | 1 \leq i \leq 2k,\ 1 \leq j \leq r\}$ 是 $W_1 = V_1 \oplus U_2$ 的 F-基,每一 $g \in S$ 在 W_1 上的作用在这组基下的矩阵具有形式:

$$\mathrm{diag}(P, \cdots, P, \lambda \overline{P}'^{-1}, \cdots, \lambda \overline{P}'^{-1}),$$

$$P \in \mathrm{GL}(r, F),\ \lambda \in Z(F)^* \text{ 且 } \bar{\lambda} = \lambda.$$

由此可见 $Y_i(1 \leq i \leq k)$ 也是相互同构的单 FS-子模,它们应当含于同一个 V_t 中,从而 $U_2 \subseteq V_t$. 再由 $\dim_F U_2 = \dim_F V_1 = \dim_F V_t$ 知 $U_2 = V_t$. 当然 $t \neq 1$. 适当调整 V_i 的编号,可设 $U_2 = V_2$. 即 $W_1 = V_1 \oplus V_2$ 非退化. 且由 $W_1^{\perp}$ 是 FS-子模及 $W_1^{\perp} \cap W_1 = 0$ 知, $W_1^{\perp} = \bigoplus_{i=3}^{k} V_i$. 对 k 归纳可知,适当调整 FS-模 V 的齐次分量的顺序,可使所有的 $W_i = V_{2i-1} \oplus V_{2i}(1 \leq i \leq m/2)$ 非退化且相互正交. 每一对不正交的 $\{V_{2i-1}, V_{2i}\}$ 被每个 $g \in M$ 变到另一对不正交的 $\{V_{i_1}, V_{i_2}\} = \{V_{2i'-1}, V_{2i'}\}$, 于是 $W_i = V_{2i-1} \oplus V_{2i}$ 被变到 $W_{i'} =$

$V_{2i'-1} \oplus V_{2i'}$. 这证明了 M 诱导出集合 $\Omega_1 = \{W_i \mid 1 \le i \le m/2\}$ 上的置换群，且由 M 在 $\Omega = \{V_i \mid 1 \le i \le m\}$ 上传递知，它在 Ω 上传递. (ii)成立. ▌

下面的引理 2.5.4 是模论中熟知的.

引理 2.5.4 设 V 是加群(看作整数环 Z 上的模)，S 是 $\mathrm{End}_Z V$ 的子环. 如果 V 是不可约右 S-模，则

(1) (Schur 引理) $K = \mathrm{End}_S V$ 是体；

(2) (Wedderburn 定理)如果 V 是体 $K = \mathrm{End}_S V$ 上有限维左空间，则 $S = \mathrm{End}_K V$.

引理 2.5.5 设 V 是有限维左 F-空间，S 是 $\mathrm{End}_F V$ 的子环，且在 V 上不可约(即 V 是单 FS-模)，则 $E = \mathrm{End}_{FS} V$ 是体. 如果 V 还是不可约右 S-模，则 $K = \mathrm{End}_S V$ 是体且包含 F，$S = \mathrm{End}_K V$.

证明 对 F_L 与 S 在 $\mathrm{End}_Z V$ 中生成的子环 FS 用 Schur 引理可知 $E = \mathrm{End}_{FS} V$ 是体. 当 V 是不可约右 S-模时，Schur 引理已说明 $K = \mathrm{End}_S V$ 是体，并且显然包含 F. 由 $\dim_K V \le \dim_F V < \infty$ 可应用 Wedderburn 定理得 $S = \mathrm{End}_K V$. ▌

引理 2.5.5 也可用矩阵语言重新叙述为如下引理：

引理 2.5.6 设 $R = \mathrm{Mat}_n F$ 是体 F 上全方阵环，S 是 R 的子环. 如果 $V = \mathrm{Mat}_{1\times n} F$ 是不可约 FS-模，则 S 在 R 中的中心化子是体. 如果 V 还是不可约的右 S-模，则存在 $P \in \mathrm{GL}(n, F)$ 将环 S 共轭到 $PSP^{-1} = \mathrm{Mat}_r K$，这里 K 是 $\mathrm{Mat}_d F$ 的子体，并且使 $\mathrm{Mat}_{1\times d} F$ 是一维右 K-空间，$dr = n$.

证明 全方阵环 $R = \mathrm{Mat}_n F$ 在行向量空间 $V = \mathrm{Mat}_{1\times n} F$ 上的右乘作用的全体组成全线性变换环 $\mathrm{End}_F V$. S 在 R 中的中心化子 E 就是 $\mathrm{End}_S V$. 由 Schur 引理可知 E 是体. 当 V 是不可约右 S-模时，由 Wedderburn 定理知 $S = \mathrm{End}_K V$ 是体 $K = \mathrm{End}_S V \supseteq F$ 上的全线性变换环. 将 V 看作左 K-空间. $S = \mathrm{End}_K V$ 可在 V 的任一组左 K-基 $\mathscr{E}$ 下写成 K 上的全方阵环 $\mathrm{Mat}_r K$. $K = K_R$ 可在 K 的任一组左 F-基 $\mathscr{Z}$ 下写成 $\mathrm{Mat}_d F$ 的子体. 则 $S = \mathrm{End}_K V$ 中的线性变换在 V 的左 F-基 $\mathscr{Z}\mathscr{E}$ 下的矩阵的全体组成矩阵环 $S_1 =$

$\mathrm{Mat}_r K \subseteq \mathrm{Mat}_{rd} F$. 设 P 是由 V 的自然基到基 $\mathscr{X}\mathscr{E}$ 的过渡矩阵，则 $PSP^{-1} = S_1$，如所欲证. ▌

§2.6 正规化非纯量可约子群的极大子群

为了定出体 K 上典型群 $G \leq \mathrm{GL}(V)$ 的极大子群 M 的可能的类型，我们先考察一类较简单而重要的情形：M 正规化 $\mathrm{End}_F V$ 的某个非纯量可约子集 $S \not\leq Z(F)1_V$. $Z(F)1_V$ 与 S 生成的环仍是 $\mathrm{End}_F V$ 的可约子集，且仍被 M 正规化，不妨用来代替 S，化为 S 是环且真包含 $Z(F)1_V$ 的情形.

我们有如下结果：

定理 2.6.1 设 V 是体 F 上 n 维左空间，G 是作用于 V 上的典型群，M 是 G 的极大子群，且 M 正规化 $\mathrm{End}_F V$ 的某个非纯量可约子集 S，则下列结论之一成立：

(1) M 可约，此时 M 属于类型 C_1，即 M 是 V 的某个非平凡子空间 W 在 G 中的稳定子群. 且当 $G \leq \mathrm{GU}(n, F, h, L)$ 时，下列情形之一成立：

(i) W 非退化，且与 $W^{\perp}$ 度量不相似，当 $G \leq \mathrm{U}(n, F, h, L)$ 时，W 与 $W^{\perp}$ 度量不同构；

(ii) W 全奇异；

(iii) $\mathrm{char} F = 2$, W 全迷向且定号，当 $G \leq \mathrm{U}(n, F, h, L)$ 时，W 是非奇异的迷向线.

(2) M 不可约，且 V 是非齐次 FS-模. 此时 M 非本原，属于类型 C_2，是 V 的某个直和分解 $V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i$ 的直因子集合 $\Sigma = \{V_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ 的稳定子群，其中 $m \geq 2$. 所有的直因子的维数相等，都等于 n/m. 当 $G \leq \mathrm{GU}(n, F, h, L)$ 时，$V_i (1 \leq i \leq m)$ 相互度量相似，当 $G \leq \mathrm{U}(n, F, h, L)$ 时，$V_i (1 \leq i \leq m)$ 相互度量同构，且下列情形之一成立：

(i) $V_i (1 \leq i \leq m)$ 非退化，且两两正交；

(ii) $m = 2$, $V = V_1 \oplus V_2$, V_1、V_2 是全迷向子空间. 当

$\mathrm{char}F=2$ 且 $G\leq \mathrm{U}(n,F,h,L)$ 时，V_1、V_2 还必须是全奇异子空间.

(3) M 不可约，且 V 是齐次 FS-模. 此时 M 定驻某个张量积结构 $V=W\otimes_K\Pi$，其中 K 是体，Π 是左 K-空间，W 是左 F 右 K 双空间. 进一步，$W=Y\otimes_E U$，Y 是不可约左 F 右 K 双空间，体 $E=\mathrm{End}_{FK}Y$ 与 K 在 $\mathrm{End}_F Y$ 中互为中心化子，U 是左 E-空间. M 是 $G\cap(\mathrm{GL}(U/E)\otimes\mathrm{GL}(\Pi/K))$ 在 G 中的正规化子，属于 C_4、C_5 类或 C_3 类.

我们分三种不同的情况证明定理 2.6.1.

定理 2.6.1(1)的证明　任取 V 的单 FM-子模 W，由 M 可约知 $0\neq W\neq V$，即 W 是 V 的非平凡子空间. 当 $G\leq \mathrm{GU}(n,F,h,L)$ 时，由引理 2.5.1 还可知 W 非退化、或全奇异、或定号且全迷向. M 定驻 W，从而含于定驻子群 G_W. 当然 $G_W\neq G$. 由 M 在 G 中极大，可知 $M=G_W$. 当 W 非退化时，如果 W 与 $W^{\perp}$ 度量相似，且当 $G\leq \mathrm{U}(n,F,h,L)$ 时度量同构，则 $M=G_W\lneq G_{\{W,W^{\perp}\}}\lneq G$，与 M 的极大性相违背. 这就证明了可约的极大子群 M 必如 C_1 所描述. ▌

定理 2.6.1(2)的证明　由引理 2.5.2(Clifford 定理)知有唯一分解 $V=\bigoplus_{i=1}^m V_i$，$\Sigma=\{V_i\mid 1\leq i\leq m\}$ 是 FS-模 V 的齐次分量集合. 且由 V 是非齐次 FS-模知 $m\geq 2$. M 含于从而等于 Σ 在 G 中的稳定子群 G_Σ，且 $\dim_F V_i=n/m$ 对 $1\leq i\leq m$ 成立. 如果 $G\leq \mathrm{GU}(n,F,h,L)$，则由引理 2.5.3 知，所有的 V_i 相互度量相似，且当 $G\leq \mathrm{U}(n,F,h,L)$ 时，相互度量同构. 且引理 2.5.3(i)或(ii)成立. 当引理 2.5.3(i)成立时，V_i 是两两正交的非退化子空间，M 属于 C_2 的情形(i). 当引理 2.5.3(ii)成立，且 $m\geq 4$ 时，M 含于从而等于集合 $\Omega_1=\{W_i\mid 1\leq i\leq m/2\}$ 的稳定子群，其中 $W_i=V_{2i-1}\oplus V_{2i}$ 非退化且相互正交，M 仍属 C_2(i). 设引理 2.5.3 (ii)成立，且 $m=2$，即 $V=V_1\oplus V_2$，V_i 全迷向. 当 $\mathrm{char}F\neq 2$ 时，全迷向也就是全奇异. 设 $\mathrm{char}F=2$. 如果 V_i 不是全奇异子空间，则 V_i 定号且全迷向. 我们证明当 $G\leq \mathrm{U}(n,F,h,L)$ 时这会导致

矛盾. 设 M_1 是 V_1 在 M 中的稳定子群,任取 $\tau \in M\backslash M_1$, 则 $M = M_1 \cup M_1\tau$, M_1 在 $V_i(i = 1, 2)$ 上的限制含于 $\mathrm{U}(V_i, h|_{V_i}, L) = 1_{V_i}$, 故 $M_1 = 1_V$, $M = \{1, \tau\}$ 是二阶群, $\tau^2 = 1$. 任取 $0 \neq v \in V_1$, 则 M 定驻非零向量 $v + v\tau \in V$, 与 M 的不可约性相矛盾. ∎

以下考察定理 2.6.1(3)所述的情况:M 不可约且 V 是齐次 FS-模. 我们先证明一个引理. 由此引理可立即得出定理 2.6.1(3)的结论. 由这个引理还可得到别的有用的结果.

引理 2.6.2 设群 $M \leq \mathrm{GL}(V)$ 在 $V = V(n, F)$ 上不可约, M 正规化 $\mathrm{GL}(V/F)$ 的某个非纯量可约子集 S, 且 V 是齐次 FS-模, 则:

(1) M 定驻 V 的张量积结构 $V = W \otimes_K \Pi$, 其中 W 是 V 的单 FS-子模, $K = \mathrm{End}_{FS}W$ 是体, $\Pi = \mathrm{Hom}_{FS}(W, V)$ 是左 K-空间.

(2) 设 Y 是(1)中的 W 的单 FK-子模, $E = \mathrm{End}_{FK}Y$, $U = \mathrm{Hom}_{FK}(Y, W)$, Λ 是 E 在 $\mathrm{GL}(Y/F)$ 中的正规化子. 则 E 是体且与 K 在 $\mathrm{End}_F Y$ 中互为中心化子, W 具有张量积结构 $W = Y \otimes_E U$, M 的每个元素 g 具有形式:

$$g: (y \otimes u) \otimes \pi \mapsto ((y\sigma) \otimes (uB_\sigma)) \otimes (\pi A_\sigma),$$

其中 $\sigma \in \Lambda$, 且 σ 的共轭作用 $\alpha \mapsto \alpha^\sigma = \sigma^{-1}\alpha\sigma$ 分别引起 K 和 E 的自同构, 而 $A_\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(\Pi/K)$ 与 $B_\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(U/E)$ 满足条件:

$$(\beta u)B_\sigma = \beta^\sigma(uB_\sigma),\ \forall \beta \in E,\ (\alpha\pi)A_\sigma = \alpha^\sigma(\pi A_\sigma),\ \forall \alpha \in K.$$

证明 不妨用 $Z(F)$ 与 S 生成的环代替 S, 化为 S 是环且真包含 $Z(F)$ 的情形. 我们的证明分以下步骤进行:

(2.6.2.1) **适当选取 V 的基:**

齐次 FS-模 V 可分解为相互同构的单 FS-模的直和 $V = \bigoplus_{i=1}^m W_i$, 简记 W_1 为 W. 对每个 $1 \leq i \leq m$, 任意取定一个 FS-模同构 $\pi_i: W \to W_i$. 特别取其中的 $\pi_1 = 1_W$. 注意,

$$\dim_F W_i = \dim_F W = k = n/m$$

对所有的 i 成立. 取 W 的一组 F-基 $\mathscr{W}=\{w_1,\cdots,w_k\}$，则

$$\mathscr{B}=\{w_j\pi_i \mid 1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq k\}$$

是 V 的 F-基.

(2.6.2.2) S 中元素的矩阵形式：

对每个 $h\in S$，设 h 在 W 上的作用在基 $\mathscr{W}$ 下的矩阵为 P，则 h 在 V 的上述基 $\mathscr{B}$ 下的矩阵为 $h=I^{(m)}\otimes P$ (即 $\mathrm{diag}(P,\cdots,P)$，其中 P 重复 m 次). 记 S 在 W 上的限制为 $S_1\leq \mathrm{End}_F W$，并将 S_1 在基 $\mathscr{W}$ 下写成全方阵环 $\mathrm{Mat}_k F$ 的子环，则 $S=I^{(m)}\otimes S_1$.

(2.6.2.3) M 中元素的矩阵形式：

由于 M 正规化 S，每个 $g\in M$ 将每个 $I\otimes P\in S$ 共轭到

$$g^{-1}(I\otimes P)g=I\otimes P^{\tau}\in S，从而\ (I\otimes P)g=g(I\otimes P^{\tau}),$$

其中 $P^{\tau}\in S_1$ 由 g 和 P 决定，$\tau: P\mapsto P^{\tau}$ 是 g 在 S_1 上诱导出的环自同构. 将 $g\in M<\mathrm{GL}(n,F)$ 写成分块形式 $g=(A_{ij})_{m\times m}$，使每个块 $A_{ij}\in \mathrm{Mat}_k F$. 比较等式 $(I\otimes P)g=g(I\otimes P^{\tau})$ 两端对应的块，得 $P\,A_{ij}=A_{ij}P^{\tau}$，$\forall 1\leq i, j\leq m$.

我们证明：矩阵 g 的每一个非零的块 A_{ij} 必然可逆. 在基 $\mathscr{W}$ 下将 W 写成行向量空间 $\mathrm{Mat}_{1\times k}F$，则

$$\mathrm{Ker}\ A_{ij}=\{x\in \mathrm{Mat}_{1\times k}F \mid xA_{ij}=0\}$$

代表 W 的一个 F-子空间

$$X_{ij}=\{x_1w_1+\cdots+x_kw_k \mid (x_1,\cdots,x_k)\in \mathrm{Ker}\ A_{ij}\}.$$

对任意 $P\in S_1$ 有

$$(\mathrm{Ker}\ A_{ij})P\,A_{ij}=(\mathrm{Ker}\ A_{ij})A_{ij}P^{\tau}=0.$$

这说明 $(\mathrm{Ker}\ A_{ij})P\subseteq \mathrm{Ker}\ A_{ij}$，$\mathrm{Ker}\ A_{ij}$ 是在 S_1 的右乘作用下的不变子空间，X_{ij} 是 W 的 FS_1-子模从而是 FS-子模. 且当 $A_{ij}\neq O$ 时，$\mathrm{Ker}A_{ij}\neq \mathrm{Mat}_{1\times k}F$，$X_{ij}\neq W$. 由 W 是单 FS-模知 $X_{ij}=0$，$\mathrm{Ker}\ A_{ij}=0$. 这证明了非零的块 A_{ij} 必然可逆.

可逆矩阵 g 当然含有非零的块 A_{ij}. 任取 g 的一个非零块 A_{il}，并记 $D = A_{il}$，则 $D \in \mathrm{GL}(k, F)$.

对任意 $P \in S_1$，有 $PD = DP^{\tau}$，从而 $D^{-1}PD = P^{\tau}$，D 正规化 S_1.

对 g 的每个块 A_{ij} 有 $PA_{ij} = A_{ij}P^{\tau} = A_{ij}D^{-1}PD$. 记 $\alpha_{ij} = A_{ij}D^{-1}$，则 $A_{ij} = \alpha_{ij}D$，$P\alpha_{ij} = \alpha_{ij}P$. 由 $P \in S_1$ 的任意性知 α_{ij} 中心化 S_1. 记 S_1 在 $\mathrm{Mat}_k F$ 中的中心化子为 K，则 $\alpha_{ij} \in K$. 按几何观点，K 就是单 FS-模 W 的自同态环 $\mathrm{End}_{FS}W$. 由引理 2.5.4(1)(Schur 引理)知 K 是体.

这就得到了 M 中任一元素 g 的矩阵形式为

$$g = (\alpha_{ij}D)_{m\times m}，\text{或写成矩阵的张量积 } g = A \otimes D,$$

其中 $A = (\alpha_{ij})_{m\times m} \in \mathrm{GL}(m, K)$，而 $D \in \Lambda_1$，Λ_1 是 S_1 在 $\mathrm{GL}(d, F)$ 中的正规化子.

(2.6.2.4) V 的张量积结构：

记 $\Pi = \mathrm{Hom}_{FS}(W, V)$，则 $\Pi = K\pi_1 \oplus \cdots \oplus K\pi_m$，其中每个 $K\pi_i = \mathrm{Hom}_{FS}(W, W_i)$ 是一维左 K-空间 ($\forall 1 \le i \le m$). 可见 Π 是 K 上的 m 维左向量空间，$\mathscr{P} = \{\pi_1, \cdots, \pi_m\}$ 是它的一组基. FS-模 V 的每个自同构 σ 通过右乘作用于 Π 上，诱导出 $\mathrm{GL}(\Pi/K)$ 的一个元素 $\eta(\sigma)：\Pi \to \Pi$，$\pi \mapsto \pi\sigma$. $\sigma \mapsto \eta(\sigma)$ 是自同构群 $\mathrm{Aut}_{FS}V$ 到 $\mathrm{GL}(\Pi/K)$ 的同构映射. $\mathrm{GL}(\Pi/K)$ 可在基 $\mathscr{P}$ 下与矩阵群 $\mathrm{GL}(m, K)$ 等同起来.

W 可看作左 F 右 K 双空间，从而可以定义张量积 $\tilde{V} = W \otimes_K \Pi$，它具有左 F-空间结构，使

$$a(w \otimes \pi) = (aw) \otimes \pi \quad (\forall a \in F, w \in W, \pi \in \Pi),$$

在 F 上的维数等于 $mk = n$，存在唯一的 F-线性同构 $\tilde{V} \to V$，使 $w \otimes \pi \mapsto w\pi$，$\forall w \in W$，$\pi \in \Pi$. 在此同构的意义下可以认为 $V = W \otimes_K \Pi$.

(2.6.2.5) M 定驻张量积结构 $V = W \otimes_K \Pi$：

记子空间集合

$$\Omega_1 = \{Fw \otimes \Pi \mid 0 \neq w \in W\},$$

$$\Omega_2 = \{W \otimes \pi \mid 0 \neq \pi \in \Pi\}.$$

如果 M 引起二元集合 $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ 上的置换群，就称 M 定驻所说的张量积结构. 此时 M 当然也定驻 $\Omega_1 \cup \Omega_2$ 中所含的全体非零向量组成的集合：

$$\Omega = \{w \otimes \pi \mid 0 \neq w \in W,\ 0 \neq \pi \in \Pi\}.$$

对本引理的 M 而言，我们可以证明它分别定驻 Ω_1 和 Ω_2. 为此，考察每个 $g = A \otimes D$ 在 $V = W \otimes_K \Pi$ 上的作用.

任取 $0 \neq w \otimes \pi \in \Omega$. 可认为 $w \in W$ 已写成 F 上 d 维行向量的形式. 在考虑每个 $\alpha \in K$ 在 W 上的作用时，可认为 $\alpha \in \mathrm{Mat}_k F$ 是矩阵，将每个行向量 $w \in W$ 映到 $w\alpha$. 每个 $\pi = \alpha_1\pi_1 + \cdots + \alpha_m\pi_m \in \Pi$ 可等同于 K 上的 m 维行向量 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$，它被矩阵 $A \in \mathrm{GL}(m, K)$ 映到 πA. 而

$$w \otimes \pi = (w\alpha_1, \cdots, w\alpha_m) = w\pi \in \mathrm{Mat}_{1\times n} F$$

可以认为是由 $w \in \mathrm{Mat}_{1\times k} F$ 与 $\pi \in \mathrm{Mat}_{1\times m} K \subset \mathrm{Mat}_{k\times mk} F$ 按 F 上的矩阵乘法而得到.

D 正规化 S_1，从而正规化 $K = \mathrm{End}_{FS_1} W$，诱导出 K 的自同构 $\alpha \mapsto \alpha^D = D^{-1}\alpha D$. 对 K 上任意矩阵 $B = (\beta_{ij})$，记 $B^D = (\beta_{ij}^D)$，则 $g = A \otimes D = (\alpha_{ij}D)_{m\times m}$ 将 $w \otimes \pi = w\pi$ 送到

$$\begin{aligned}(w \otimes \pi)g &= w\pi(\alpha_{ij}D)_{m\times m} \\ &= (wD)(D^{-1}(\pi A)D) = (wD) \otimes (\pi A)^D.\end{aligned}$$

这说明了 $g = A \otimes D$ 将 F-子空间 $W \otimes \pi$ 变到 $W \otimes (\pi A)^D$，从而 M 定驻上述集合 Ω_2；同时 g 也将子空间 $Fw \otimes \Pi$ 变到 $FwD \otimes \Pi$，M 定驻 Ω_1. 这就证明了 M 定驻张量积结构 $V = W \otimes_K \Pi$.

(2.6.2.6) S_1 在 $\mathrm{GL}(W/F)$ 中的正规化子 Λ_1 的构造：

如果 Λ_1 在 W 上可约，取 W 的任一单 $F\Lambda_1$-子模 $U \subsetneq W$. 注意，K 的乘法群 K^* 就是 S_1 在 $\mathrm{GL}(W/F)$中的中心化子，因而含于 Λ_1. 可见 $F\Lambda_1$-模 U 也是右 K-模，可以构造张量积 $U\otimes_K \Pi$，它是 V 的 FM-真子模. 这与 M 的不可约性相矛盾. 故 Λ_1 在 W 上不可约.

由于 Λ_1 正规化 S_1，而 $K = \mathrm{End}_{FS_1}W$ 是 S_1 在 $\mathrm{End}_F W$ 中的中心化子，Λ_1 必然也正规化 K.

取 W 的任一不可约 FK-子模 Y，由于 K 与 S_1 在 W 上的作用相互中心化，可知 $S_1 \subset \mathrm{End}_{FK}W$. 于是对任一 $0 \neq h \in S_1$，映射 $Y \to Yh$, $y \mapsto yh$ 是单 FK-模之间的同构. 这说明所有的 $Yh(0 \neq h \in S_1)$ 是相互同构的单 FK-子模. 另一方面，所有 $Yh(h \in S_1)$ 的和$\widetilde{W}$是 W 的 FS_1-子模. 由 W 是单 FS_1-模知 $W = \widetilde{W}$. W 是相互同构的单 FK-模的和，从而是齐次 FK-模，可以写成相互同构的单 FK-模的直和形式 $W = \bigoplus_{j=1}^r Y_j$，其中每个 $Y_j = Yh_j$，而 $h_1, \cdots, h_r$ 是 S_1 的一组元素，且不妨取 $h_1 = 1$, $Y_1 = Y$.

任取 Y 的左 F-基 $\mathscr{Y} = \{y_l | 1 \leq l \leq d\}$，其中 $d = \dim_F Y = k/r$，则 $\{y_l h_j | 1 \leq j \leq r, 1 \leq l \leq d\}$ 是 W 的一组左 D-基，可用来充当最早选取的 $\mathscr{W}$. 在这样一组基 $\mathscr{W}$ 下，每个 $\alpha \in K$ 在 W 上作用的矩阵具有形式 $I^{(r)}\otimes\alpha^{(d)}$，其中 $\alpha^{(d)} \in \mathrm{Mat}_d F$ 是 α 在 Y 上的限制 $\alpha|_Y$ 在基 $\mathscr{Y}$ 下的矩阵，α 在 W 上的作用由 $\alpha|_Y$ 唯一决定. 我们可以将 K 看作一个抽象的体，忠实地作用在 Y、W 上，每个 $\alpha \in K$ 在 Y、W 上的作用的矩阵分别是 $\alpha^{(d)}$、$I^{(m)} \otimes \alpha^{(d)}$. 必要的时候，我们用 K_Y、K_W 分别表示 K 在 Y、W 上的作用及其矩阵. 由于 K 在 Y 上不可约，$E = \mathrm{End}_{FK}Y$ 是体. 从矩阵的观点看，E 就是 K_Y 在 $\mathrm{Mat}_d F$ 中的中心化子. 由此可看出，$K_W = I^{(r)} \otimes K_Y$ 在 $\mathrm{Mat}_{rd}F$ 中的中心化子等于 $\mathrm{Mat}_r E$. 从几何观点看，这也就是 $\mathrm{End}_{FK}W$. 由于 $K_W = \mathrm{End}_{FS_1}W$，故 $S_1 \subseteq \mathrm{End}_{FK}W = \mathrm{Mat}_r E$. 如果 E 在 Y 上可约，则 $\mathrm{Mat}_r E$ 在 W 上可约，从而 S_1 在 W 上可约，导致矛盾. 故 E 在 Y 上不可约. 于是 $E_0 = \mathrm{End}_{FE}Y$ 是体. E_0 也就是 E 在 $\mathrm{Mat}_d F$ 中的中心化子. 显然 $E_0 \supseteq K$. 另一方面，$\mathrm{Mat}_r E$ 在 $\mathrm{Mat}_{rd}F$ 中的中心化子

应等于 $I^{(r)}\otimes E_0$，它应含于 S_1 的中心化子 $K_W = I^{(r)}\otimes K$，这又说明 $E_0 \subseteq K$. 这证明了 $K = E_0$. 也就是说：K 与 E 在 $\mathrm{End}_F Y$（即 $\mathrm{Mat}_d F$）中互为中心化子.

先设 W 是可约的 FK-模，则 $W = Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_r$, $r \geq 2$，其中每个 $Y_j = Yh_j$ 是与 Y 同构的一个 FK-子模，$u_j: Y \to Y_j$, $y \mapsto yh_j$ 是 FK-模同构. $\Lambda_1 \in \mathrm{GL}(W/F)$ 在 W 上不可约且正规化 K. 对 Λ_1、K、W 应用前面对 M、S、V 得到的结论知，每个矩阵 $D \in \Lambda_1 \leq \mathrm{GL}(rd, F)$ 具有形式 $D = (\beta_{ij}\sigma)_{r\times r} = B\otimes\sigma$，其中 $B = (\beta_{ij})_{r\times r} \in \mathrm{GL}(r, E)$，$\sigma \in \Lambda$，$\Lambda$ 是 E 在 $\mathrm{GL}(d, F)$中的正规化子.

如果 W 是不可约的 FK-模，则 $W = Y = Y_1$，$\Lambda_1 = \Lambda$，此时可认为 $D = \sigma$，$B = I$，上面的结论仍成立.

从几何上看，W 可写成 $W = Y\otimes_E U$，其中 $U = \mathrm{Hom}_{FK}(Y, W)$ 是 E 上的 r 维左空间，$\mathscr{U} = \{u_1, \cdots, u_r\}$ 是它的一组基，而 $\mathrm{GL}(r, E)$就是 $\mathrm{Aut}_{FK}(W) = \mathrm{GL}(U/E)$ 在基 $\mathscr{U}$ 下的矩阵形式. 在基 $\mathscr{Y}$、$\mathscr{U}$ 下分别将 Y、U 写成行向量空间 $\mathrm{Mat}_{1\times d}F$、$\mathrm{Mat}_{1\times r}E$，则每个 $D = B\otimes\sigma$ 将 $y\otimes u$（$y\in Y$, $u\in U$）送到 $(y\sigma)\otimes(uB)^\sigma$，其中 $\beta\mapsto\beta^\sigma = \sigma^{-1}\beta\sigma$ 是由 σ 的共轭作用诱导出的 E 的自同构.

（2.6.2.7）*M 的元素的最终形式*：

对 $g \in M$，在(2.6.2.3)中得到 $g = A\otimes D$，而在(2.6.2.6)中又得到 $D = B\otimes\sigma$，于是

$$g = A\otimes(B\otimes\sigma) = (\alpha_{ij}\sigma B^\sigma)_{m\times m},$$

其中 $A\in\mathrm{GL}(m, K)$，$B\in\mathrm{GL}(r, E)$，$\sigma\in\Lambda$.

并且有

$$V = W\otimes_K \Pi = (Y\otimes_E U)\otimes_K \Pi,$$

其中 Y 是不可约 F-K-双模，K 与 E 在 $\mathrm{End}_F Y$ 中互为中心化子，U、Π 分别是左 E-空间和左 K-空间. 对任意 $y\in Y$，$u\in U$，$\pi\in\Pi$，$g = A\otimes(B\otimes\sigma)$ 将

$$(y\otimes u)\otimes\pi \mapsto ((y\sigma)\otimes(u^\sigma B))\otimes(\pi^\sigma A).$$

注意，$A_\sigma:\pi\mapsto(\pi^\sigma A)$ 与 $B_\sigma:u\mapsto(u^\sigma B)$ 分别是 $\Gamma L(\Pi/K)$和 $\Gamma L(U/E)$的元素. 可知 g 具有引理结论(2)中所述的形式.

(2.6.2.8) 两个特殊情形：

特殊情形 1：W 是不可约的右 K-空间，即 $\dim_K W=1$.

此时 $W=eK$ 对任一非零向量 $e\in W$ 成立. 可将每个 $\alpha\in K$ 与 $e\alpha\in W$ 等同，从而将 K 与 W 等同起来，每个 $a\in F$ 对应于唯一的 $\alpha\in K$，使 $ae=e\alpha$，映射 $a\mapsto\alpha$ 将 F 嵌入 K. 在此意义上可认为 $F\subset K$. 且 $2\leq\dim_F K=\dim_F W=k<\infty$. 而 K 在 $GL(k, F)$中的正规化子 $\Lambda_1=K^*\rtimes \mathrm{Gal}K/F$. 因此，

$$M\leq GL(m, K)\otimes\Lambda_1=GL(m, K)\rtimes \mathrm{Gal}K/F,$$

M 所定驻的张量积结构 $V=W\otimes_K\Pi$ 就是 K 上的左空间结构 $V(m, K)$.

特殊情形 2：$k=\dim_F W=1$.

此时 $K\subseteq \mathrm{Mat}_k F=F$, $S=I^{(n)}\otimes S_1\subseteq I^{(n)}\otimes F=FI^{(n)}$. 但 $S\not\subseteq Z(F)I^{(n)}$，故 S_1 含于 F 而不含于 $Z(F)$，$F\neq Z(F)$，F 是非交换体，S_1 在 F 中的中心化子 K 是 F 的真子体. M 所定驻的张量积结构 $V=W\otimes_K\Pi$ 就是 $V=F\otimes_K V(n, K)$. ▌

定理 2.6.1(3)的证明 M 满足引理 2.6.2 中所说的条件，因而定驻张量积结构 $V=W\otimes_K\Pi$. 由于 M 是典型群 G 的极大子群，它应等于这个张量积结构的稳定子群. 除 $\dim_K W=1$ 和 $\dim_F W=1$ 这两个特殊情形外，M 是 C_4 类子群. 由引理 2.6.2 证明中的(2.6.2.8)知，当 $\dim_K W=1$ 时，M 是 C_3 类子群；当 $\dim_F W=1$ 时 M 是 C_5 类子群. ▌

推论 2.6.3 设引理 2.6.2 中的 F 是域，M 是 $GL(V/F)$的不可约子群，且正规化 $\mathrm{End}_F V$ 的可约子集 S，且 V 是齐次 FS-模，则存在 F 的有限维扩体 K，F 含于 K 的中心，及有限维右 K-空间 W 和左 K-空间 Π，使：

(1) $V=W\otimes_K\Pi$，S 生成的 F-代数等于 $\mathrm{End}_E W\otimes 1_\Pi$，$M$ 的元素 g 具有形式

$$g: w \otimes u \mapsto (B_\sigma w) \otimes (\pi A_\sigma),$$

其中 $\sigma \in \mathrm{Gal}K/F$, $A_\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(\Pi/K)$ 与 $B_\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(W/K)$ 满足条件 $(\alpha\pi)A_\sigma = \alpha^\sigma(\pi A_\sigma)$, $B_\sigma(w\alpha) = (B_\sigma w)\alpha^\sigma$, $\forall \alpha \in K$.

(2) 可将 V 写成 $\mathrm{Mat}_{r\times m}K$ 的形式,使 S 由 $V = \mathrm{Mat}_{r\times m}K$ 上全体变换 $v \mapsto Bv(B \in \mathrm{Mat}_r K)$ 组成,而 M 中的元素具有形式 $v \mapsto Bv^\sigma A$, 其中 $A \in \mathrm{GL}(r, K)$, $B \in \mathrm{GL}(m, K)$, 而 $\sigma \in \mathrm{Gal}K/F$ 作用于矩阵 v 的每个分量.

证明　由于 F 是域,它在 V 上的左乘作用 F_L 也含于 $\mathrm{End}_F V$. 不妨用 S 与 F 在 $\mathrm{End}_F V$ 生成的子环代替 S,化为 S 是环,且包含 $F1_V$ 的情形. 由引理 2.6.2 知 $V = W \otimes_K \Pi$, 其中 W 是单 S-子模, $K = \mathrm{End}_S W$ 是体,W 看作右 K-空间,而 $\Pi = \mathrm{Hom}_S(W, V)$ 是左 K-空间. 显然 F 中心化 S,因而 $F \subseteq K$, 且 $F \subseteq Z(K)$. 且由 Wedderburn 定理知 S 在 W 上的限制 $S_1 = \mathrm{End}_K W$. 注意,此时引理 2.6.2中所说的单 FK-子模 Y 就是 W 的一维右 K-空间,而 $E = \mathrm{End}_K Y$ 就是 K 的对偶体 K_L(由 K 在自身上的左乘变换的全体组成). S_1 的矩阵形式就是全方阵环 $\mathrm{Mat}_r K_L$. K 在 $\mathrm{GL}(Y/F) = \mathrm{GL}(K/F)$ 中的正规化子 $\Lambda = K_L^* \rtimes \mathrm{Gal}K/F$. 由引理 2.6.2 即知 M 的元素具有所说的形式.

取 W 的右 K-基将 W 写成列向量空间 $\mathrm{Mat}_{r\times 1}K$,取 Π 的左 K-基将 Π 写成行向量空间 $\mathrm{Mat}_{1\times m}K$. 则 $V = W \otimes_K \Pi = \mathrm{Mat}_{r\times m}K$, 且 S 与 M 具有所说的形式. ▌

如果有群 G 的子群 H、N 存在,使 $G = HN$, 且 $hk = kh$ 对所有的 $h \in H$, $k \in N$ 成立,则称 G 是 H 与 N 的中心积. 当 $H \cap N = \{1\}$ 时,G 就是 H 与 N 的直积 $H \times N$.

推论 2.6.4　设体 F 上典型群 $\mathrm{GL}(V/F)$的不可约子群 M 是子群 H 与 N 的中心积,则:

(1) 存在引理 2.6.2 所述的张量积分解 $V = (Y \otimes_E U) \otimes_K \Pi$, $N \leq 1_Y \otimes \mathrm{GL}(U/E) \otimes 1_\Pi$, $H \leq 1_Y \otimes 1_W \otimes \mathrm{GL}(\Pi/K)$, 且每个 $(Y \otimes_E U) \otimes_K K\pi_0 (0 \neq \pi_0 \in \Pi)$ 是单 FN-子模.

(2) 设 W 和 X 分别是 V 的单 FN-子模和单 FH-子模，$W \cap X \neq 0$，则有维数公式

$$\dim_F V = (\dim_F W)(\dim_F X)/\dim_F(W \cap X).$$

特别，V 的 F-维数是 W、X 的 F-维数的乘积的因子.

证明 (1) 取 V 的单 FN-子模 W. 由 G 在 V 上不可约知 $V = \sum_{g\in G} Wg$. 每个 $g \in G = HN$ 可写成 $g = hk = kh$ 的形式，$h \in H$, $k \in N$，于是 $Wg = Wkh = Wh$. 这说明 $V = \sum_{h\in H} Wh$. 对每个 $h \in H$，由 h 中心化 N 知，映射 $\pi_h: W \to Wh$, $w \mapsto wh$ 是 FN-子模之间的同构. 于是 V 是相互同构的单 FN-模 $Wh(h \in H)$ 的和，因而是其中某些 $W_i = Wh_i(h_i \in H,\ 1 \leq i \leq m)$ 的直和 $V = \bigoplus_{i=1}^m W_i$，其中 $h_1 = 1$, $W_1 = W$. 这样，V 就是齐次 FN-模. 于是由引理 2.6.2 立即得所说结论.

(2) 由(1)已有 $V = W \otimes_K \Pi$，其中 $K = \mathrm{End}_{FN} W$ 是体，$\Pi = \mathrm{Hom}_{FN}(W, V)$ 是左 K-空间，$\{h_i \in H \mid 1 \leq i \leq m\}$ 是 Π 的一组左 K-基. 记 $Y_0 = W \cap X$. 设 Y 是 $0 \neq v_0 \in Y_0$ 生成的单 FK-子模，$E = \mathrm{End}_{FK} Y$，则 $W = Y \otimes_E U$，其中 $U = \mathrm{Hom}_{FK}(Y, W)$ 是左 E-空间. 在引理 2.6.2 的证明过程(2.6.2.6)中已经知道 E 在 Y 上也不可约. 我们有

$$N \leq 1_Y \otimes \mathrm{GL}(U/E) \otimes 1_\Pi, \quad H \leq 1_Y \otimes 1_V \otimes \mathrm{GL}(\Pi/K).$$

Y 在 N 中的稳定子群 N_Y 含于 E^*. 并且由 N 在 W 上不可约知 N_Y 在 Y 上不可约.

设 H_W 是 W 在 H 中的稳定子群. 由于 H_W 也中心化 FN，它应当含于 $\mathrm{End}_{FN} W = K$. Y_0 可以由所有的 $v_0 h(h \in H_W)$ 张成，所有这些 $v_0 h$ 也都含于 $v_0 K \subseteq Y$，故 $Y_0 \subseteq Y$. 并且由于 K 在 H_W 的乘法作用下变到自身，Y 也是 H_W 的不变子空间，即 FH_W-模. 而 Y_0 是 Y 的单 FH_W-模. N_Y 中心化 H_W，并且在 Y 上不可约，因而 Y 可以写成有限个相互同构的 FH_W-模 $Y_0\xi_i(\xi_i \in N_Y,\ 1 \leq i \leq k)$ 的直和. X 是 Y_0 生成的单 FH-模，所有的 $X\xi_i(1 \leq i \leq k)$ 是相互同

构的单 FH-模，它们的直和

$$X\xi_1 \oplus \cdots \oplus X\xi_k = Y \otimes_K \Pi = Yh_1 \oplus \cdots \oplus Yh_m.$$

由此得到

$$k \cdot \dim_F X = m \cdot \dim_F Y = m \cdot k \dim_F Y_0,$$

$$m = (\dim_F X)/(\dim_F Y_0),$$

从而

$$n = \dim_F V = (\dim_F W) \cdot m$$

$$= (\dim_F W)(\dim_F X)/(\dim_F Y_0),$$

如所欲证. ∎

由于有了定理 2.6.1，剩下的工作是定出不正规化任何非纯量可约子群的极大子群. 目前我们还难以完成这一工作. 但下一节将解决一个重要的特殊情况.

§2.7　正规化非纯量可解子群的极大子群

本节讨论域 F 上典型群 $G \leq \mathrm{GL}(n, F)$ 中这样的极大子群 M，它正规化 $\mathrm{GL}(n, F)$ 的可解子群 $N \nleq F^* 1_V$.

如果 M 正规化 $\mathrm{GL}(n, F)$ 的某个非纯量的(即不含于 $F^* 1_V$ 的)可约子群，则 M 的类型已在定理 2.6.1 中定出，故只须再讨论不存在被 M 正规化的非纯量可约子群的情形.

定理 2.7.1　设 F 是域，$\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}(n, F)$，$M \leq \mathrm{GL}(V)$ 正规化 $\mathrm{GL}(n, F)$ 的非纯量可解子群 N，但不存在被 M 正规化的非纯量可约子群，则以下两结论之一成立：

(i) 存在体 $K \supset F$，$F \subseteq Z(K)$，$\dim_F K = n$，使 V 可以看成 K 上一维左空间，而 $M \leq K^* \rtimes \mathrm{Gal}K/F$，$M$ 是 C_3 类子群.

(ii) n 是某个素数 p 的幂，$p \neq \mathrm{char}F$，M 正规化某个广义 Extra-special p-子群 N，N 在 V 上不可约. $N' \leqslant Z(N) \leqslant F^* 1_V$，换位子群 N' 是 $F^* 1_V$ 的 p 阶子群，N/N' 是初等 Abel p-群，且当

$p \neq 2$ 时，N 是周期为 p 的群，$Z(N) = N'$. M 是 C_6 类子群.

定理的证明将通过对以下几个引理的证明逐步完成.

引理 2.7.2 如果定理 2.7.1 所说的子群 M 正规化非纯量子群 N，使 $\mathrm{End}_{FN}V \not\subseteq F1_V$，或者 N 是 Abel 子群，则定理的结论(i)成立.

证明 M 不正规化非纯量的可约子群，从而非纯量子群 N 在 V 上不可约，$K = \mathrm{End}_{FN}V$ 是体. 如果 $K \not\subseteq F1_V$，则 K^* 是被 M 正规化的非纯量子群，在 V 上不可约. 即 V 是 1 维 K-空间，$\dim_F K = n$. 任取 $0 \neq e \in V$，则 $V = eK$.

M 正规化 K. 对任一 $g \in M$，设 $eg = e\alpha$, $\alpha \in K^*$，则 g 将任一 $e\theta \in V(\theta \in K)$ 映到 $(e\theta)g = eg\theta^\sigma = e\alpha\theta^\sigma$，其中 $\sigma: \theta \mapsto g^{-1}\theta g$ 是 K 的一个自同构，且在 K 的子域 $F1$ 上诱导出单位变换，即 $\sigma \in \mathrm{Gal}K/F$. 于是 M 含于 $\mathrm{GL}(n, F)$的 C_3 类子群 $K^* \rtimes \mathrm{Gal}K/F = \mathrm{GL}(1, K) \rtimes \mathrm{Gal}K/F$，定理 2.7.1 的结论(i)成立.

如果 M 正规化非纯量 Abel 子群 N，则 $\mathrm{End}_{FN}V$ 包含 N 从而不含于 $F1_V$. 由前面的讨论就知定理 2.7.1 的结论(i)成立. ▌

以下只须再讨论 M 不正规化非纯量的 Abel 子群的情形，并且假定被 M 正规化的非纯量子群 N 都满足条件 $\mathrm{End}_{FN}V = F1_V$. 我们在下面几个引理中将证明：此时定理 2.7.1 的结论(ii)成立.

对群 G 和自然数 m，如果 $g^m = 1$ 对所有的 $g \in G$ 成立，就说 m 是 G 的周期. 以 m 为周期的群中元素的阶都是 m 的因子.

设 p 是素数，如果群 P 的中心 $Z(P)$是循环 p-群，换位子群 P'是 p 阶群且含于 $Z(P)$，商群 P/P'是周期为 p 的 Abel 群，就称 P 是广义 Extra-special p-群. 当 $P' = Z(P)$ 时还称 P 为 Extra-special p-群. 虽然在这个定义中并不排除 P 是无限群的情形，但我们将证明，如果广义 Extra-special p-群 P 是某个 $\mathrm{GL}(n, F)$(F 是域)的不可约子群且 $Z(P) \leq F^* 1_V$，则 P 一定是有限 p-群，$P/Z(P)$是秩为偶数的初等 Abel p-群，而 n 也必然是 p 的幂.

引理 2.7.3 设 V 是域 F 上 n 维空间，M 是 $\mathrm{GL}(V)$的不可约

子群，不正规化非纯量可约子群，也不正规化非纯量Abel子群，但正规化非纯量的可解子群，则M正规化广义Extra-special p-子群N，$p \neq \mathrm{char}F$，N满足定理2.7.1(ii)所述的条件.

证明　记$\varphi: \mathrm{GL}(n, F) \to \mathrm{PGL}(n, F) = \mathrm{GL}(n, F)/F^*1$为标准同态. 设$N \not\leq F^*1$是$M$的正规可解子群. 有导群列

$$N = N^{(0)} \triangleright N^{(1)} \triangleright \cdots \triangleright N^{(r)} \triangleright N^{(r+1)} = 1,$$

其中每个$N^{(k)}(k \geq 1)$是$N^{(k-1)}$的导群，它们都是N的特征子群，从而是M的正规子群. 由$\varphi(N) \neq 1$及$\varphi(N^{(r+1)}) = 1$知，存在最大的整数$k \geq 0$，使$\varphi(N^{(k)}) \neq 1$. 由k的最大性知，$\varphi(N^{(k)})$的导群$\varphi(N^{(k+1)}) = 1$，因而$\varphi(N^{(k)})$是Abel群. 取$N_0 = N^{(k)}$，则N_0是M的正规子群，且$\varphi(N_0)$是非单位Abel群.

以下不妨用N_0代替N，即设$N \trianglelefteq M$，且$\varphi(N)$是非单位Abel群，N的换位子群$N' \leq F^*1$，含于N的中心$Z(N)$. $Z(N)$是被M正规化的Abel子群. 由于假设了M不正规化非纯量的Abel子群，这迫使$Z(N) \leq F^*1$，$Z(N) = N \cap F^*1$.

对任意的a、$b \in N$，由$\varphi(N)$是Abel群知换位子$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab \in F^*1$，即$[a, b] = \lambda 1$对某个$\lambda \in F^*$成立. 在等式$b^{-1}ab = \lambda a$两端取行列式，得$\det a = \lambda^n \det a$，从而$\lambda^n = 1$. 于是又得$(b^n)^{-1}a(b^n) = \lambda^n a = a$. 由$a \in N$的任意性知，所有的元素$b \in N$的$n$次幂$b^n$都含于$N$的中心$Z(N) \leq F^*1$. 也就是说，$\varphi(N)$是以$n$为周期的群. 由$\varphi(N) \neq 1$知$N$中存在元素$b \notin F^*1$，$\varphi(b)$的阶$n_1 > 1$是$n$的因子. 任取$n_1$的素因子$p$，则$\varphi(b^{n_1/p})$是$p$阶元. 选$b^{n_1/p}$代替$b$可使$\varphi(b)$是$p$阶元. b在M中的所有的共轭生成M的一个正规子群$N_1 \leq N$，$\varphi(N_1)$是由p阶元生成的Abel群，因而是以p为周期的群，其中的非单位元都是p阶元. 不妨一开始就用N_1代替N. 于是可假设Abel群$\varphi(N)$以p为周期.

在以上假设下，对任意的a、$b \in N$有$b^p \in F^*1$，从而$(b^p)^{-1}a(b^p) = a$. 但换位子$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab = \lambda 1 \in F^*1$，即$b^{-1}ab = \lambda a$，于是$a = (b^p)^{-1}ab^p = \lambda^p a$，故$\lambda^p = 1$，$[a, b]^p = 1$. 且

N 不是交换群，必然存在换位子 $[a, b] \neq 1$，这样的换位子 $[a, b]=\lambda 1$ 是 p 阶元，λ 是 F^* 中的 p 阶元（即 p 次单位原根）. N 的换位子群 $N' \leq Z(N)$ 是由 p 阶元生成的 Abel 群，因而是 F^*1 的以 p 为周期的子群. 但 F^* 中的 p 阶元（即方程 $\lambda^p = 1$ 的除 1 以外的根）至多 $p-1$ 个. F^* 既然包含了至少一个 p 阶元 $\lambda = \omega$，就包含了 ω 所生成的 p 阶子群 $\langle\omega\rangle$，$\langle\omega\rangle$ 由方程 $\lambda^p = 1$ 的全部 p 个根组成，是 F^* 的唯一的 p 阶子群，也是 F^* 中唯一的以 p 为周期的非单位子群. $\langle\omega\rangle 1$ 是 F^*1 中唯一的以 p 为周期的非单位子群，它包含 $N' \neq 1$ 从而等于 N'.

这就证明了：N 的换位子群 N' 就等于 F^*1 的唯一的 p 阶子群.

如果 $\mathrm{char}F = p$，则 $\lambda^p = 1 \Longrightarrow \lambda = 1$，$F^*$ 中不含 p 阶元，导致矛盾. 故我们所要求的 N 仅在 $\mathrm{char}F \neq p$ 的情形下才可能存在. 如果 F 是 q 元有限域，还应要求 p 整除 $|F^*| = q-1$.

按前面所作的假设，N 是由某个 $b \notin F^*1$ 在 M 中所有的共轭 $b^g = g^{-1}bg\,(g \in M)$ 生成的. 并且由 $b^p \in F^*1$ 知 $(b^g)^p = g^{-1}(b^p)g = b^p$. 于是 $(b^p)^{-1}(b^g)^p = 1$. 并且 b^g 与 b^{-1} 的换位子 $(b^g)^{-1}b(b^g)b^{-1} = \lambda 1 \in F^*1$，从而 $(b^g)b^{-1} = \lambda b^{-1}(b^g)$，$\lambda \in F^*$ 满足条件 $\lambda^p = 1$. 由 $b \notin Z(N) \leq F^*1$ 知，可选 b^g 与 b 不交换，$\lambda \neq 1$，特别 $a = b^{-1}b^g \notin F^*1$，且

$$a^p = (b^{-1}b^g)^p = \lambda^{1+2+\cdots+(p-1)}(b^{-1})^p(b^g)^p = \lambda^{p(p-1)/2}1.$$

我们可用 a 代替前面的 b，即用 a 在 M 中的所有的共轭所生成的正规子群 $N_1 = \langle a^g = g^{-1}ag \mid g \in M\rangle \leq N$ 代替 N，化为 $b^p = \lambda^{p(p-1)/2}$ 的情形，从而 $(b^g)^p = \lambda^{p(p-1)/2} = 1$ 也对所有的 $b^g = g^{-1}bg\,(g \in M)$ 成立.

当 $p \neq 2$ 时，

$$\lambda^p = 1 \Longrightarrow \lambda^{p(p-1)/2} = 1 \Longrightarrow b^p = 1 \Longrightarrow \text{所有的 } (b^g)^p = 1.$$

即 N 的生成元 $b^g\,(g \in M)$ 都是 p 阶元. 对满足条件 $b_1^p = b_2^p = 1$ 的

b_1、$b_2 \in N$，由 $[b_1, b_2] = b_1^{-1}b_2^{-1}b_1b_2 = \lambda 1 \in F^*1$ 及 $\lambda^p = 1$ 推出

$$(b_1b_2)^p = \lambda^{p(p-1)/2}b_1^pb_2^p = 1.$$

这说明：由 p 阶元 $b^g(g \in M)$ 生成的群 N 的所有的非单位元素都是 p 阶元，N 是以 p 为周期的群. 特别是，N 的中心 $Z(N)$ 也是以 p 为周期的群. 但 $N' \leq Z(N) \leq F^*1$，这迫使 $Z(N)$ 只能等于 F^*1 的唯一的以 p 为周期的非单位子群 $\langle\omega\rangle 1 = N'$.

在 $p = 2$ 的情形下，$\mathrm{char}F \neq 2$，且 $\lambda^2 = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$. 从而由 $b^2 = \lambda 1 = \pm 1$ 得出 b 是 2 阶元或 4 阶元. 对满足条件 $b_1^2 = \lambda_1 1$，$b_2^2 = \lambda_2 1$，λ_1、$\lambda_2 \in \{\pm 1\}$ 的任意 b_1、$b_2 \in N$，由 $[b_1, b_2] = b_1^{-1}b_2^{-1}b_1b_2 = \lambda 1$，$\lambda^2 = 1$，$\lambda = \pm 1$，得

$$(b_1b_2)^2 = \lambda b_1^2b_2^2 = \lambda\lambda_1\lambda_2 1 \in \{\pm 1\},\ (b_1b_2)^4 = 1.$$

这样，由满足条件 $(b^g)^2 \in \{\pm 1\}$ 的元素 b^g 生成的群 N 的所有的元素 $a \in N$ 都满足条件 $a^2 \in \{\pm 1\}$，$a^4 = 1$. 此时 N 的中心 $Z(N)$ 是 F^*1 的 2 阶或 4 阶循环子群，且包含 $N' = \{\pm 1\}$. 当 $Z(N)$ 是 2 阶子群时 $Z(N) = N'$.

可见，总可以化为这样的情况：N' 是 F^*1 的唯一的 p 阶循环子群，对某个素数 $p \neq \mathrm{char}F$. 商群 N/N' 是以 p 为周期的 Abel 群. 当 $p \neq 2$ 时，N 自身就是以 p 为周期的群，$N' = Z(N)$. 而当 $p = 2$ 时，N 的非单位元素的阶是 2 或 4. N 是前面所定义的广义 Extra-special p-群. ▌

在本节引理 2.7.5 中要证明：含于 $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}(n, F)$ 中的上述广义 Extra-special p-群 N 必然是有限群，并且当 N 在 V 上不可约时，n 是 p 的幂. 为证明这一事实，先来研究具有最小的阶 p^3 的 Extra-special p-群 P 的不可约的忠实表示.

引理 2.7.4　设 V 是 F 上 n 维空间，p 是素数，且不等于 $\mathrm{char}F$，F^* 包含 p 阶元 ω. 设 P 是 $\mathrm{GL}(V)$ 的 p^3 阶不可约子群，它的换位子群 P' 等于它的中心 $Z(P)$，并且就是 F^*1 的唯一的 p 阶子群 $\langle\omega\rangle 1_V$. 当 $p \neq 2$ 时，还设 P 的非单位元素都是 p 阶元. 则下

列两种情形之一成立：

(1) $n=p$, $\mathrm{End}_{FP}V=F1_V$；

(2) $p=2$, P 是四元数群，方程 $\lambda^2+\mu^2+1=0$ 在 F 中无解，$n=4$, $K=\mathrm{End}_{FP}V$ 是 F 上的四元数体，$P<GL(V/K)=GL(1, K)$.

证明 当 $p\neq 2$ 时，在非交换群 P 中任取一对非交换的元素 x、y，则 P 由 x、y 生成. 且换位子 $[x, y]=x^{-1}y^{-1}xy=\omega^k 1_V$，对某个自然数 $k\leq p-1$. 即 $y^{-1}xy=\omega^k x$. 由 k 与 p 互素知，存在自然数 m，使 $km\equiv 1 \pmod p$，从而

$$(y^m)^{-1}x(y^m)=\omega^{km}x=\omega x.$$

不妨一开始就选 y^m 代替 y，化为 $[x, y]=\omega 1_V$ 的情形，即 $xy=\omega yx$. 当 $p=2$ 时，P 是 8 阶二面体群 D_4 或 8 阶四元数群 Q_8（也称为 Hamilton 群）. 在 $P=D_4$ 时，可选非交换的二阶元 x、y 生成 P，而 $P=Q_8$ 时可选非交换的四阶元 x、y 生成 P，且在这两种情形下都有 $[x, y]=-1_V=\omega 1_V$，即 $xy=-yx$.

先设 x、y 都是 p 阶元. 这包括了除 $P=Q_8$ 以外的所有情形. 此时 F 包含了 y 的所有的特征根 $\lambda\in\langle\omega\rangle$. 由于 $\mathrm{char}F\neq p$, y 的化零多项式 t^p-1 没有重根，y 在 V 上可对角化，即 V 是子空间 $W_k=\{v\in W\mid vx=\omega^k v\}$ $(0\leq k\leq p-1)$ 的直和，其中非零的 W_k 就是 y 的属于特征根 ω^k 的特征子空间. 对任意 $v\in W_k$，由 $xy=\omega yx$ 得 $(vx)y=\omega(vy)x=\omega^{k+1}(vx)$. 这说明对所有的 $0\leq k\leq p-1$ 都有 $W_k x\subseteq W_{k+1}$（当 $k=p-1$ 时约定 $W_p=W_0$），从而 $\dim W_k\leq\dim W_{k+1}$. 这导致所有的 W_k 维数相等，都不能为 0. 任取 $0\neq v_0\in W_0$. 对每个 $1\leq k\leq p-1$ 定义 $v_k=v_0x^k$，则 $0\neq v_k\in W_k$. $\mathscr{W}=\{v_k\mid 0\leq k\leq p-1\}$ 线性无关，张成 V 的一个 p 维子空间 W. 易见 W 是 x、y 作用下的不变子空间，从而是 V 的 FP-子模. 但 V 是单 FP-子模，故 $V=W$，维数为 p，$\mathscr{W}$ 是 V 的一组基. x、y 在这组基下的矩阵分别是

$$x=\begin{pmatrix}0 & I^{(p-1)}\\1 & 0\end{pmatrix},\ y=\mathrm{diag}(1,\ \omega,\ \omega^2,\ \cdots,\ \omega^{p-1}).$$

这说明了在 x、y 都是 p 阶元的情形下,P 在 F 上的忠实不可约表示空间 W 一定是 p 维的,且易见 P 在 $\mathrm{End}_F V$ 中的中心化子 $\mathrm{End}_{FP} V=F1_V$.

再来看剩下的情形 $P=Q_8$:此时 P 的生成元 x、y 都是四阶元,且 $xy=-yx$. 如果 F^* 包含四次单位原根,即方程 $\lambda^2=-1$ 有解 $\lambda\in F^*$,则四阶元 y 可对角化. 且由 $y^2=-1_V\neq 1_V$ 知 y 必有特征根 i 满足条件 $i^2=-1$. 任取属于 y 的这个特征根 i 的特征向量 $v_1\in V$,则由 $xy=-yx$ 得 $(v_1x)y=(-i)(v_1x)$,即 $v_2=v_1x$ 是 y 的属于特征根 $-i$ 的特征向量. 而 $v_2x=v_1x^2=-v_1$. 故 v_1、v_2 线性无关,且张成一个二维 F-空间 W. 它是 x、y 的作用下的不变子空间,从而是 V 的 FP-子模. 由 V 是单 FP-模知 $V=W$,维数为 2,v_1、v_2 组成 V 的一组基,x、y 在这组基下的矩阵分别是

$$x=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}i & 0\\0 & -i\end{pmatrix}.$$

此时 V 的维数是 2,且仍有 $\mathrm{End}_{FP} V=F1_V$.

下面设 F^* 不包含四次单位原根,即方程 $\lambda^2+1=0$ 在 F 中无解. 此时 x、y 在 V 中没有一维的不变子空间. 任取 $0\neq v_1\in V$,$v_2=v_1x$,则 v_1 与 v_2 线性无关,且 $v_2x=v_1x^2=-v_1$. V 的二维 F-空间 $Y=\langle v_1,\ v_2\rangle$ 是单 Fx-模. $W=Y+Yy$ 是 V 的 FP-子模,从而等于 V. 由 $xy=-yx$ 知 $(Yy)x=-Yxy=Yy$,即 Yy 也是单 Fx-子模. 从而 $Y\cap Yy$ 是 Fx-子模,等于 0 或 Y. 如果 $Y\cap Yy=Y$,则 $V=Y$,维数是 2. 此时 x 在基 $\{v_1,\ v_2\}$ 下的矩阵为 $x=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$. 我们有 $y^{-1}xy=-x=DxD^{-1}$,其中 $D=\mathrm{diag}(1,-1)$. 于是 yD 与 x 交换,应具有形式

$$yD=\begin{pmatrix}a & -b\\b & a\end{pmatrix},\text{从而 } y=\begin{pmatrix}a & b\\b & -a\end{pmatrix}.$$

另一方面，$\lambda^2+1=0$ 是 y 的化零多项式，从而是它的特征多项式. 从而 y 的迹和行列式应分别等于 0 和 1. 迹 $a+(-a)=0$ 已自然成立，只须再使 y 的行列式 $-a^2-b^2=1$ 即可. 这仅当方程 $\lambda^2+\mu^2+1=0$ 在域 F 中有解才有可能. 在这种情形下，仍有 $n=2$ 和 $\mathrm{End}_{FP}V=F1_V$.

在剩下的最后一种情况里，$Y\cap Yy=0$，$V=Y\oplus Yy$ 是 F 上的四维空间，$\mathscr{W}=\{v_1, v_2, v_1y, v_2y\}$ 是它的一组基. x、y 在这组基下的矩阵分别是

$$x=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}.$$

此时 $n=4$，$FP=F1\oplus Fx\oplus Fy\oplus Fxy$ 是 F 上四元数环. 如果有 $0\neq\alpha\in FP$ 不可逆，生成非零右理想 $\alpha FP\subsetneqq FP$，则 $v_1\alpha FP$ 是 V 的非零真 FP 子模，产生矛盾. 故 FP 是四元数体. $K=\mathrm{End}_{FP}V$ 也是四元数体，$P<GL(V/K)=GL(1,K)$. FP 中每个非零元 $q=a+bx+cy+dxy$ 的范 $N(q)=a^2+b^2+c^2+d^2\neq 0$. 特别，$\lambda^2+\mu^2+1=0$ 在 F 中无解. ▌

下面可以研究一般情形下的广义 Extra-special p-群 P 的有限维忠实不可约表示 $P\to\mathrm{GL}(V/F)$ 及其维数 $n=\dim V$.

引理 2.7.5 设 V 是域 F 上 n 维空间，素数 $p\neq\mathrm{char}F$，F^* 包含 p 阶元 ω. 设 P 是 $\mathrm{GL}(V)=\mathrm{GL}(n,F)$ 的不可约子群，$P'=\langle\omega\rangle 1$ 是 F^*1 的唯一的 p 阶子群. 当 $p\neq 2$ 时，$a^p=1$ 对所有的 $a\in P$ 成立，且 $Z(P)=P'$；而当 $p=2$ 时，$a^2\in\{\pm 1\}$ 对所有的 $a\in P$ 成立，$Z(P)$是 F^*1 的 2 阶或 4 阶子群且包含 P'. 则 P 是有限 p 群，n 是 p 的幂. 存在自然数 m 使

$$|P/Z(P)|=p^{2m},\ |P|=p^{2m+1} \text{ 或 } p^{2m+2},$$

$$\text{且 } n=p^m \text{ 或 } n=p^{m+1}.$$

其中 $|P| = p^{2m+2}$ 仅当 $p = 2$ 且 $|Z(P)| = 4$ 时成立. 而 $n = p^{m+1}$ 仅在下面的情形下成立：$p = 2$，方程 $\lambda^2 + \mu^2 + 1 = 0$ 在 F 中无解，$|Z(P)| = 2$，P 是 $m - 1$ 个二面体群 D_4 和 1 个四元数群 Q_8 的中心积.

证明 商群 $L = P/P'$ 是交换群，且其中的非单位元的阶都是 p. 将 L 中的乘法写成加法后可看成 p 元域 F_p 上的向量空间. 记任一 $x \in P$ 在 L 中的象为$\overline{x}$. F^* 包含方程 $\lambda^p = 1$ 的 p 个根 $\omega^k (0 \leq k \leq p-1)$，它们组成 F^* 的唯一的 p 阶循环子群. 对任意 x、$y \in P$，换位子 $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = \omega^k 1$，对某个自然数 k. 而 k 模 p 的同余类由 x、y 唯一决定. 因此，可以把 k 看作 F_p 中的元素，从而定义出 P 上的二元函数

$$f: P \times P \to F_p,\ (x, y) \mapsto k.$$

并且 $[\lambda_1 x, \lambda_2 y] = [x, y]$，从而 $f(\lambda_1 x, \lambda_2 y) = f(x, y)$ 对任意的 $\lambda_1 x \in \overline{x}$，$\lambda_2 y \in \overline{y}$ 成立，其中 λ_1、λ_2 是 F^* 的 p 阶循环子群$\langle \omega \rangle$中的纯量. 这允许我们定义 F_p-空间 L 上的二元函数 $f: L \times L \to F_p$ 使 $f(\overline{x}, \overline{y}) = s \in F_p$ 满足 $[x, y] = \omega^s 1$. 易验证 f 是 L 上的双线性函数.

$$f(\overline{x}, \overline{y}) = 0 \Longleftrightarrow [x, y] = 1 \Longleftrightarrow x \text{ 与 } y \text{ 交换}.$$

特别是，每个 x 与自身交换，即 $f(\overline{x}, \overline{x}) = 0\ (\forall \overline{x} \in L)$，$f$ 是交错内积. 又 $\overline{x} \in L^{\perp} \Longleftrightarrow x \in Z(P)$. 当 $p \neq 2$ 时，$Z(P) = P'$，$\overline{x} \in L^{\perp} \Longleftrightarrow \overline{x} = 0$，这说明 f 非退化；当 $p = 2$ 时，f 同时也是对称双线性内积，并且还可进一步定义 L 上的一元函数 $Q: L \to F_2$ 使 $Q(x) = s \in F_2$ 满足 $x^2 = (-1)^s$. 易验证 Q 是 L 上的二次型，且 $f(\overline{x}, \overline{y}) = Q(\overline{x} + \overline{y}) + Q(\overline{x}) + Q(\overline{y})$，即 f 是 Q 所对应的对称双线性型. 此时如果 $\overline{x} \in L^{\perp}$ 且 $\overline{x} \neq 0$，则 $x \in Z(P) \backslash P'$，x 是$F^* 1$ 的 4 阶元，$x^2 = -1$，$Q(x) = 1 \neq 0$. 这说明 Q 是 L 上的正则二次型.

我们对 n 作数学归纳法来证明所需的结论：由于 P 非交换，

辛空间 $L=P/P'$ 非全迷向，存在向量 $\bar{x}$、$\bar{y}\in L$，使 $f(\bar{x},\bar{y})=1$，从而 $\bar{x}$、$\bar{y}$ 在 P 中的原象 x、y 的换位子 $[x,y]=\omega 1_V$，即 $xy=\omega yx$，$\omega\in F^*$ 是前面所选定的 p 次单位原根. $\bar{x}$、$\bar{y}$ 在 F_p 上张成 L 的二维非退化子空间 L_1，L_1 由 p^2 个向量组成. 记 L_1 在 P 中的完全原象为 P_1，则 P_1 就是 x、y 在 P 中生成的子群，由 p^3 个元素组成. 当 p 是奇素数时，P_1 中所有的非单位元都是 p 阶元. 当 $p=2$ 时，如果 L 上的二次型 Q 的 Witt 指数 $\nu(Q)>0$，总可选 $\bar{x}$、$\bar{y}\in L$ 为互不正交的奇异向量，即 $Q(\bar{x})=Q(\bar{y})=0$，也就是 $x^2=y^2=1$，且 $xy=-yx$. 此时 P_1 是由二阶元 x、y 生成的二面体群 D_4. $p=2$ 且 $\nu(Q)=0$ 的情形仅当 $\dim L=2$ 的情形下才会出现，此时 $L_1=L$，$P=P_1$ 是 8 阶群，其中所有的非中心元都是 4 阶元. 因而 P 是四元数群，可由其中任意两个非中心元生成.

设 $\bar{x}$、$\bar{y}\in L$ 已按前面所说方式选定，生成非退化二维子空间 $L_1=\langle\bar{x},\bar{y}\rangle$，则 L 可写成 L_1 与 $L_1^\perp$ 的直和. 记 L_1、$L_1^\perp$ 在 P 中的完全原象分别为 P_1、N_1. 按前面的讨论，P_1 是由 x、y 生成的 p^3 阶群，而 N_1 就是 P_1 在 P 中的中心化子，P 是 P_1 与 N_1 的中心积，$P_1\cap N_1=P'=\langle\omega\rangle 1_V\leq F^*1_V$. 设 W 是 V 的任一单 FP_1-子模，也就是 P_1 在 F 上的一个忠实不可约表示空间. 如果 $P=P_1$ 是 8 阶四元数群，则 $V=W$，由引理 2.7.4 得 $n=2$ 或 4，本引理的结论已成立. 在其余情形下，所选的 x、y 都是 p 阶元，由引理 2.7.4 可知 $\dim_F W=p$ 且 $\mathrm{End}_{FP_1}W=F1_W$. 于是由推论 2.6.4 得 $V=W\otimes_F U$，其中 $U=\mathrm{Hom}_F(W,V)$ 是 F-空间，$P_1\leq \mathrm{GL}(W/F)\otimes 1_U$ 在 W 上不可约，$N_1\leq 1_W\otimes\mathrm{GL}(U/F)$ 在 U 上不可约. 任取 $0\neq w\in W$，则 $U_1=Fw\otimes_F U$ 是单 FN_1-模，其维数 $\dim_F U_1=\dim_F U=n/p$. 这证明了 n 是 p 的倍数.

当 $n=p$ 时，$W=V$，$N_1\subseteq\mathrm{End}_{FP_1}V=F1_V$，从而 $N_1=F1_V\cap P=Z(P)$. 如果此时 f 非退化，则 $N_1=Z(P)=P'<P_1$，$P=P_1$ 的阶为 p^3，引理成立. f 退化的情形仅当 $p=2$ 时可能发生，此时 $N_1=Z(P)$ 是 F^*1_V 的 4 阶子群，而 $N_1\cap P_1=P'$ 是 2 阶群，$P=P_1N_1$ 是 2^4 阶群，引理仍成立.

设 $n > p$，则 N_1 是忠实作用于 U_1 上的不可约广义 Extra-special p-群，且 $\dim_F U_1 = n/p < n$. 由归纳假设知，有自然数 m，使 $|N_1| = p^{2m+1}$ 或 p^{2m+2}，$n/p = p^m$ 或 $n/p = p^{m+1}$，其中 $|N_1| = p^{2m+2}$ 仅在 $p = 2$ 且 $|Z(N_1)| = |N_1 \cap Z(P)| = 4$ 时成立. 而 $n/p = p^{m+1}$ 成立的唯一情形为：$p = 2$，方程 $\lambda^2 + \mu^2 + 1 = 0$ 在 F 中无解，且 $N_1 = (D_4)^{m-1}Q_8$. 于是

$$|P| = |P_1| \cdot |N_1|/|P_1 \cap N_1|$$

$$= p^3 \cdot |N_1|/p \text{ 等于 } p^{2(m+1)+1} \text{或 } 2^{2(m+1)+2}.$$

而 $n = p^{m+1}$ 或 $n = 2^{m+2}$. 这就证明了引理的结论成立. ▌

为了对正规化可解子群 P 的极大子群 M 的构造有进一步的了解，下面考察不可约的广义 Extra-special p-子群 P 在 $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}(n, F)$ 中的正规化子.

引理 2.7.6　设 P 是引理 2.7.5 中所说的广义 Extra-special p-子群，$|P/Z(P)| = p^{2m}$，且 $\mathrm{End}_{FP}V = F1_V$. M 是 P 在 $\mathrm{GL}(V)$ 中的正规化子，则

(1) $M/(F^*P)$象同构于 $\mathrm{Sp}(2m, p)$的某个子群.

(2) 当 $p = 2$ 且 $Z(P) = P'$ 时，$M/(F^*P)$同构于 $O^{\pm}(2m, 2)$ 的某个子群.

证明　将初等 Abel p-群 $L = P/Z(P)$ 看成 p 元域 F_p 上的向量空间. 将每个 $x \in P$ 在 L 中的标准同态象记作$\bar{x}$. 任意取定 F^* 中的 p 阶元 ω. 定义函数 $f: L \times L \to F_p$ 使 $f(\bar{x}, \bar{y}) = k \in F_p$ 由条件 $[x, y] = \omega^k 1$ 决定. 则 f 是 L 上的非退化的辛内积. 当 $p = 2$ 且 $Z(P) = P'$ 时，在 L 上定义二次型 $Q(\bar{x}) = k \in F_2$，使 $x^2 = (-1)^k$，则 f 是与 Q 关联的对称双线性内积.

由 M 正规化 P 知，每个 $g \in M$ 诱导出 $L = P/P'$ 的一个自同构 $\rho(g): \bar{x} \mapsto \overline{g^{-1}xg}$. 映射 $\rho: g \mapsto \rho(g)$ 定义了 M 到 $\mathrm{Aut}L = \mathrm{GL}(L/F_p)$ 中的一个同态，即 M 在 F_p-空间 L 上的表示. 同态核 $\mathrm{Ker}\rho = F^*P$，于是 $\rho(M) \cong M/(F^*P)$.

我们证明每个 $\rho(g)(g\in M)$ 保持 L 中所有的向量相互之间的 f 内积不变,从而 ρ 将 M 映入 L 上的辛群 $\mathrm{Sp}(L, f)$. 设 $\overline{x}$、$\overline{y}\in L$, $f(\overline{x}, \overline{y})=k$. 纯量变换 $[x, y]=\omega^k 1$ 显然在每个 $g\in M$ 的共轭作用下不变,即

$$[g^{-1}xg, g^{-1}yg]=g^{-1}[x, y]g=g^{-1}(\omega^k 1)g=\omega^k 1.$$

这也就是说 $f(\overline{x}\rho(g), \overline{y}\rho(g))=f(\overline{x}, \overline{y})$. 即 $\rho_g\in \mathrm{Sp}(L, f)$. 这就证明了 $\rho(M)\leq \mathrm{Sp}(L, f)=\mathrm{Sp}(2m, p)$.

当 $p=2$ 且 $Z(P)=P'$ 时,对任意 $\overline{x}\in L$,每个 $g\in M$ 的共轭作用将 $x^2=\pm 1$ 固定不动. 从而 $(g^{-1}xg)^2=g^{-1}x^2g=x^2$,即 $Q(\overline{x}\rho(g))=Q(\overline{x})$. 这说明 $\rho(M)\leqslant O(L, Q)=O^{\pm}(2m, 2)$. ▌

§2.8 几何方法与矩阵方法

本书的后面各章的主要内容是定出若干类型的子群在 $\mathrm{GL}(n, F)$中的扩群. 我们采用的方法主要是两种:几何方法与矩阵方法.

几何方法主要用于第3章和第4章. 在第3章中将定出典型群中由根子群生成的不可约子群,并在此基础上讨论典型群中含根子群的极大子群,其中包括大部分 C_1、C_2 类子群. 第4章要定出具有正的 Witt 指数的 $N=\mathrm{TU}(n, F, h, L)$ 或 $\Omega(n, F, Q)$在 $G=\mathrm{GL}(n, F)$ 中的扩群,并由此导出 C_8 类子群的极大性. 这里要求 N 含有自己的根子群. 这两章的共同点是都要定出由某种类型的根子群及其在 $\mathrm{GL}(n, F)$中的某些共轭所生成的群. 典型群的根子群是基础体 F 的加群或其子群的嵌入象. 按照几何观点,每一个根子群对应于 $V=V(n, F)$ 或 V^* 的一个或两个子空间. 而用群元素 g 对根子群作共轭,即是将 g 以某种方式作用于根子群所对应的子空间. 我们常常需要定出由某个已知的子群 N 和某个不含于 N 的根子群 T 共同生成的群 X. 为做到这一点,我们设法定出 T 在 X 中的全体共轭子群的集合 Σ. 首先,可以求出 T 在 N

下所有的共轭子群，这些已知的共轭子群的集合 $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$，它们生成的群 $X_1 \leq X$. 必要时再考虑 Σ_1 中的子群在 X_1 中的元素下的共轭子群，以及这些共轭子群在已知元素下的共轭，等等. 一般说来，只要求出了 T 在 X 中的充分多的共轭，X 就可以知道了. 总的说来，几何方法的主要思想是考虑群在根子群集合上的共轭作用.

矩阵方法主要用于第 5 至 8 章，这几章分别讨论与 C_3、C_4、C_5 类子群有关的问题，定出相应的 N 在 $\mathrm{GL}(V)$中的扩群. 我们在研究这三类不同的子群的扩群时，选取了适当的基把 N 和 $\mathrm{GL}(V)$都写成了矩阵群，并把这三类不同的问题归结为一个共同的问题：

设 R 是含 1 环，D 是 R 的子体. 求 $N = \mathrm{SL}(n, D)$ 或 $\mathrm{U}'(n, D, \Delta, L)$在 $G = \mathrm{GL}(n, R)$ 中的全部扩群.

这个问题当然很难一般地解决. 但是我们却将其中一个重要步骤作了一般性的解决. 对于 N 在 $\mathrm{GL}(n, R)$中的扩群 X，如果 X 含于 $\mathrm{GL}(n, D)$的正规化子 Γ，我们就认为 X 是已知的(事实上，此时 X 可以认为是 C_8 类子群的扩群，在第 4 章中已定出). 因此只须考虑 X 不含于 Γ 的情况. 我们一般地证明了，只要能在 X 中找到一个元素 $g_1 = (a_{ij})_{n\times n} \notin \Gamma$，它的某些指定位置的分量 $a_{ij} = 0$，那么，将这个 g_1 与 N 中的元素进行适当的求逆和乘法运算就能在 $\langle N, g_1\rangle \leq X$ 中找到含越来越多的零分量的元素，最后找到一个 $T \notin \Gamma$ 使 $T - I$ 除了一个或两个位置外，其余位置的分量全都为 0. 这就使我们有可能在$\langle N, T\rangle$找到比 N 更大的一个典型群 N_1 的根子群，并进而证明 $N_1 \leq X$. 如果我们一开始就取一个尽可能大的典型群 $N_1 \leq X$ 来代替 N，由以上的论证就会导致矛盾，从而说明一开始就应该有 $X \leq \Gamma$. 具体说来，我们对 g_1 的要求是：

(1) 当 $N = \mathrm{SL}(n, D)$ 或 $\mathrm{TU}(n, D, h, L)$时，g_1 的第一行除 a_{11}外所有的分量 $a_{1j} = 0 (j \geq 2)$；

(2) 当 $N = \Omega(n, D, Q)$ 时，g_1 的前两行除前两列外其余的分量 $a_{1j} = a_{2j} = 0 (j \geq 3)$.

而在一定条件下，在情形(1)下只要找到一个 $g_0 \in X\backslash\Gamma$ 含有一个零分量，就能找到所需的 g_1；而在情形(2)下则需找到有指定的四个零分量的 g_0 来得出 g_1. 我们把上面所说的通过适当的求逆和乘法运算来找出含越来越多的零分量的群元素的过程称为“打洞”. 本书所用的矩阵方法主要就是“打洞”的技巧.

第 3 章

根子群生成的群

域上的典型群可以看作由典型李代数得出的李型群，由它们各自的根子群生成. 但也可不借助李型群的理论而直接定义典型群的根子群，并把根子群的概念推广到任意体上的典型群. 本章将定出各类典型群中由根子群生成的全部不可约子群. 由此可得出关于各类典型群中由根子群生成的极大子群的结论. 此处“由根子群生成”是指由某些根子群(不一定是全部根子群)生成.

本章的结论还是以后各章的一个基础. 在以后各章中讨论一些类型的子群 N 的扩群 X 的时候，只要在 X 中找到适当的根子群，就可以利用本章的结论得到 X 的可能的类型.

在典型群中含根子群的子群这一研究方向上，已发表的文献很多. 早在 1969 年，J. McLaughlin 研究了平延生成的子群(见文献[60]和[61]). 1974 年，B. S. Stark 研究了特征不为 2 的正交群中由长根子群生成的不可约子群(见文献[66]). W. Kantor 于 1979 年完全定出了有限典型群中由长根元素生成的子群(见文献[16]). 本书作者和查建国在 80 年代发表的一系列文章中，定出了任意域上各类典型群中含根子群的全部极大子群，以及由根子群生成的不可约子群(见文献[31]～[38]，[56]～[59]). O. H. King 和 R. H. Dye 在文献[20]～[28]，[7]～[9]中研究了典型群中含根子群一些类型的子群(主要是可约子群和非本原子群)的极大性，也有一系列的工作. 而对非交换体上的线性群和酉群中含根子群的不可约子群的研究，是本书作者及其学生任金江在文献[40]和[64]中作出的. 于 90 年代，F. G. Timmesfeld 在 Invent. Math.

上发表了两篇文章[67],[68]，从抽象群论的观点定义了长根子群的概念，并利用 J. Tits 的 Building 理论确定了满足一定条件的由抽象长根子群生成的抽象群的具体形式.

本章中的证明大体上沿用本书作者及其合作者查建国、任金江发表的论文中的方法. 不过，我们只对有普遍意义的情形，证明方法又相当有代表性和启发性的，给出比较完整的证明；而对于一些比较特殊和个别的情形，证明过程又过于繁琐的，则直接引用有关文献的结论而不加证明，或只给出证明的大致思路.

§3.1 根子群的定义

设 $V = V(n, K)$ 是体 K 上的 n 维左空间，$\mathrm{SL}(n, K)$ 是 V 上的特殊线性群. 按矩阵的语言，$\mathrm{SL}(n, K)$ 的*根子群*是指形如 $\{T_{ij}(c) | c \in K\}(i \neq j)$ 的子群及其共轭子群. 而按几何观点，$\mathrm{SL}(V)$ 的根子群是指形如 $T_{u,\varphi} = \{\tau_{cu,\varphi} | c \in K\}$ 的子群，这里 $0 \neq u \in V$，$0 \neq \varphi \in V^*$，且 $u\varphi = 0$，$x\tau_{cu,\varphi} = x + \varphi(x)cu$，$\forall x \in V$. 当 $c \neq 0$ 时，$\tau_{cu,\varphi}$ 是 V 上的平延. 映射 $c \mapsto \tau_{cu,\varphi}$ 是 K 的加群到根子群 $T_{u,\varphi}$ 的同构. 如果 V 上定义了非退化的半双线性型 h，则 φ 对应于唯一的一个非零向量 $v \in V$，使 $\varphi(x) = h(x, v)$，$\forall x \in V$，$\tau_{cu,\varphi}$ 可改写为 $\tau_{cu,v}: x \mapsto x + h(x, v)cu$.

设 $V = V(n, K)$ 上定义了 J-半双线性型 h 及相伴的内积 $f = h + \varepsilon \bar{h}$，酉群 $G = \mathrm{U}(n, K, h, L) \leq \mathrm{U}(n, K, f)$，且 Witt 指数 $\nu_L(h) \geq 1$. 设 u、$w \in V$ 相互正交，$u \neq 0$，且 $Q(u) = h(u, u) \in L$，$a \in K$ 满足条件 $a \equiv Q(w) (\mathrm{mod}\ L)$. 则 u、w、a 决定 G 中一个元素

$$t_{u,a,w}: x \mapsto x + f(x, w)u - \varepsilon f(x, u)(w + au).$$

对任一 $t_{u,a,w}$ 及 $g \in \mathrm{U}(n, K, h, L)$，有 $g^{-1}t_{u,a,w}g = t_{ug,a,wg}$. $w = 0$ 仅当 $a \in L$，此时 $t_{u,a,0} = \rho_{u,-\varepsilon a}$，当 $a \neq 0$ 时，它是酉平延. $a = 0$ 仅当 $Q(w) \in L$，此时记 $t_{u,0,w}$ 为 $\eta_{u,w}$，当 u、w 不共线时称它

为酉二平延. 注意，当 $w=au(a\in K^*)$时，

$$\eta_{u,au}: x\mapsto x+f(x,au)u-\varepsilon f(x,u)au=x+f(x,u)su,$$

其中 $s=\bar{a}-\varepsilon a$，因此 $\eta_{u,au}=\rho_{u,\bar{a}-\varepsilon a}$，当 $\bar{a}-\varepsilon a\neq 0$ 时，它是酉平延. 当 $L=0$ 即 $G=O(n,K,Q)$ 时，$t_{u,a,w}$中的 a 只能等于$Q(w)$，此时将 a 省略，改记 $t_{u,Q(w),w}$为 $t_{u,w}$.

先设 $L\neq 0$，则$G\neq O(n,K,Q)$，此时不妨设 $\varepsilon=-1$ 且 $1\in L$. 对每条 L-奇异线 Ku，我们称每个 $\rho_{u,s}(0\neq s\in L)$ 为沿奇异线 Ku 的酉平延. 沿 Ku 的全体酉平延和单位元组成的子群 $T_u=\{\rho_{u,s}|s\in L\}$ 称为 $\mathrm{TU}(n,K,h,L)$的一个长根子群. $s\mapsto\rho_{u,s}$ 是 L 的加群到 T_u 上的同构. 由酉平延的性质 $\rho_{au,s}=\rho_{u,\bar{a}sa}$ 可知：T_u 由 Ku 唯一决定，与 u 在 Ku 中的选取无关. $g^{-1}T_ug=T_{ug}$ 对任意 $g\in\mathrm{U}(n,K,h,L)$ 成立. 每一对相互正交的 L-奇异线 Ku、Kw 决定一个子群 $T_{u,w}=\{\eta_{au,w}|a\in K\}$. 由 $\eta_{au,bw}=\eta_{\bar{b}au,w}$ 可知 $T_{u,w}$ 的定义与 u、w 在 Ku、Kw 中的选取无关，且它被任一 $g\in\mathrm{U}(n,K,h,L)$ 共轭到 $g^{-1}T_{u,w}g=T_{ug,wg}$. 当 u、w 不共线时，$T_{u,w}$称为 $\mathrm{TU}(n,K,h,L)$的短根子群. 当 u、w 共线时，不妨设 $w=u$，则

$$T_{u,u}=\{\eta_{au,u}=\rho_{u,a+\bar{a}}|a\in K\}=\{\rho_{u,s}|s\in\mathrm{Tr}K\}$$

是 $\mathrm{TU}(n,K,h,\mathrm{Tr}K)$的长根子群 T_u.

在 $L=0$ 即 $G=O(n,K,Q)$ 的情形下，对每一个奇异平面 $\langle u,w\rangle(Q(u)=f(u,w)=0$ 且 u、w 线性无关)，我们将 $t_{u,w}\neq 1$ 称为 $\Omega(n,K,Q)$的一个根元素，而将子群 $T_{u,w}=\{t_{au,w}|a\in K\}$ 称为一个根子群. $T_{u,w}$由奇异平面$\langle u,w\rangle$唯一决定，与 u、w 的具体选取无关. $g^{-1}t_{u,w}g=t_{ug,wg}$，从而 $g^{-1}T_{u,w}g=T_{ug,wg}$ 对任意 $g\in O(n,K,Q)$ 成立. 当$\langle u,w\rangle$全奇异(即 $Q(w)=Q(u)=f(u,w)=0$) 时，$t_{u,w}$称为 $\Omega(n,K,Q)$的长根元素(也就是正交二平延 $\eta_{u,w}$)，$T_{u,w}$称为长根子群. 而当 $Q(w)\neq 0=Q(u)=f(u,w)$ 时，称 $t_{u,w}$为 $\Omega(n,K,Q)$的短根元素，称 $T_{u,w}$为短根子群.

如果 K 是特征 2 的域，而 Q 是 $V=V(n,K)$ 上有亏数的二

次型,即 Q 所关联的内积 f(在此情形下是辛内积)退化, $\mathrm{Rad}V\neq 0$, 则 $G=\Omega(V, Q)$ 可写成 $G_1=\Omega(V_1, Q_1, L)$ 的形式, $V_1=V/\mathrm{Rad}V$, Q_1 所关联的内积非退化,而 $L=\{Q(x)\mid x\in\mathrm{Rad}V\}$. 此时 G 中形如 $t_{u,w}(w\in\mathrm{Rad}V)$ 的短根元素也就是 G_1 中的辛平延 $\rho_{u,Q(w)}$, G_1 就是这些辛平延的全体所生成的 $\mathrm{TU}(V_1, Q_1, L)$. 而 G_1 的长根子群 $T_u=\{\rho_{u,s}\mid s\in L\}$ 实际上是 G 中形如 $T_{u,w}(w\in\mathrm{Rad}V)$ 的全体短根子群共同组成的子群. 如果考虑到逻辑的严密性,在定义 $\mathrm{TU}(n, K, h, L)$的长根子群时,似应排除 K 是特征 2 的域且 $\mathrm{TU}(n, K, h, L)=\Omega(n, K, Q, L)$ 的情形,而它归入有亏数的 $\Omega(V, Q)$的短根子群去考虑. 但从群论技巧上看,把有亏数的 $\Omega(V, Q)$的这种短根子群看成 $\mathrm{TU}(V/\mathrm{Rad}V, Q_1, L)$的由辛平延组成的子群(仍称为"长根子群")便于与别的情形下 $\mathrm{TU}(n, K, h, L)$的长根子群统一处理. 因此,对有亏数的正交群,我们将同时允许 $\Omega(V, Q)$(有亏数)和 $\mathrm{TU}(V/\mathrm{Rad}V, Q_1, L)$ $(L\neq 0)$ 这两种表示方法,而对这两种不同表达形式下它的根子群的名称允许有不同的定义.

本章的目的是定出各类典型群中由根子群生成的不可约子群以及含根子群的极大子群.

我们要用到关于 V 的直和分解以及可约子群的如下注记:

任意给定向量空间 $V=V(n, K)$ 的直和分解 $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_m$. 则每个向量 $x\in V$ 在这个直和分解下有唯一的分解式 $x=x_1+\cdots+x_m$, 使 $x_i\in V_i$, $\forall 1\leq i\leq m$. 对每个 i, x_i 称为 x 在 V_i 中的分量或投影,而映射 $\pi_i: V\mapsto V_i, x\mapsto x_i$ 称为 V 到 V_i 的投影映射. 注意,投影映射 π_i 不仅与 V_i 有关,也与其余 $V_j(j\neq i)$的选取有关. 设 $\dim V_i=d_i$, 则 $\mathrm{GL}(V_i)=\mathrm{GL}(d_i, K)$ 在映射

$$\mathrm{GL}(V_i)\to\mathrm{GL}(V),\ g_i\mapsto 1_{V_1}\times\cdots\times g_i\times\cdots\times 1_{V_m}$$

下嵌入 $\mathrm{GL}(V)=\mathrm{GL}(n, K)$ 成为可约子群, $g_i\in\mathrm{GL}(V_i)$ 的嵌入象在 V_i 上的作用与 g_i 相同,并且定驻其余每个 $V_j(j\neq i)$ 中所有的向量. 进一步,有嵌入映射

$$\mathrm{GL}(V_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(V_m) \to \mathrm{GL}(V),$$

$$g_1 \times \cdots \times g_m : x_1 + \cdots + x_m \mapsto x_1 g_1 + \cdots + x_m g_m.$$

设酉群 $G = \mathrm{U}(V, h, L) \leq \mathrm{U}(V, f)$ 作用于正则酉空间 V 上. 如果 W 是 V 的非退化子空间, 当我们说 x_1 是向量 $x \in V$ 在 W 中的分量(或投影)时, 如果不另外加以说明, 就总是指 x 在直和分解 $V = W \oplus W^{\perp}$ 下 x 在 W 中的分量(或投影). 并且我们总是将 $\mathrm{U}(W, h_W, L)$ 等同于 $\mathrm{U}(W, h_W, L) \times 1_{W^{\perp}}$ 看作 $\mathrm{U}(V, h, L)$ 的子群. 我们还常常将 h 在 W 上的限制 h_W 也简记为 h, 这在通常情况下不会产生混淆(但有时也需加以区别, 比如 $\nu_L(h_W)$ 就不能等同于 $\nu_L(h)$). 更进一步, 对 V 的任意 L-正则子空间 W, 我们也把 $\mathrm{U}(W, h_W, L)$ 看成 $\mathrm{U}(V, h, L)$ 的子群

$$\{g \in \mathrm{U}(V, h, L) \mid xg = x, \forall x \in W^{\perp}\}.$$

这样, 在 $L \neq 0$ 时, $\mathrm{TU}(W, h, L)$ 就是由 $\mathrm{TU}(V, h, L)$ 中全体形如 $T_w (w \in W)$ 的长根子群生成的子群. 而当 $L = 0$ 时, 如果 $\nu_L(W) \geq 1$ 且 $\dim W \geq 3$, 则 $\Omega(W, Q_W)$ 就是由 $\Omega(V, Q)$ 中形如 $T_{u,w}(u, w \in W)$ 的全体根子群生成的子群.

§3.2 线性群的根子群

为研究 $\mathrm{SL}(V)$ 的根子群, 要用到关于平延的下列性质:

(1) $\tau_{u,\varphi_1}\tau_{u,\varphi_2} = \tau_{u,\varphi_1+\varphi_2}$, $\tau_{u_1,\varphi}\tau_{u_2,\varphi} = \tau_{u_1+u_2,\varphi}$, 且对任意 $c \in K$ 有 $\tau_{cu,\varphi} = \tau_{u,\varphi c}$.

(2) 对 $g \in \mathrm{GL}(V)$ 有 $g^{-1}\tau_{u,\varphi}g = \tau_{ug, g^*\varphi}$, 这里 $g^*\varphi \in V^*$ 由 $x(g^*\varphi) = (xg^{-1})\varphi (\forall x \in V)$ 定义, 从而 $g^* \in \mathrm{GL}(V^*)$. 特别是 $(\tau_{u,\varphi})^* f = f - \varphi(uf)$, $\forall f \in V^*$.

由性质(1)知: $T_{u,\varphi} = T_{v,\psi} \Longleftrightarrow Ku = Kv$ 且 $\varphi K = \psi K$.

设 X 是 $\mathrm{SL}(V)$ 的子群, 对 $0 \neq \varphi \in V^*$ 记

$$V_X(\varphi) = \{v \in V \mid T_{v,\varphi} < X\};$$

对 $0 \neq u \in V$ 记

$$V_X^*(u) = \{\psi \in V^* \mid T_{u,\psi} < X\}.$$

则由性质(1)得知：$V_X(\varphi)$、$V_X^*(u)$ 分别是 V、V^* 的子空间，并且 $V_X(\varphi c) = V_X(\varphi)$ 及 $V_X^*(cu) = V_X^*(u)$ 对任意 $c \in K^*$ 成立. 并且由性质(2)得知：对 $g \in X$，$V_X(g^*\varphi) = V_X(\varphi)g$ 及 $V_X^*(ug) = g^* V_X^*(u)$ 成立.

定理 3.2.1　设 X 是 $\mathrm{SL}(n, K)$ 的由根子群生成的不可约子群，则 X 是下列类型的子群之一：

IR1. $X = \mathrm{SL}(n, K)$.

IR2. K 是域，n 是偶数，$X = \mathrm{Sp}(n, K, f)$ 对 V 上某个非退化交错型 f 成立.

IR3. $K = F_2$，n 是偶数且 ≥ 4，$X = O^{\pm}(n, 2) < \mathrm{Sp}(n, 2)$（但 $X \neq O^+(4, 2)$），或 X 是嵌入 $\mathrm{Sp}(n, 2)$ 的对称群 S_{n+1} 或 S_{n+2}.

证明　对 $u \in V$，$\varphi \in V^*$，我们用 $u \perp \varphi$ 来表示 $u\varphi = 0$，并记 $u^{\perp} = \{\psi \in V^* \mid u\psi = 0\}$，$\varphi^{\perp} = \{v \in V \mid v\varphi = 0\}$.

选择 $0 \neq \varphi_1 \in V^*$，使 $V_X(\varphi_1)$ 的维数 d 最大. 显然 $d \geq 1$.

情形 1　$d \geq 2$：

$V_X(\varphi_1) \subseteq \varphi_1^{\perp}$，是 V 的非平凡子空间. 由 X 不可约知，X 中有平延 g_2 将 $V_X(\varphi_1)$ 送到 $V_X(\varphi_2) \not\subseteq \varphi_1^{\perp}$，这里 $\varphi_2 = g_2^* \varphi_1$. $V_X(\varphi_2)$ 的维数仍为 d. 且有 $u_1 \in V_X(\varphi_2)$ 满足 $u_1\varphi_1 = 1$. 对任一 $0 \neq u \in V_X(\varphi_1) \cap \varphi_2^{\perp}$，由 $u\varphi_2 = 0$ 知 $(\tau_{u,\varphi_1})^* \varphi_2 = \varphi_2$，从而 τ_{u,φ_1} 定驻 $V_X(\varphi_2)$，再由 $u_1 \in V_X(\varphi_2)$ 得 $u_1\tau_{u,\varphi_1} - u_1 = u \in V_X(\varphi_2)$. 这证明了 $V_X(\varphi_2)$ 包含 $V_X(\varphi_1) \cap \varphi_2^{\perp}$. 除此以外，$V_X(\varphi_2)$ 还包含 u_1，于是它包含 $\langle V_X(\varphi_1) \cap \varphi_2^{\perp}, u_1\rangle = W \cap \varphi_2^{\perp}$，这里 $W = \langle V_X(\varphi_1), u_1\rangle$ 是 $d+1$ 维子空间. 由 $\dim V_X(\varphi_2) = d$ 可得到 $V_X(\varphi_2) = W \cap \varphi_2^{\perp}$，且 $W \not\subseteq \varphi_2^{\perp}$，从而 $V_X(\varphi_1) \not\subseteq \varphi_2^{\perp}$. 于是存在 $u_2 \in V_X(\varphi_1)$，使 $u_2\varphi_2 = 1$. 群 $X_2 = \langle T_{u_1,\varphi_2}, T_{u_2,\varphi_1}\rangle < X$ 定驻 W，且 $X_2^* = \{g^* \mid g \in X_2\}$ 在 $\langle \varphi_1, \varphi_2\rangle$ 上诱导出 $\mathrm{SL}(2, K)$，可将 φ_1 送到任何 $0 \neq \varphi \in \langle \varphi_1,$

$\varphi_2\rangle$，从而 $X_2 < X$ 将 $V_X(\varphi_1) = W \cap \varphi_1^\perp$ 送到 $V_X(\varphi) = W \cap \varphi^\perp$.

对每个 $g \in X$ 有 $(g^* \varphi_1)^\perp = \varphi_1^\perp g$，记

$$\langle X^* \varphi_1 \rangle = \langle g^* \varphi_1 | g \in X \rangle.$$

则 $\langle X^* \varphi_1 \rangle^\perp = \bigcap_{g \in X}(\varphi_1^\perp g)$ 是 V 的真子空间，且在 X 的作用下不变，只能等于 0. 这说明 $\langle X^* \varphi_1 \rangle = V^*$. 我们可以取 V^* 的维数最大的子空间 $\Phi \supseteq \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$，使 $V_X(\varphi) = W \cap \varphi^\perp$ 对所有的 $0 \neq \varphi \in \Phi$ 成立. 如果 $W \cap \Phi^\perp \neq 0$，则由 $\langle X^* \varphi_1 \rangle = V^*$ 知，存在 $g_3 \in X$ 使 $u_3 \varphi_3 = 1$ 对 $\varphi_3 = g_3^* \varphi_1$ 和某个 $0 \neq u_3 \in W \cap \Phi^\perp$ 成立. 由 $u_3 \in \Phi^\perp \setminus \varphi_3^\perp$ 知 $\varphi_3 \notin \Phi$. $V_X(\varphi_3) = V_X(\varphi_1) g_3$ 的维数仍为 $d = \dim W - 1$. 对任意 $0 \neq v \in V_X(\varphi_3)$，存在 $0 \neq \varphi \in \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \cap v^\perp$. 由 $(\tau_{v,\varphi_3})^* \varphi = \varphi$ 知 τ_{v,φ_3} 定驻 $V_X(\varphi)$. 再由 $u_3 \in W \cap \varphi^\perp = V_X(\varphi)$ 得 $u_3 \tau_{v,\varphi_3} - u_3 = v \in V_X(\varphi) \subset W$. 这证明了 $V_X(\varphi_3) \subset W$，从而 $V_X(\varphi_3) = W \cap \varphi_3^\perp$. 记 $\Psi = \langle \Phi, \varphi_3 \rangle \supsetneqq \Phi$. 对任意 $\psi \in \Psi$，当 $\psi \in \Phi$ 或 $\psi \in \langle \varphi_3 \rangle$ 时，已经知道 $V_X(\psi) = W \cap \psi^\perp$；在其余情形下，可写 $\psi = (\varphi_3 + \varphi c) a$，$a$、$c \in K^*$，$0 \neq \varphi \in \Phi$，于是

$$\begin{aligned} V_X(\psi) &= V_X(\varphi_3 + \varphi c) = V_X((\tau_{-cu_3,\varphi})^* \varphi_3) \\ &= V_X(\varphi_3) \tau_{-cu_3,\varphi} = W \cap \psi^\perp. \end{aligned}$$

但这就与 Φ 的极大性相矛盾. 这一矛盾说明了：应该有 $W \cap \Phi^\perp = 0$. 由此并可知 $\dim \Phi \geq \dim W = d + 1 \geq 3$.

如果 $W \neq V$，则 X 含有根子群 $T_{v,\psi}$ 不定驻 W，从而 $v \notin W$ 且 $\psi \notin W^\perp$. 有 $w \in W$ 使 $w\psi = 1$. 由 $\dim \Phi \geq 3$ 知，存在 $0 \neq \varphi \in \Phi \cap \langle w, v \rangle^\perp$，$(\tau_{v,\psi})^*$ 定驻 φ，从而 $\tau_{v,\psi}$ 定驻 $V_X(\varphi) = W \cap \varphi^\perp$. 但 $w \in W \cap \varphi^\perp$ 被 $\tau_{v,\psi}$ 送到 $w + v \notin W$，产生矛盾. 这证明了 $W = V$. 且由 $\dim \Phi \geq \dim W$ 知 $\Phi = V^*$. $V_X(\varphi) = \varphi^\perp$ 对所有的 $0 \neq \varphi \in V^*$ 成立，X 包含 $\mathrm{SL}(V)$ 的所有的根子群，从而 $X = \mathrm{SL}(V)$.

情形 2 $d = 1$：

如果 $d' = \max_{0 \neq u \in V} \dim V_X^*(u) \geq 2$，与情形 1 同理可得 $X =$

$\mathrm{SL}(V)$. 故设 $d'=1$.

对任意 $T_{u,\varphi}$、$T_{v,\psi}<X$, $Ku=Kv \Longleftrightarrow \varphi K=\psi K$, 且 $u\psi=0 \Longrightarrow (\tau_{u,\varphi})^*$ 定驻 $\psi \Longrightarrow \tau_{u,\varphi}$ 定驻 $V_X(\psi)=Kv \Longrightarrow v\varphi=0$. 即 $u\perp\psi \Longleftrightarrow v\perp\varphi$.

不可约的 X 含有 T_{u_1,φ_1}、T_{u_2,φ_2} 使 $u_1\varphi_2\neq 0$, 从而 $u_2\varphi_1\neq 0$. 可选 u_i、$\varphi_i(i=1,2)$, 使 $u_1\varphi_2=1=-u_2\varphi_1$. $T_{u_i,\varphi_i}(i=1,2)$ 生成 X 的子群 $X_1=\mathrm{SL}(V_1)\times 1_{V_2}$, 其中 $V_1=\langle u_1,u_2\rangle$, $V_2=\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle^{\perp}$. 当 $n=2$ 时,已有 $X=X_1=\mathrm{SL}(V)$. 设 $n\geq 3$, 则有 $T_{v_3,\psi_3}<X$ 不定驻 V_1, $v_3\notin V_1$, $\psi_3\notin V_1^{\perp}$. 不妨设 $u_2\psi_3\neq 0$, 从而 $v_3\varphi_2\neq 0$. 写为 $v_3=\tilde{v}_3+u_3$, $\psi_3=\tilde{\psi}_3+\varphi_3$, 使 $\tilde{v}_3\in V_1$, $u_3\in V_2$, $\tilde{\psi}_3\in\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle$, $\varphi_3\in V_1^{\perp}$. 有 $g\in X_1$ 使 $\tilde{v}_3g=u_1$, 用 $g^{-1}T_{v_3,\psi_3}g=T_{v_3g,g^*\psi_3}<X$ 代替 $T_{v_3,\psi}$, 可设 $\tilde{v}_3=u_1$, 于是 $v_3\varphi_1=(u_1+u_3)\varphi_1=0$, 从而 $0=u_1\psi_3=u_1(\tilde{\psi}_3+\varphi_3)=u_1\tilde{\psi}_3$, $\tilde{\psi}_3=\varphi_1a$ 对某个 $a\in K^*$ 成立,可用 ψ_3a^{-1} 代替 ψ_3 使 $\tilde{\psi}_3=\varphi_1$. 应有 $\varphi_3\neq 0$, 否则, $V_X(\varphi_1)\supseteq\langle u_1,v_3\rangle$ 至少 2 维,且 $0=v_3\psi_3=(u_1+u_3)(\varphi_1+\varphi_3)=u_3\varphi_3$. 若 K 非交换, $X_1=\mathrm{SL}(V_1)\times 1_{V_2}$ 包含 g_1 固定 u_2 且将 u_1 送到 cu_1, c 是 K^* 的换位子群中的非单位元. g_1^* 固定 φ_1 及 φ_3, 从而固定 ψ_3, $V_X(\psi_3)\supseteq\langle v_3,v_3g_1\rangle=\langle u_1+u_3,cu_1+u_3\rangle$, 至少 2 维,产生矛盾. 这说明当 K 非交换且 $n\geq 3$ 时,不会出现情形 2.

K 是域的情形已在文献[60]和[61]中解决了. 为叙述完整起见,下面仍对 K 是域、但 $K\neq F_2$ 的情形给出一个证明. 但对特别情形 $K=F_2$, 需要较繁琐的处理,在此从略,请参看文献[61].

设 K 是域但 $K\neq F_2$. 我们已有

$$X_1=\langle T_{u_1,\varphi_1},T_{u_2,\varphi_2}\rangle=\mathrm{SL}(V_1)\times 1_{V_2},$$

其中 $u_1\varphi_2=1=-u_2\varphi_1$. 由于 K 是域,可将 V 的对偶空间 V^* 写成左 K-空间,并定义 K-空间 V_1 到 V^* 中的线性嵌入

$$\sigma: au_1+bu_2\mapsto a\varphi_1+b\varphi_2,\ \forall a、b\in K.$$

现在 $X_1=\langle T_{u_1,\sigma(u_1)},T_{u_2,\sigma(u_2)}\rangle$. 易验证 X_1 包含所有的 $T_{u,\sigma(u)}$,

$\forall 0 \neq u \in V_1$. 注意 $V_1 \cap \sigma(V_1)^\perp = 0$. 于是存在 V 的维数最大的子空间 $U \supseteq V_1$，使 $T_{u,\sigma(u)} < X$ 对所有的 $0 \neq u \in U$ 成立，其中 σ：$U \to V^*$ 是线性嵌入，且 $U \cap \sigma(U)^\perp = 0$. $f(u, v) = u\sigma(v)$ 在 U 上定义了一个双线性型. 对任意 $0 \neq u \in U$，由 $T_{u,\sigma(u)} < X$ 知 $f(u, u) = u\sigma(u) = 0$，这说明 f 是交错内积，且由 $U \cap \sigma(U)^\perp = 0$ 知 f 非退化. 记 $U_1 = \sigma(U)^\perp$，$\Psi = U^\perp$，则 $V = U \oplus U_1$，$V^* = \sigma(U) \oplus \Psi$. 将 $\mathrm{Sp}(U, f) \times 1_{U_1}$ 简记为 $\mathrm{Sp}(U)$. 则 X 所含的平延 $\tau_{su,\sigma(u)}: x \mapsto x + (x\sigma(u))su$ $(0 \neq u \in U, s \in K^*)$ 即是 $\mathrm{Sp}(U)$ 的辛平延 $\rho_{u,s}$，且对任意 $v \in U$，有

$$\begin{aligned}(\tau_{su,\sigma(u)})^*\sigma(v) &= \sigma(v) - \sigma(u)(su\sigma(v)) \\ &= \sigma(v) - \sigma(u)sf(u, v) \\ &= \sigma(v + f(v, u)su) = \sigma(\rho_{u,s}v).\end{aligned}$$

全体 $\rho_{u,s}(0 \neq u \in U, s \in K^*)$ 生成 $\mathrm{Sp}(U) \leq X$，且 $g^*\sigma(v) = \sigma(vg)$ 对任意 $v \in U$，$g \in \mathrm{Sp}(U)$ 成立. 如果 $U \neq V$，则不可约的 X 含有 T_{w_1,ψ_1} 不定驻 U. 写为 $w_1 = u_0 + v_1$，$\psi_1 = \sigma(\tilde{u}_0) + \pi_1$，使 u_0、$\tilde{u}_0 \in U$，$v_1 \in U_1$，$\pi_1 \in \Psi$，则 $\tilde{u}_0 \neq 0$，$v_1 \neq 0$. 若 $\pi_1 = 0$，$\psi_1 = \sigma(\tilde{u}_0)$，则 $V_X(\sigma(\tilde{u}_0)) \supseteq \langle \tilde{u}_0, u_0 + v_1 \rangle$ 至少2维，产生矛盾. 故 $\pi_1 \neq 0$. 若 $\tilde{u}_0 \notin Ku_0$，则存在 $u \in U$，使 $f(u, u_0) = 0 \neq f(u, \tilde{u}_0)$，对 $T_{u,\sigma(u)}$，$T_{w_1,\psi_1} < X$ 有 $w_1\sigma(u) = u_0\sigma(u) = f(u_0, u) = 0$，但是 $u\psi_1 = u\sigma(\tilde{u}_0) = f(u, \tilde{u}_0) \neq 0$，产生矛盾. 故 $\tilde{u}_0 \in Kv_0$. 在 $\psi_1 K$ 中适当选取 ψ_1 可设 $\tilde{u}_0 = u_0$. 于是 $T_{u_0+v_1,\sigma(u_0)+\pi_1} < X$，且 $0 = x_1\psi_1 = (u_0 + v_1)(\sigma(u_0) + \pi_1) = v_1\pi_1$. 对任意 $g \in \mathrm{Sp}(U) \times 1_{W_1}$，有

$$g^{-1}T_{x_1,\psi}g = T_{u+v_1,\sigma(u)+\pi_1} < X,$$

其中 $u = u_0 g$ 取遍 U 的非零向量，取 $1 \neq a \in K^*$ 可知 X 包含所有的

$$\tau_{s(au_0+v_1),\, a\sigma(u_0)+\pi_1}\tau_{-sa(u_0+v_1),\, \sigma(u_0)+\pi_1}\tau_{-s(a^2-a)u_0,\, \sigma(u_0)}$$

$$= \tau_{s(1-a)v_1,\, \pi_1},\ s \in K.$$

即 $T_{v_1,\pi_1} < X$. 这说明 $T_{u+cv_1,\, \sigma(u)+c\pi_1} < X$ 对所有的 $u \in U$, $c \in K$ 成立. 不可约的 X 含有 T_{w_2,ψ_2}不定驻 v_1. 记 $w_2 = v_0 + v_2$, $\psi_2 = \sigma(\tilde{v}_0) + \pi_2$ 使 v_0、$\tilde{v}_0 \in U$, $v_2 \in U_1$, $\pi_2 \in \Psi_1$, 则 $v_1\pi_2 \neq 0$, 当然 $\pi_2 \neq 0$. 与前同理可知 $v_2 \neq 0$, $Kv_0 = K\tilde{v}_0$, 可适当选取 ψ_2,使 $\tilde{v}_0 = v_0$. 且有 $v_2\pi_2 = 0$. 当 $v_0 \neq 0$ 时,还知 $T_{u+v_2,\, \sigma(u)+\pi_2} < X$ 对任意 $u \in U$ 成立. 特别 $T_{v_2,\pi_2} < X$. 故总不妨设 $v_0 = 0$, $T_{w_2,\psi_2} = T_{v_2,\pi_2}$. 由 $w_1\pi_2 = v_1\pi_2 \neq 0$ 知 $v_2\psi_1 \neq 0$ 即 $v_2\pi_1 \neq 0$, 且可分别在 Kv_2、π_2K 中适当选取 v_2、π_2 使 $v_1\pi_2 = 1 = -v_2\pi_1$. 对任意 $u \in U$, $\langle T_{u+v_1,\, \sigma(u)+\pi_1},\ T_{v_2,\pi_2}\rangle < X$ 包含所有的 $T_{u+v_1+bv_2,\, \sigma(u)+\pi_1+\pi_2 b}$, $\forall b \in K$. 且 $\langle T_{u+v_1,\, \sigma(u)+\pi_1},\ T_{-v_1+v_2,\, -\pi_1+\pi_2}\rangle < X$ 包含

$$T_{(u+v_1)+(-v_1+v_2),\, (\sigma(u)+\pi_1)+(-\pi_1+\pi_2)} = T_{u+v_2,\, \sigma(u)+\pi_2}.$$

令 $W = \langle U, v_1, v_2\rangle$, 将 σ 扩张为线性嵌入 $\sigma_1: W \to V^*$, 使

$$\sigma_1(u + av_1 + bv_2) = \sigma(u) + a\pi_1 + b\pi_2,\ \forall u \in U,\ a,\ b \in K.$$

则 $W \cap \sigma_1(W)^{\perp} = 0$, 且 X 包含所有的 $T_{w,\sigma_1(w)}$, $\forall 0 \neq w \in W$. 这与 U 的极大性相违. 从而证明了 $U = V$, $X \geq \mathrm{Sp}(V, f)$. 由 $d = 1$ 易见 $X = \mathrm{Sp}(V, f)$.

$K = F_2$ 且 $d = 1$ 时, $X \leq \mathrm{Sp}(n, F_2, f)$. $X \lneq \mathrm{Sp}(n, F_2, f)$ 的仅有的情形是: $X = O^{\pm}(n, 2)$, 或 $X \cong S_{n+1}$, 或 $X \cong S_{n+2}$. 证明可参见文献[61].

§3.3 酉群的根子群

我们主要讨论酉平延群 $G = \mathrm{TU}(n, K, h, L)$ 中由酉平延组成的根子群,即长根子群. 而对于由酉二平延组成的短根子群生成的不可约子群 X,我们只给出 X 含 G 的长根子群的一个充分条件,在此条件下可以将 X 作为含长根子群的子群来研究,这就大

体上够本书以后章节应用了.

根据定义，$G=\mathrm{TU}(n, K, h, L)$ 的长根子群 T_u 是由沿同一条奇异线 $\langle u\rangle$ 的全体酉平延和单位元组成的群. 在本节的主要定理中，我们定出了 G 中由长根子群生成的全部不可约子群. 引理 3.3.3～3.3.6 一步一步地讨论了长根子群生成的子群的可能类型，为证明主要结果(定理 3.3.1 与命题 3.3.2)奠定基础.

当 $L=K$，即 $G=\mathrm{Sp}(n, K, f)$ 时，G 的长根子群也是 $\mathrm{SL}(n, K)$ 的根子群，G 中由长根子群生成的不可约子群就是定理3.2.1 IR2 和 IR3 中所列的全部子群. 因此，在定理 3.3.1 中只叙述 $0\neq L\neq K$ 的情形. 但是引理 3.3.3～3.3.6 的用处不仅在于证明定理 3.3.1，在本书以后的章节中还需要用它们来确定子群的扩群，证明子群的极大性等. 为了在以后用起来方便，我们在引理 3.3.3～3.3.6 中包括了 $L=K$ 的情形. 不过，$L=K$ 的情形实在非常简单，在引理 3.3.3～3.3.5 的证明中几乎不需要对 $L=K$ 的情形多置一词，只是在证明 3.3.6 时对 $K=F_2=L$ 这一特别情形略加叙述.

当 K 是域且 $J\neq 1$ 时，$L=K_J$ 是 K 的子域且在 K 中的指数 $[K:K_J]=2$. 当 $J=1$ 时，K 一定是域，在条件 $0\neq L\neq K$ 下，K 是特征 2 的非完全域，当然就是无限域. 此时 L 是域 K^2 上的子空间. 由于已假定 $1\in L$，故 L 包含 K^2. 在定理 3.3.1 中我们只完成了与 $J\neq 1$ 时相类似的一个情形：假定 L 包含 K 的一个指数为 2 的子域 F. 其余情形待解决. 但在引理 3.3.3～3.3.6 中，我们还是得出了关于更一般的 L 的结论.

定理 3.3.1 设 $G=\mathrm{TU}(n, K, h, L)\leq \mathrm{TU}(n, K, f)$，$L\neq K$. 当 K 是域时，假定 L 包含 K 的一个子域 F 使 $[K:F]=2$. 设 X 是由 G 的若干长根子群生成的不可约子群，则 X 是下列类型的子群之一：

IR1. $X=\mathrm{TU}(n, K, h, L)$.

IR2. K 是域，n 是偶数，且 $n\geq 4$，L 是 K 的子域且 $[K:L]=2$，$X=\mathrm{Sp}(n, L)$，或当 $L=F_2$ 时，X 是嵌入 $\mathrm{Sp}(n, 2)$中的正

交群 $O^{\pm}(n, 2)$（但 $X \neq O^{+}(4, 2)$）或对称群 S_{n+1} 或 S_{n+2}.

IR3. $K = F_4$, $K_J = F_2$, X 是某一组两两正交且张成 V 的非迷向线的集合 $\{\langle w_i \rangle \mid 1 \leq i \leq n\}$ 的稳定子群 X_n，或当 $G = \mathrm{SU}(6, 2^2)$ 时，$X_6 \lneqq X = 3\mathrm{P}\Omega^{-,\pi}(6, 3)$（见文献[16]）.

在以下类型 IR4 ~ IR7 中，K 是以 $L = \mathrm{Tr}K$ 为中心的广义四元数体. 特别在 IR4 ~ IR6 中，X 是 K 的一个子域 F 上的辛群或酉平延群，属于 § 2.2 中所定义的 C_5 类型，这里 $L \subseteq F \subset K$ 且满足 $\overline{F} = F$, $V = K \otimes_F V_F$, V_F 是 F 上的空间，h_F、f_F 分别是 h、f 在 V_F 上的限制.

IR4. $n = 2m$，是偶数，$\nu_L(h) = m \geq 2$, $F = L$, $X = \mathrm{Sp}(V_F, f_F)$.

IR5. $F = L[\delta]$，对某个 $\delta \in K \backslash K_J$, $X = \mathrm{SU}(V_F, f_F)$.

IR6. $\mathrm{char}K = 2$, $F = F[\delta]$ 对某个 $\delta \in K_J \backslash L$, $X = \mathrm{TU}(V_F, h_F, L)$.

IR7. $n = 4$, $\nu_L(h) = 2$ 时的一个例外情况如下：设 $V = \langle u_1, u_2 \rangle \perp \langle u_3, u_4 \rangle$, u_i、u_{i+1} $(i = 1, 3)$ 是 L-奇异向量，并且 $(u_i, u_{i+1}) = 1$. 又设 a、b 是 K 中两个非对称元，且 $b \notin L[a]$，记 E 是 K 中由 1、a、b 张成的三维 L 子空间. X 是由这样的长根子群 T_w 的全体生成的子群，其中奇异线 $\langle w \rangle = \langle \sum_{i=1}^{4} c_i u_i \rangle$ 满足下列条件之一：

(i) $c_1 = 1$，且 c_3、c_4、c_2c_3、c_2c_4 都含于 E；

(ii) $c_1 = 0$, $c_2 = 1$，且 c_3、c_4 含于 E；

(iii) $c_1 = c_2 = 0$.

（注：上面的 IR7 是按文献[64]中的方式表述的，但它看来应当有更简明而直接的表述方式.）

设 U 是由奇异线张成的子空间，我们记 T_U 为所有的长根子群 T_u（$u \in U$）生成的群. 特别是 $T_V = \mathrm{TU}(n, K, h, L)$. 而对 V 的非退化子空间 W，则有 $T_W = \mathrm{TU}(W)$. 这里 $\mathrm{TU}(W)$ 是 $\mathrm{TU}(W, h_W, L) \times 1_{W^{\perp}}$ 的简写，h_W 是 h 在 W 上的限制.

下面的命题给出了长根子群生成的不可约子群 X 等于 G 的一些充分条件. 它将在我们研究 $C_1 \sim C_8$ 类子群的扩群时发挥重要作用.

命题 3.3.2　设 $G = \mathrm{TU}(n, K, h, L) \leq \mathrm{TU}(n, K, f)$ 如定理 3.3.1 所述，X 是由 G 的若干长根子群生成的不可约子群. 如果下列条件之一满足，则 $X = G$.

(i) $G = \mathrm{Sp}(n, K, f)$ 且 $K \neq F_2$.

(ii) L 不含于 K 的中心.

(iii) K 是域且 L 真包含 K 的一个指数为 2 的子域.

(iv) 存在 V 的至少 4 维的非退化子空间 U，$\nu(U) \geq 1$，使 $X \geq T_U$.

(v) K 是以 L 为中心的广义四元数体，且存在 V 的至少 3 维的非退化子空间 U，$\nu(U) \geq 1$，使 $X \geq T_U$.

(vi) K、L 是域，$[K : L] = 2$，且 $L \neq F_2$，存在 V 的至少 3 维的正则子空间 U，$\nu(U) \geq 1$，$\dim(\mathrm{Rad}U) - \dim(U \cap \mathrm{Rad}V) \leq 1$，使 $X \geq T_U$.

(vii) $K = F_4$，$L = F_2$，$\dim V \geq 4$，存在 V 的至少 3 维的非退化子空间 U，使 $X \geq \mathrm{SU}(U, f_U)$.

设 $U_1, \cdots, U_r$ 是 V 的一些子空间组成的链，其中每个 $U_i (1 \leq i \leq r)$ 可由奇异向量张成，且每个 $U_i (i \geq 2)$ 与 $\langle U_1, \cdots, U_{i-1} \rangle$ 不正交，则称这样的子空间链为**连通链**，并把 $U_i (1 \leq i \leq r)$ 张成的空间称为这个连通链所张成的空间. 如果这个连通链中每个 $U_i (i \geq 2)$ 不含于 $\langle U_1, \cdots, U_{i-1} \rangle$，则称它为**既约连通链**. 这里，"连通"的基本意义是"不正交"，从而 T_{U_i} 与 $\langle T_{U_1}, \cdots, T_{U_{i-1}} \rangle$ 不交换. 我们希望，当 $U_1, \cdots, U_r$ 张成子空间 W 时，对应的群 $T_{U_1}, \cdots, T_{U_r}$ 生成 T_W，如果 U_r 与 $\langle U_1, \cdots, U_{r-1} \rangle$ 正交，则 T_{U_r} 与 $\langle T_{U_1}, \cdots, T_{U_r} \rangle$ 交换，此时显然不能指望它们生成 T_W. 这就是我们把注意力集中在连通链的原因.

G 的每个长根子群 T_u 对应于一条奇异线 $\langle u \rangle$. 对 G 的每个子

群 X,记 $L(X)=\{\langle u\rangle \mid T_u<X\}$ 为 X 所含的长根子群 T_u 所对应的奇异线的全体.我们也简写 $u\in L(X)$ 来表示 $\langle u\rangle\in L(X)$. 对任意 $g\in X$ 和 $\langle u\rangle\in L(X)$, 由 $T_{ug}=g^{-1}T_u g<X$ 知 $\langle ug\rangle\in L(X)$. 这也就是说,$L(X)$在 X 的作用下变到自身.从而 $L(X)$所张成的子空间 $W=\langle L(X)\rangle$ 也被 X 变到自身.如果 X 是由长根子群生成的不可约子群,则$\langle L(X)\rangle$应等于 V. 从 $L(X)$中取出奇异线$\langle u_1\rangle$, …, $\langle u_m\rangle$组成具有最大长度的既约连通链,设这些奇异线张成子空间 W,则 $L(X)$中每条奇异线$\langle u\rangle$应含于 W 或含于 $W^{\perp}$(否则,$\langle u_1\rangle$, …, $\langle u_m\rangle$, $\langle u\rangle$是一条更长的既约连通链),于是 T_u 定驻 W,所有这些 T_u 生成的 X 也定驻 W,这迫使 $W=V$. 如果能定出 $N=\langle T_{u_1}, \cdots, T_{u_m}\rangle$, 则 X 就容易定出了.特别是,如果我们所希望的结果 $N=T_V=G$ 成立,则 $X=G$. 下面的几个引理所讨论的正是这个问题.

在下面的引理 3.3.3～3.3.6 中,我们都假定 $\mathrm{TU}(V, h, L)$ 是作用于非退化酉空间 V 上的酉平延群.这当然要求 $L\neq 0$ 及 $\nu_L(h)\geq 1$. 除非另外加以说明,对 L 没有其他限制.

先讨论两个长根子群 T_u、T_v 生成的子群.

引理 3.3.3 设 u、$v\in V$ 是两个不共线的奇异向量,$W=\langle u, v\rangle$.

(1) 若 $(u, v)\neq 0$, 则 $T_W=\langle T_u, T_v\rangle$.

(2) 若 $(u, v)=0$ 且 $K\neq F_2$, 则 $T_W=\langle T_{u+av} \mid a\in K\rangle$.

证明 (1) 用 $(u, v)^{-1}u$ 代替 u,可设 $(u, v)=1$. W 中任一条异于$\langle v\rangle$的奇异线具有形式 $\langle u+sv\rangle$, $s\in L$. 但对每个 $s\in L$ 有 $T_{u+sv}=\rho_{v,s}^{-1}T_u\rho_{v,s}<\langle T_u, T_v\rangle$. 这说明$\langle T_u, T_v\rangle$包含所有的 $T_w(0\neq w\in W, Q(w)\in L)$, 从而等于 T_W.

(2) 记 $X=\langle T_{u+av} \mid a\in K\rangle$, 只须证明 $T_v<X$. 由于假定了 $1\in L$, 对任意 $s\in L$ 有 $s^2=s1\bar{s}\in L$, 对任意 $0\neq s\in L$, 易验证

$$\rho_{v, 1-s}=\rho_{u+s^{-1}v, s^2}\rho_{u+v, -s}\rho_{u, s-s^2}\in X,$$

$1-s$ 取遍 $L\backslash\{1\}$. 当 $L\neq F_2$ 时, 可取 $s\in L\backslash\{0, 1\}$, 得 $\rho_{v,1}=$

$\rho_{v,1-s}\rho_{v,s} \in X$. 于是 $T_v < X$. 当 $L = F_2 \neq K$ 时, $K = F_4$, $\rho_{v,1} = \Pi_{a\in K}\rho_{u+av,1} \in X$, 仍有 $T_v < X$. ▌

下面设法定出3个长根子群生成的子群 $\langle T_u, T_v, T_w\rangle$. 由于引理3.3.3已经证明了 $\langle T_u, T_v\rangle = T_U$ 对双曲平面 $U = \langle u, v\rangle$ 成立,以下的一步是定出 $X_3 = \langle T_U, T_w\rangle$, 其中 $w \notin U \cup U^\perp$. 我们自然希望 $X_3 = T_W$ 对 $W = \langle U, w\rangle$ 成立. 不妨选 U 中的双曲对来代替 $\{u, v\}$, 使 $(u, v) = (w, v) = 1$, 从而 w 可写成 $u + \delta v + w_0$ 的形式,其中 $0 \neq w_0 \in U^\perp$, $\delta \in K$. 而 $W = U \oplus \langle w_0\rangle$ 中任一条不含于 U 的奇异线具有形式 $\langle x\rangle$, $x = au + bv + w_0$. 我们希望对所有这样的 x 证明 $T_x < X_3$. 证明的关键是:使 $T_x < X_3$ 的 x 中的系数 a 能否取遍 K? 为此,我们证明:出现在 $T_{au+bv+w_0} < X$ 中的 $a \in K^*$ 的全体与0一起组成的集合 D 是 K 的一个子体. D 包含 L 及 δ, 因而包含 L 与 δ 在 K 中生成的子体. 在大多数情形下,我们知道 $D = K$, 从而 a 可取遍 K^*. 而要证明 D 是体,最困难的是证明它对加法的封闭性. 这对 K 是非交换体的情形尤其困难. 这一困难已在文献[64]中克服了,成功的关键在于利用了关于体元素的一个恒等式. 下面介绍的就是文献[64]中的证明.

引理 3.3.4　设奇异向量 u、v、$w \in V$ 满足条件 $(u, v) = 1$ 及 $w = u + \delta v + w_0$, 其中 $\delta \in K^*$, $0 \neq w_0 \in \langle u, v\rangle^\perp$. 记 $W = \langle u, v, w\rangle$. 设 $\mathrm{TU}(V, h, L)$ 的子群 $X \geq \langle T_u, T_v, T_w\rangle$. 定义

$$D^* = \{a \in K^* \mid T_{au+bv+w_0} < X,\ \forall Q(au+bv+w_0) \in L\},$$

则下列结论成立:

(1) $D = D^* \cup \{0\}$ 是 K 的子体且包含 L 及 δ.

(2) 如果 K 是域($K \neq F_2$), 且 L 包含 K 的子域 F, 使 $[K:F] \leq 2$, 则当 $L = K$, 或当 $[K:F] = 2$ 且 $L \supsetneq F$, 或当 W 是 L-正则子空间时,有 $X \geq T_W$.

(3) 如果 K 非交换,且 L 不含于 K 的中心,则 $X \geq T_W$.

(4) 如果 K 非交换,且 L 含于 K 的中心 $Z(K)$, 则 K 是以 L 为中心的广义四元数体,且当 a_1、a_2、δ 在 L 上生成的代数等于 K

时，有 $T_W = \langle T_U, T_{u+\delta v+w_0}, T_{a_iu+b_i\delta\bar{a}^{-1}v+w_0} \mid i=1, 2\rangle$，其中 $b_i \in K(i=1, 2)$ 满足条件 $a_ib_i + Q(w_0) \in L$.

证明 (3.3.4.1) 如果 $D = K \neq F_2$，则 $X \geq T_W$.

记 $U = \langle u, v\rangle$，则由引理 3.3.3 知 $T_U < X$，$T_x < X$ 对 U 中的奇异线 $\langle x\rangle$ 成立. 设 $\langle x\rangle$ 是 W 中不含于 U 的奇异线，不妨在 $\langle x\rangle$ 中选取 x，使 $x = au + bv + w_0$，a、$b \in K$. 如果 $a \neq 0$，则由 $a \in K^* = D^*$ 知 $T_x < X$. 如果 $a = 0$，但 $b \neq 0$，酉平延 $\rho_{u,1} \in T_u < X$ 将 $v \mapsto v - u$，则 $\rho_{u,1}^{-1} T_{bv+w_0}\rho_{u,1} = T_{-bu+bv+w_0} < X$，从而 $T_x = T_{bv+w_0} < X$. 设 $a = b = 0$，$w_0 = x$ 奇异，我们有 $K \neq F_2$，并且已经知道 $T_{au+w_0} < X$ 对所有的 $a \in K^* = D^*$ 成立，于是由引理 3.3.3(2)得 $T_{w_0} < X$. 这就证明了 X 包含所有的 $T_x(x \in W)$，从而 $X \leq T_W$.

(3.3.4.2) 对 $a \in K^*$，只要对某一个奇异向量 $au + b_1v + w_0$ 有 $T_{au+b_1v+w_0} < X$，则对所有形如 $au + bv + w_0$ 的奇异向量都有 $T_{au+bv+w_0} < X$，从而 $a \in D^*$.

注意，$Q(au + bv + w_0) \equiv a\bar{b} + Q(w_0) \pmod L$，故 $au + bv + w_0$ 与 $au + b_1v + w_0$ 同为奇异向量 $\Longleftrightarrow s_1 = a\bar{b} - a\overline{b_1} \in L \subseteq K_J$，$s = a^{-1}\overline{s_1}\,\overline{a^{-1}} = a^{-1}(b - b_1) \in L$，$b = b_1 + as$. 于是 $T_{au+bv+w_0} = \rho_{v,s}^{-1} T_{au+b_1v+w_0}\,\rho_{v,s} \in X$.

下面开始证明 D 是体. 为此，需证明它对加、减、乘、求逆等运算的封闭性.

首先，由 D^* 的定义及 $T_w < X$ 知 $1 \in D^*$.

(3.3.4.3) D^* 对乘法封闭：

对任意的 $a \in D^*$，双曲旋转 $\Lambda_{u,v,a} \in \mathrm{U}(n, K, h, L)$ 将 u、v 分别送到 au，$\bar{a}^{-1}v$，并且定驻所有的 $x \in U^\perp$，从而将 $X = \langle T_u, T_v, T_{u+\delta v+w_0}\rangle$ 共轭到 $\langle T_u, T_v, T_{au+\delta\bar{a}^{-1}v+w_0}\rangle \leq X$. 对 a、$b \in D^*$，$\Lambda_{u,v,a}$，$\Lambda_{u,v,b}$ 都将 X 共轭到 X 中，它们的乘积 $\Lambda_{u,v,ba}$ 也就将 X 共轭到 X 中. 特别是，

$$\Lambda_{u,v,ba}^{-1} T_{u+\delta v+w_0} \Lambda_{u,v,ba} = T_{(ba)u+\delta\overline{(ba)}^{-1}+w_0} < X.$$

这就证明了所需的结论 $a、b \in D^* \Longrightarrow ba \in D^*$.

(3.3.4.4) D 包含 L 及所有的 $\delta + s(s \in L)$，且当 $\delta + s \neq 0$ 时 $(\delta + s)^{-1} \in D^*$.

将 T_U 在 U 上的作用在基 $u、v$ 下写成矩阵群，则对任意的 $s \in L\backslash\{0, 1\}$，有

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s^{-1}-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

即 $\Lambda_{u,v,s} = \rho_{u,s^{-1}}\rho_{v,s-1}\rho_{u,-1}\rho_{v,s^{-1}-1} \in T_U$，从而

$$\Lambda_{u,v,s}^{-1} T_{u+\delta v+w_0} \Lambda_{u,v,s} = T_{su+\delta s^{-1}v+w_0} < X$$

对所有的 $0 \neq s \in L$ 成立. 且

$$\rho_{u,s} T_{su+\delta s^{-1}v+w_0} \rho_{u,s}^{-1} = T_{(s+\delta)u+\delta s^{-1}v+w_0} < X,$$

从而 $s + \delta \in D$.

对 $s \in L$，有 $-s-\delta-\overline{\delta} \in L$，从而

$$(-s-\delta-\overline{\delta}) + \delta = -\overline{(s+\delta)} \in D.$$

当 $s+\delta \neq 0$ 时，有 $-(s+\delta)^{-1}\overline{(s+\delta)^{-1}} \in L\backslash\{0\} \subseteq D^*$. 由 D^* 对乘法封闭得

$$-(s+\delta)^{-1}\overline{(s+\delta)^{-1}} \cdot (-\overline{(s+\delta)}) = (s+\delta)^{-1} \in D^*.$$

(3.3.4.5) 当 K 是域，且 L 满足引理的结论(2)所述条件时，$X \geq T_W$ 成立.

当 $L = K$ 时，由(3.3.4.4)立即得 $D = K$，再由(3.3.4.1)得 $X \geq T_W$. 以下设 $L \neq K$，$[K : F] = 2$.

由 $w = u + \delta v + w_0$ 是奇异向量知

$$Q(w) \equiv \overline{\delta} + Q(w_0) \equiv 0 (\bmod L).$$

如果 $\delta \in L$，则 $Q(w_0) \in L \subseteq K_J$，$w_0$ 是奇异向量，并且是迷向向量，含于 Rad$W$，W 不是 L-正则子空间. 此时按引理的假设有

$L \supsetneqq F$，存在 $\beta \in L \backslash F$，所有的 $s+\beta(s \in F)$ 都含于 L，从而含于 D^*. 如果 $\delta \notin L$，则 $\delta \notin F$，且由(3.3.4.4)知 $s+\delta \in D^*$ 对所有的 $s \in F \subseteq L$ 成立. 总之，在两种情形下都存在 $\beta \in K^* \backslash F$ 使 $s+\beta \in D^*$ 对所有的 $s \in F$ 成立. 由 $[K:F]=2$ 及 $\beta \notin F$，有 $K=F \oplus F\beta$，每个 $a \in K^*$ 可写成 $a=a_0+a_1\beta$ 的形式，其中 a_0、$a_1 \in F$ 不全为 0. 当 $a_1=0$ 时，已有 $a \in L \subseteq D$. 当 $a_1 \neq 0$ 时，$a_1 \in L$ 及 $a_1^{-1}a_0+\beta$ 都含于 D^*，从而由(3.3.4.3)知，它们的乘积 $a_1(a_1^{-1}a_0+\beta)=a$ 含于 D^*. 这证明了 $D=K$，再由(3.3.4.1)即得 $X \geq T_W$. 引理的结论(2)成立.

至此我们已完成了 K 是域时，对结论(2)的证明，这对于在 K 是域的情形下证明定理 3.3.1 已经足够了. 下面的论证过程(3.3.4.6)～(3.3.4.9)是专门为 K 在非交换的情形设计的. 主要目的是要证明 D 是体. 但它们仍适用于 K 是域的情形，只有(3.3.4.6)对 $|L|=2$ 即 $K=F_4$ 的情形不适用. 为了本引理结论的完整性起见，我们要说明在 $K=F_4$ 时，D 仍是 K 的子域. 当 $\delta \notin L$ 时，已经知道 $D=K$ 是域. 当 $\delta \in L=F_2$ 时，如果 $D=F_2$，它当然仍是域；否则，D^* 包含 $a \notin F_J$，a 生成的乘法群等于 F_4^*，由 D^* 对乘法的封闭性知道 $D=F_4=K$. 因此，在以下的证明中，我们只排除 $K=F_4$ 即 $L=F_2$ 的情形. 假定 $|L| \geq 3$，而且对 $K=F_9$ 的情形，由于已经知道当 $\delta \notin L$ 时，$D=K$ 是域，我们假定 $\delta \in L=F_3$.

(3.3.4.6) $a \in D^* \Longrightarrow a+1 \in D$.

当 $a \in L$ 时，显然有 $a+1 \in L \subseteq D$，因而设 $a \notin L$. 注意，$T_{u+(\delta+s)v+w_0} < X$ 对所有的 $s \in L$ 成立，可用任何一个 $\delta+s(s \in L)$ 来代替 δ. 当 $|\delta+L|=|L| \geq 4$ 时，可在 $\delta+L$ 中选择 δ，使它不等于 0、1 和 $-\bar{a}^{-1}$. 当 $|L|=3$ 时，$K=F_9$，此时已假定 $\delta \in L$，只须在 $\delta+L=L=F_3$ 中选取 $\delta=-1$，则 δ 当然不会等于 $-\bar{a}^{-1} \notin L$，仍符合要求.

由(3.3.4.4) 有 $\delta^{-1} \in D^*$，且 $-a^{-1}\overline{a^{-1}} \in L \subseteq D$，再由 D^*

对乘法的封闭性，得 $b=\delta^{-1}\cdot a\cdot(-a^{-1}\overline{a^{-1}})\in D^*$. 由于已选取 $\delta\neq-\overline{a}^{-1}$，故 $b\neq 1$. 记 $y_1=bu+\delta\overline{b}^{-1}v+w_0$，由(3.3.4.2)知 $b\in D^*\implies T_{y_1}<X$. 又对任意的 s、$\lambda\in L$，记 $y_0=u+(\delta+s)v+w_0$，则 $\rho_{y_0,\lambda}\in T_{y_0}<X$. 从而 $\rho_{y_0,\lambda}^{-1}T_{y_1}\rho_{y_0,\lambda}=T_{y_2}<X$ 对 $y_2=y_1\rho_{y_0,\lambda}=y_1+(y_1,y_0)\lambda y_0$ 成立. 特别地，我们取

$$s=b^{-1}\overline{\delta}+\delta\overline{b^{-1}}-(\delta+\overline{\delta})\in L,$$

$$\lambda=\overline{(b^{-1}-1)^{-1}}(b^{-1}-1)^{-1}\in L,$$

得

$$\begin{aligned}(y_1,y_0)\lambda&=(bu+\delta\overline{b}^{-1}v+w_0,\ u+(\delta+s)v+w_0)\lambda\\&=(b(\overline{\delta}+s)-\delta\overline{b}^{-1}+\delta-\overline{\delta})\lambda\\&=(b\delta\overline{b}^{-1}-b\delta-\delta\overline{b}^{-1}+\delta)\lambda\\&=(b-1)\delta(\overline{b}^{-1}-1)\cdot\overline{(b^{-1}-1)^{-1}}(b^{-1}-1)^{-1}\\&=(b-1)\delta(b^{-1}-1)^{-1},\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}y_2=&(bu+\delta\overline{b}^{-1}v+w_0)+(b-1)\delta(b^{-1}-1)^{-1}\\&\times(u+(\delta+s)v+w_0)=a_1u+b_1v+c_1w_0,\end{aligned}$$

其中

$$a_1=b+(b-1)\delta(b^{-1}-1)^{-1},$$

$$c_1=1+(b-1)\delta(b^{-1}-1)^{-1}.$$

我们有 $T_{y_2}=T_{c_1^{-1}y_2}=T_{c_1^{-1}a_1u+b_2v+w_0}<X$，故

$$\begin{aligned}a_2=c_1^{-1}a_1=&(1+(b-1)\delta(b^{-1}-1)^{-1})^{-1}\\&\times(b+(b-1)\delta(b^{-1}-1)^{-1})\in D^*.\end{aligned}\tag{3.1}$$

通过直接计算可以对体 K 中任意 $b\neq 0$、1 及 δ 验证恒等式：

$$\begin{aligned}&[1+(b-1)\delta(b^{-1}-1)^{-1}](1-\delta)\\&=[b+(b-1)\delta(b^{-1}-1)^{-1}](b^{-1}-\delta).\end{aligned}\tag{3.2}$$

于是(3.1)式化简为 $a_2 = (1-\delta)(b^{-1}-\delta)^{-1} \in D^*$. 将 $b = -\delta^{-1}\overline{a}^{-1}$ 代入,得到

$$a_2 = (1-\delta)(-\overline{a}\delta-\delta)^{-1} = (\delta-1)\delta^{-1}(\overline{a}+1)^{-1} \in D^*.$$

再由(3.3.4.4)知 δ、$(\delta-1)^{-1}$、$\overline{(a+1)}(a+1) \in D^*$. 于是由(3.3.4.3)有

$$a+1 = \delta\cdot(\delta-1)^{-1}\cdot a_2\cdot\overline{(a+1)}(a+1) \in D^*,$$

如所欲证.

(3.3.4.7) *D^* 对求逆封闭*: $a \in D^* \Longrightarrow a^{-1} \in D^*$.

由 $a \in D$ 及 $-1 \in L \subseteq D$, 得 $(-1)a = -a \in D^*$. 在此证明 $-a+s \in D$ 对所有 $s \in L$ 成立. 当 $s=0$ 时,是显然的;设 $s \neq 0$, 则 $s^{-1} \in L\backslash\{0\} \subseteq D^*$. 故

$$-a \in D^* \Longrightarrow s^{-1}(-a) \in D^* \Longrightarrow -s^{-1}a+1 \in D$$

$$\Longrightarrow s(-s^{-1}a+1) = -a+s \in D.$$

特别地,可取 $s = a+\overline{a} \in L$, 得 $-a+(a+\overline{a}) = \overline{a} \in D$. 又 $a^{-1}\overline{a^{-1}} \in L \subseteq D$, 故 $(a^{-1}\overline{a^{-1}})\overline{a} = a^{-1} \in L$.

(3.3.4.8) *D 对加减运算封闭*: a、$b \in D \Longrightarrow a \pm b \in D$.

当 $a=0$ 时显然;设 $a \neq 0$, 由 D^* 对求逆运算的封闭性可知 $a \in D^* \Longrightarrow a^{-1} \in D^*$. 再由 D^* 对乘法封闭及 $\pm 1 \in L \subseteq D$ 得 $\pm a^{-1}b \in D$. 由(3.3.4.6)得 $1 \pm a^{-1}b \in D$. 再由 D^* 对乘法封闭得 $a(1 \pm a^{-1}b) = a \pm b \in D$.

(3.3.4.9) *D 是体,引理的结论全部成立.*

由(3.3.4.3)、(3.3.4.7)、(3.3.4.8)知 D 是体,又由(3.3.4.4)有 $D \supseteq L \cup \{\delta\}$,即引理的结论(1)成立. 如果 L 不含于 K 的中心 $Z(K)$,由§1.7引理1.7.8(1)知 $D=K$, 引理的结论(3)成立. 当 K 非交换且 L 含于 K 的中心时,由§1.7引理1.7.8(2)知 $L=Z(K)$, K 是 L 上广义四元数体,本引理结论(4)成立. ▌

引理 3.3.5　设 u、v 是奇异向量，且 $(u, v) = 1$，$w = u + \delta v + w_0$ 是奇异向量，其中 $\delta \in K$，$w_0 \in \langle u, v\rangle^{\perp}$. 记 $W = \langle u, v, w\rangle$. 如果有至少 3 维的子空间 W_1 包含 u、v，且使 $w_0 \in W_1^{\perp}$，则：

(1) 对任意 $\alpha \in \{Q(x) \neq 0 | x \in W_1 \cap \langle u, v\rangle^{\perp}\}$，存在 $g \in T_{W_1}$ 将 $u \mapsto \alpha u$，$v \mapsto \bar{\alpha}^{-1} v$.

(2) 如果 W_1 非退化，则 $\mathrm{TU}(V, h, L)$ 的子群 $X = \langle T_{W_1}, T_w\rangle$ 包含 T_W.

(3) 如果 K 是域，L 是 K 的指数为 2 的子域，且 W_1 是 L-正则子空间，则 $X = \langle T_{W_1}, T_w\rangle$ 包含 T_W.

证明　(1) 如果奇异向量 u_1、$v_1 \in W_1$ 满足条件 $0 \neq (u_1, v_1) \in L$，则 $\langle T_{u_1}, T_{v_1}\rangle < X$ 可将 $u_1 \mapsto v_1$.

记 $U = \langle u, v\rangle$，$W_0 = U^{\perp} \cap W_1$，则 $W_1 = U \oplus W_0$. 对任意 $0 \neq \alpha = Q(x)$，$x \in W_0$，取奇异向量 $w_1 = \alpha u - v + x \in W_1$，则由 $(u_1, w_1) = -1 \in L$，$(w_1, \bar{\alpha}^{-1} v) = 1 \in L$ 及 $(\bar{\alpha}^{-1} v, \alpha u) = -1 \in L$ 知 $T_{\langle u, v, w_1\rangle} \leq X$ 可将 $u \mapsto w_1 \mapsto \bar{\alpha}^{-1} v \mapsto \alpha u$，同时将 $v \mapsto v_1 \in \langle u, v, w_1\rangle$，使 $(\alpha u, v_1) = (u, v) = 1$. 因而 $v_1 = \bar{\alpha}^{-1}(au + v + cx)$，$a$、$c \in F$. 由 $\langle v_1\rangle = \langle au + v + cx\rangle$ 是奇异线，知

$$a + c\alpha\bar{c} \in L,\ -a \equiv c\alpha\bar{c} \equiv Q(-cx) (\mathrm{mod}\ L).$$

$T_{\langle u, v, x\rangle} < T_{W_1} < X$ 包含根元素

$$t_{u, -a, -cx} : z \mapsto z + (z, -cx)u + (z, u)(-cx - au),$$

它在定驻 u 的同时将 $v \mapsto v + cx + au$. 从而 $t_{u, -a, -cx}^{-1} \in T_{W_1}$ 在定驻 αu 的同时将 $\bar{\alpha}^{-1}(au + v + cx) \mapsto \bar{\alpha}^{-1} v$. 这就证明了 T_{W_1} 可以将 u、v 分别送到 αu，$\bar{\alpha}^{-1} v$，同时将 $T_{u+\delta v+w_0} < X$ 共轭到 $T_{\alpha u+\delta\bar{\alpha}^{-1} v+w_0} < X$.

(2) 记 $D^* = \{\alpha \in K | T_{\alpha u+\delta\bar{\alpha}^{-1} v+w_0} < X\}$，$D = D^* \cup \{0\}$. 由引理 3.3.4 知 D 是 K 的子体并且包含 L. 在(1)中已证明所有的 $Q(x)(x \in W_0)$ 含于 D. 只要能证明所有这些 $Q(x)$ 与 L 一起生成体 K，则 $X > T_W$. 当 $L = K$ 时是显然的. 只须考虑 $L \neq K$ 的情

形.

由于 W_1 及双曲平面 $U=\langle u, v\rangle$ 非退化，$W_0=U^{\perp}\cap W_1\neq 0$ 非退化，含有互不正交的向量 x 和 y. 并可用 $(x, y)^{-1}x$ 代替 x，化为 $(x, y)=1$ 的情形. 对任意 $a\in K^*$，

$$a=(ax, y)\equiv Q(ax+y)-Q(ax)-Q(y)(\mathrm{mod}\ L).$$

即存在 $s\in L$，使 $a=Q(ax+y)-Q(ax)-Q(y)+s$. 由 $Q(ax+y)$、$Q(ax)$、$Q(y)$、$s\in D$ 即知 $a\in D^*$. 这就证明了 $D^*=K^*$，$D=K$，$X\leq T_W$.

(3) 任取非奇异向量 $x\in W_0$，则由 D 包含 L 及 $Q(x)\notin L$ 知 D 包含子域 $L[Q(x)]=K$. 这导致 $X\leq T_W$. ▌

在引理 3.3.3～3.3.5 的基础上，在下面的引理 3.3.6 中讨论了连通链张成更高维数的空间的情况.

引理 3.3.6 设 $U_1, \cdots, U_d$ 是从 V 中取出的连通链，张成 L-正则子空间 W，群 $X_1=\langle T_{U_1}, \cdots, T_{U_d}\rangle$. 则：

(1) 当 $L=K\neq F_2$，或当 L 不含于 K 的中心时，或当 K 是域且 L 真包含 K 的一个指数为 2 的子域时，$X_1=T_W$.

在其余情形下，设 U_0 是 W 中由奇异线张成的至少 3 维且非全迷向的子空间，$\dim(\mathrm{Rad}U_0)-\dim(U_0\cap\mathrm{Rad}W)\leq 1$，且满足下面的条件，则 $\langle X_1, T_{U_0}\rangle=T_W$.

(a) 当 K 是域，且 L 是 K 的指数为 2 的子域且不等于 F_2 时，U_0 是 L-正则子空间；

(b) 当 K 是以 L 为中心的广义四元数体时，U_0 非退化；

(c) 当 $L=F_2$ (从而 $K=F_2$ 或 F_4)时，$\dim U_0\geq 4$；

(d) 当 K 是特征 2 的无限域，L 是 K 在 K^2 上的任意非零子空间时，U_0 是至少 4 维的非退化子空间.

特别是，如果 U_0 是至少 4 维的非退化子空间，则在所有的情况下都有 $\langle X_1, T_{U_0}\rangle=T_W$.

(2) 设 $K=F_4$，$L=F_2$，$\dim V\geq 4$，U_0 是三维非退化子空间，则 $\langle X_1, \mathrm{SU}(U_0)\rangle=T_W$. 如果有某个 $U_i(1\leq i\leq d)$ 含有奇异

向量 $u \notin U_0^{\perp}$，使$\langle U_0, u\rangle$退化，则 $\langle X_1, T_{U_0}\rangle = T_W$.

证明 (1) 当 $L = K \neq F_2$，或 $L \not\subseteq Z(K)$，或 K 是域，且 L 真包含 K 的一个指数为 2 的子域时，L 生成的子体都等于 K. 在这些情形下，我们也定义一个 U_0 如下：任取非零奇异向量 $u_0 \in U_1$，由于$U_i(1 \leq i \leq d)$张成 L-正则子空间 W，而 $u_0 \notin \mathrm{Rad}W$，必有某个 U_i 含有奇异向量 $v_0 \notin u_0^{\perp}$. 记 $U_0 = \langle u_0, v_0\rangle$，则 U_0 是双曲平面. 且由引理 3.3.3(1)知 $T_{U_0} \leq X_1$. 记 $X = \langle X_1, T_{U_0}\rangle$，则 $X = X_1$.

这样，在所有的情形下，我们都定义了一个 U_0，使

$$\dim(\mathrm{Rad}U_0) - \dim(U_0 \cap \mathrm{Rad}W) \leq 1.$$

需要证明的是 $X = \langle X_1, T_{U_0}\rangle = T_W$.

取 W 的由奇异线张成的最大维数的子空间 W_1，使之满足下面的条件：

$$W_1 \supseteq U_0,\ \dim(\mathrm{Rad}W_1) - \dim(W_1 \cap \mathrm{Rad}W) \leq 1,$$

$$\text{且 } T_{W_1} \leq X.$$

只须证明 $W_1 = W$.

情况 1 $\mathrm{Rad}W_1 \not\subseteq \mathrm{Rad}W$. 按我们对 W_1 的假设，应有

$$\dim\mathrm{Rad}W_1 = \dim(W_1 \cap \mathrm{Rad}W) + 1.$$

如果 $\mathrm{Rad}W_1$ 中含有奇异线$\langle v_0\rangle$，由 W 是 L-正则子空间知 $v_0 \notin \mathrm{Rad}W$，$\mathrm{Rad}W_1 = \langle v_0\rangle \oplus (W_1 \cap \mathrm{Rad}W)$，且易见$\langle v_0\rangle$是 $\mathrm{Rad}W_1$ 中仅有的一条奇异线. 如果 $\mathrm{Rad}W_1$ 中不含奇异线，则任取 $v_0 \in (\mathrm{Rad}W_1)\backslash(\mathrm{Rad}W)$，仍有

$$\mathrm{Rad}W_1 = \langle v_0\rangle \oplus (W_1 \cap \mathrm{Rad}W).$$

由于 $v_0 \notin \mathrm{Rad}W$，而 W 由 $U_i(1 \leq i \leq d)$ 张成，必有某个 U_i 含有奇异向量 u_0，使 $(u_0, v_0) = 1$. 记 $W_2 = W_1 \oplus \langle u_0\rangle \supsetneq W_1$，则 $\mathrm{Rad}W_2 \subseteq \mathrm{Rad}W$. 我们有 $T_{u_0} \leq T_{U_i} < X$. 只要能证明 $T_{W_2} =$

$\langle T_{W_1}, T_{u_0}\rangle$，则 $T_{W_2} \leq X$. 就得到了与 $\dim W_1$ 的最大性相矛盾. 为达到这个目的，只须证明：对 W_2 中任何不含于 W_1 的奇异线 $\langle v\rangle$，有 $T_v < X$. 在每一条这样的奇异线中，可适当选取非零向量 v，使 $v = w + u_0$, $w \in W_1$.

先设 w 奇异：若 $(w, u_0) \neq 0$，则由引理 3.3.3 立即得 $T_v < \langle T_w, T_{u_0}\rangle < X$.

设 $(w, u_0) = 0$，如果 v_0 奇异，则由 $(u_0, v_0) = 1 \in L$ 知 $u_0 + v_0$ 奇异，再由引理 3.3.3 得 $T_{u_0+v_0} < \langle T_{u_0}, T_{v_0}\rangle < X$. 又 $(w, v_0) = 0$, $w - v_0$ 奇异，由 $(w - v_0, u_0 + v_0) = 1$ 及 $w + u_0 = (w - v_0) + (u_0 + v_0)$ 得 $T_{w+u_0} < X$. 现在设 v_0 非奇异，则 $\mathrm{Rad}W_1$ 不含奇异向量，奇异向量 $w \notin \mathrm{Rad}W_1$，存在奇异向量 $w_1 \in W_1 \cap u_0^{\perp}$ 使 $(w, w_1) = 1$. 由 $v_0 \in \mathrm{Rad}W_1$ 迷向而非奇异知 $L \subsetneq K_J$，这种情况只有在 K 是特征 2 的无限体时才可能出现. 此时 L 是无限集合，从中可选取非零元 $s \neq 1$. $v_1 = Q(v_0)s^{-1}w + sw_1 + v_0 \in W_1$ 是奇异向量，且 $(u_0, v_1) = 1 \in L$，故 $T_{u_0+v_1} < \langle T_{u_0}, T_{v_1}\rangle \leq X$. 又 $(w, v_1) = s \in L$, $w + v_1$ 是 W_1 中的奇异向量，且 $(u_0 + v_1, w + v_1) = s + 1$ 是 L 中的非零元，于是对 $v = u_0 + w = (u_0 + v_1) + (w + v_1)$ 有 $T_v < X$.

再设 w 非奇异：由 $Q(w) \notin L$ 知 $L \neq K$, $\mathrm{TU}(V, h, L)$ 不是辛群.

先考虑 $w \notin \mathrm{Rad}W_1$ 的情形. 由于 W_1 可被奇异线张成，w 必与 W_1 中某条奇异线 $\langle u_1\rangle$ 不正交. $\langle u_1, w\rangle$ 是双曲平面，可在其中选取奇异向量 u_1、v_1 使 $(u_1, v_1) = 1$，而 $w = a_1u_1 + b_1v_1$ 对某一对 a_1、$b_1 \in K^*$ 成立. 当然 $(u_0, w) \neq 0$，否则，$v = u_0 + w$ 非奇异. 于是可写 $u_0 = a_0u_1 + b_0v_1 + w_0$ 使 $0 \neq w_0 \in \langle u_1, v_1\rangle^{\perp}$，其中 a_0、$b_0 \in K^*$ 不全为零. 如果 $a_0 = 0$，则 $b_0 \neq 0$，不妨一开始用双曲对 $\{u_1, v_1 - u_1\}$ 代替 $\{u_1, v_1\}$，化为 a_0、b_0 都不为 0 的情形. 同理，当 $b_0 = 0$ 时，可用 $\{u_1 - v_1, v_1\}$ 代替 $\{u_1, v_1\}$，使 a_0、b_0 都不为 0. 故设 a_0、b_0 都不为 0，且可用双曲对 $\{a_0u_1, \overline{a_0}^{-1}v_1\}$ 代替 $\{u_1, v_1\}$，使

$u_0 = u_1 + \delta v_1 + w_0$ 对某个 $\delta \in K^*$ 成立. 而 w 具有形式 $w = a_1u_1 + b_1v_1$，从而 $v = u_0 + w$ 具有形式 $v = au_1 + bv_1 + w_0$. 如果 L 不含于 K 的中心 $Z(K)$，则由引理 3.3.4(3)得 $T_v < \langle T_{u_1}, T_{v_1}, T_{u_0}\rangle \leq X$. 设 L 含于 K 的中心. 记 $W_0 = w_0^{\perp} \cap W_1$，则双曲平面 $\langle u_1, v_1\rangle$含于 W_0. 且由 $(u_0, v_0) = 1$ 及 u_1、$v_1 \in v_0^{\perp}$ 知 $(w_0, v_0) = 1$，$v_0 \notin W_0$. 另一方面，当然 $W_1 \cap \mathrm{Rad}W$ 含于 W_0，进而含于 $\mathrm{Rad}W_0$，可记 $W_0 = V_0 \oplus (W_1 \cap \mathrm{Rad}W)$，使 $V_0 \supseteq \langle u_1, v_1\rangle$，则

$$W_1 = W_0 \oplus \langle v_0\rangle = V_0 \oplus \mathrm{Rad}W_1.$$

这说明 V_0 非退化，$\mathrm{Rad}W_0 = W_1 \cap \mathrm{Rad}W$，$W_0$ 是 L-正则子空间. 如果 $\dim V_0 \geq 3$，则可用引理 3.3.5(2)得到 $T_v < \langle T_{W_0}, T_{u_0}\rangle < X$. 设 $\dim V_0 = 2$，即 $V_0 = \langle u_1, v_1\rangle$，$W_1 = \langle u_1, v_1\rangle \oplus \mathrm{Rad}W_1$. 这样的 W_1 不可能包含维数≥3 的非退化子空间. 按我们的假设，W_1 包含至少 3 维的子空间 U_0. 但在引理条件(b)、(c)、(d)所说的情形下，U_0 都包含至少 3 维的非退化子空间，因而都不可能含于 W_1，引起矛盾(注意，在引理条件(c)的情形下，$K = F_4$，$L = F_2$，L-正则子空间 W 非退化，引理的要求 $\dim U_0 \geq 4$ 及 $\dim(\mathrm{Rad}U_0) \leq 1$ 导致 U_0 包含至少 3 维的非退化子空间).

排除了这些引起矛盾的情况后，唯一剩下的情形是引理条件(a)所说的情形：K 是特征 2 的非完全域，L 是 K 的指数为 2 的子域. 此时如果 w_0 非奇异，则由引理 3.3.5(3)仍得 $T_v < X$. 设 w_0 奇异，再由 $u_0 = u_1 + \delta v_1 + w_0$ 奇异及 $w_0 \in \langle u_1, v_1\rangle^{\perp}$ 知 $u_2 = u_1 + \delta v_1$ 奇异. 奇异向量 u_2 和非奇异向量 $w = a_1u_1 + b_1v_1$ 都含于双曲平面$\langle u_1, v_1\rangle$，组成这个平面的一组基，不可能相互正交，内积 $(u_2, w) = c \neq 0$. 取 $a = Q(w)c^{-1} \in K^*$，$v_2 = au_2 + w$，则 $Q(v_2) \equiv ac + Q(w) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ L)$，$v_2$ 是奇异向量，$\langle u_2, v_2\rangle = \langle u_1, v_1\rangle$，$w = au_2 + v_2$. 由于 au_2 是 W_1 中的奇异向量，且正交于 $u_0 = u_2 + w_0$，$u_0 + au_2$ 也是奇异向量. 将前面对 w 奇异的情形已证明的结论应用于奇异向量 $au_2 \in W_1$，得 $T_{u_0+au_2} < X$，再应用于奇异向量 $v_2 \in W_1$，得 $T_{(u_0+au_2)+v_2} < X$，其中 $(u_0 + au_2) + v_2 =$

$u_0 + w = v$，故 $T_v < X$.

还需考虑 $w \in \mathrm{Rad}W_1$ 的情形，W_1 与 u_0 不正交，并且 W_1 可由奇异线张成. 因此，从 W_1 中可选奇异向量 $v_1 \notin \mathrm{Rad}W_1$ 使 $(u_0, v_1) = 1$. $\tilde{u}_0 = u_0 + v_1$ 奇异，且 $T_{\tilde{u}_0} < \langle T_{u_0}, T_{v_1} \rangle \leq X$，$(\tilde{u}_0, v_0) = (u_0, v_0) = 1$. 取 $\tilde{w} = w - v_1 \notin \mathrm{Rad}W_1$，则 $\tilde{u}_0 + \tilde{w} = u_0 + w = v$ 奇异. 对 $\tilde{u}_0$ 和 $\tilde{w}$ 可应用前面对 $w \notin \mathrm{Rad}W_1$ 已证明的结果，得到 $T_v = T_{\tilde{u}_0 + \tilde{w}} < X$，恰如所需.

情况 2　$\mathrm{Rad}W_1 \subseteq \mathrm{Rad}W$，即 $\mathrm{Rad}W_1 = W_1 \cap \mathrm{Rad}W$.

W 是 L-正则空间，$\mathrm{Rad}W$ 不包含奇异线，$\mathrm{Rad}W_1$ 也就不包含奇异线. 而 W_1 可被奇异线张成，可任取其中一条奇异线扩张为 $\mathrm{Rad}W_1$ 在 W_1 中的一个补空间 W_0，使 $W_1 = W_0 \oplus \mathrm{Rad}W_1$. 则 W_0 非退化，且可由奇异线张成.

如果 $W_1 \neq W$，则某个 U_i 含有奇异向量 $u \notin W_1 \cup W_1^{\perp}$. 记 $u = x_1 + x_0$ 使 $x_1 \in W_0$，$x_0 \in W_0^{\perp}$，则 x_1、x_0 都不为 0，$x_0 \in W_1^{\perp}$ 且 $x_0 \notin W_1$. 可选奇异向量 u_1、$v_1 \in W_0$ 使 $(u_1, v_1) = (x_1, v_1) = 1$，$x_1 = u_1 + \delta v_1$，且由 $Q(u) \equiv \bar{\delta} + Q(x_0) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ L)$ 知 $\delta \equiv -\overline{Q(x_0)} \equiv Q(x_0) (\mathrm{mod}\ L)$.

记 $W_2 = W_1 \oplus \langle u \rangle = W_1 \perp \langle x_0 \rangle$. 我们证明 $T_{W_2} < X$ 对 $W_2 = W_1 \perp \langle x_0 \rangle$ 成立，从而得到与 $\dim W_1$ 的最大性相矛盾. 为此，只须证明，对 W_2 中任何不含于 W_1 的奇异线 $\langle v \rangle$ 有 $T_v < X$. 在每条这样的奇异线 $\langle v \rangle$ 中适当选择 v 可使 $v = y_1 + x_0$，其中 $y_1 \in W_1$. 由

$$Q(v) = Q(y_1 + x_0) \equiv Q(y_1) + Q(x_0) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ L)$$

及
$$Q(u) = Q(x_1 + x_0) \equiv Q(x_1) + Q(x_0) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ L)$$

得
$$Q(x_1) \equiv Q(y_1) (\mathrm{mod}\ L).$$

先设 $v \notin W_0^{\perp}$，即 $y_1 \notin \mathrm{Rad}W_1$. 由 Witt 扩张定理，作用于 W_1 上的酉群 $\mathrm{U}(W_1)$ 中有元素 g_0 将 y_1 送到 $x_1 = u_1 + \delta v_1$. 当 $L = K$ 时，$\mathrm{U}(W_1) = \mathrm{Sp}(W_1) = T_{W_1}$，$g_0 \in T_{W_1} < X$，已有 $T_v =$

$g_0 T_u g_0^{-1} < X$. 设 $L \neq K$. 由引理 1.6.1,存在 $a \in K^*$, 使U(W_0) 中的双曲旋转 $\Lambda_{u_1, v_1, a}$将 g_0 右乘到 $g_1 = g_0\Lambda_{u_1, v_1, a} \in \mathrm{TU}(W_0) = T_{W_0}$. 我们有

$$w_1 = y_1 g_1 = (u_1 + \delta v_1)\Lambda_{u_1, v_1, a} = au_1 + \delta \bar{a}^{-1} v_1.$$

如果 L 生成的子体等于 K,由引理 3.3.4 得

$$T_{vg_1} < \langle T_{(u_1, v_1)}, T_{u_1+\delta v_1+x_0}\rangle \leq \langle T_{W_1}, T_u\rangle \leq X.$$

剩下的情形是:L 生成的子体不等于 K. 此时如果属于引理所说的情况(b)、(c)或(d),则按引理要求 U_0 包含至少 3 维的非退化子空间,而 W_1 包含 U_0,故 W_0 也是至少 3 维的非退化子空间,可用引理 3.3.5(2)得 $T_{vg_1} < \langle T_{W_0}, T_{u_1+\delta v_1+x_0}\rangle < X$. 于是 $T_v = g_1 T_{vg_1} g_1^{-1} < X$. 在引理所说的情况(a)下,$W_1$ 包含至少 3 维的 L-正则子空间,由引理 3.3.5(3)可得所需结论 $T_v < X$.

还需考虑 $v \in W_1^{\perp}$ 的情形:取 W_0 中的奇异向量 $u_1 \neq 0$, 则对每个 $a \in K$, $u_1 + av$ 是 W_2 中的奇异向量,且不含于 $W_1^{\perp}$,按已证的结论有 $T_{u_1+av} < X$. 当 $K \neq F_2$ 时,由引理 3.2.3(2)得 $T_v < X$. 剩下 $K = F_2$ 的情形,此时 $L = K$, 所有的向量都是奇异向量,按引理假设(c),此时 W_1 是至少 4 维的非退化子空间,由 $W = \langle U_1, \cdots, U_d\rangle$ 非退化知:某个 U_i 含有向量 v_1 与 v 不正交. 如果 $v_1 \in W_1^{\perp}$, 则由 $u_1 + v$, $v_1 \in L(X)$ 及 $(u_1 + v, v_1) = 1$ 知 $(u_1 + v) + v_1 \in L(X)$, 可用 $(u_1 + v) + v_1 \in L(X)$ 代替 v_1,化为 $v_1 \notin W_1^{\perp}$ 的情形. 记 $v_1 = w_1 + y_0$ 使 $w_1 \in W_1$, $y_0 \in W_1^{\perp}$, 则 w_1、y_0 都不为 0, 且 $(v_0, y_0) = 1$. 在至少 4 维的非退化子空间 W_1 中可取 w_2 与 w_1 正交且不共线. $w_2 + v$ 与 $w_1 + y_0$ 都含于 $L(X)$且不正交,由引理 3.3.3(1)知它们的和 $v_2 = (w_2 + w_1) + (v + y_0) \in L(X)$. 又 v_2 与 $v_3 = (w_1 + w_2) + y_0 \in L(X)$ 不正交,于是又得 $v_2 + v_3 = v \in L(X)$. 即 $T_v < X$. 恰如所需.

(2) 记 $X = \langle X_1, T_{U_0}\rangle$, $Y = \langle X_1, \mathrm{SU}(U_0)\rangle$.

连通链 $U_1, \cdots, U_d$ 张成非退化子空间 W,而 $U_0 \subsetneq W$, 因此有

某个 U_i 含有迷向向量 $u \notin U_0 \cup U_0^\perp$. 记 $u = x_1 + x_0$ 使 $x_1 \in U_0$, $x_0 \in U_0^\perp$, 则 x_1、x_0 都不为 0. 记 $U = \langle U_0, u\rangle = U_0 \perp \langle x_0\rangle$. 只要能证明 $T_U \leq Y$, 且当 U 退化时 $T_U < X$, 由于 $\dim U = 4$ 且 $\dim(\mathrm{Rad}U) \leq 1$, 用本引理的结论(1)即可得 $Y = \langle X_1, T_U\rangle = T_W$, 或当 U 退化时 $X = \langle X_1, T_U\rangle = T_W$.

为达到这个目的,需要证明 $T_v < Y$ 或 $T_v < X$ 对 U 中不含于 U_0 的迷向线$\langle v\rangle$成立. 不妨在$\langle v\rangle$中选取 $v = y_1 + x_0$, 其中 $y_1 \in U_0$. 且由 u、v 都迷向知 $(x_1, x_1) = -(x_0, x_0) = (y_1, y_1)$.

如果 $y_1 \neq 0$, 则由 Witt 扩张定理知:存在 U_0 上的酉变换 g_0 将 $x_1 \mapsto y_1$. 3 维非退化子空间中含有非迷向向量 $x \in y_1^\perp$. 设 $\det g_0 = \lambda$, 则 $\lambda\bar{\lambda} = 1$, 用拟对称 $S_{x,\lambda^{-1}}$ 可将 g_0 右乘到 $g_1 \in \mathrm{SU}(U_0) \times 1_{U_0^\perp} < Y \leq T_W$. 且 g_1 仍将 $x_1 \mapsto y_1$, 从而将 $u \mapsto v$. 于是$T_v = g_1^{-1}T_u g_1 < Y$. 当 $y_1 = 0$ 时 $v = x_0$ 迷向,已证得 $T_{x_1+ax_0} < Y$ 对所有的 $a \in K$ 成立,且 $K = F_4 \neq F_2$, 由引理 3.3.3(2)得 $T_{x_0} < Y$. 这就证明了 $T_U \leq Y$.

下面证明:如果可从某个 U_i 中选迷向向量 $u \notin U_0 \cup U_0^\perp$ 使 $U = \langle U_0, u\rangle = U_0 \perp \langle x_0\rangle$ 退化,则 $T_U = \langle T_{U_0}, T_u\rangle < X$. 此时 u 在 U_0, $U_0^\perp$ 中的分量 x_1、x_0 都是非零迷向向量. 迷向向量 $v = y_1 + x_0 \in U$ 在 U_0 中的分量 y_1 也迷向.

先设 $y_1 \neq 0$, 如果 x_1、y_1 不共线,则由 $\nu(U_0) = 1$ 知 $(x_1, y_1) = a \neq 0$, $(x_1, ay_1) = a\bar{a} = 1$, $\rho_{x_1+ay_1,1} \in T_{U_0}$ 将 $x_1 \mapsto ay_1$, 从而 $T_{ay_1+y_0} = \rho_{x_1+y_1,1} T_u \rho_{x_1+y_1,1} < X$. 可用 $ay_1 + y_0$ 代替 u, 用 ay_1 代替 x_1,化为 x_1 与 y_1 共线的情形. 现在可设 $y_1 = cx_1$, $c \in K^*$. 当 $c \in L = F_2$ (即 $c = 1$)时 $v = u$, $T_v = T_u < X$. 设 $c \notin L$. 3 维非退化子空间 U_0 可写成 $U_0 = \langle x_1, x_{-1}\rangle \perp \langle w_0\rangle$ 的形式,其中 x_{-1}迷向,且 $(x_1, x_{-1}) = 1$, w_0 非迷向. $\theta = Q(w_0) \in F_4 \backslash F_2$, 因此 θ 是 F_4^* 的乘法群的生成元. 由引理 3.3.5(1)可知:存在 $g_0 \in T_{U_0}$ 将 $x_1 \mapsto \theta x_1$, $x_1 g_0^2 = \theta^2 x_1$. 而 $c = \theta^m$, $m = 1$ 或 2. 总之有 $g \in T_{U_0}$ 将 $x_1 \mapsto cx_1 = y_1$ 从而将 $T_u < X$ 共轭到 $T_v < X$. 已证明 $T_{x_1+ax_0} <$

X 对所有的 $a \in K$ 成立，由引理 3.3.3(2)即可得出 $T_{x_0} < X$. 这就证明了 $T_v < X$ 对 U 中所有的迷向线$\langle v \rangle$成立，$T_U \leq X$. 从而 $T_W = \langle X_1, T_U \rangle \leq X$, $X = T_W$. ▌

命题 3.3.2 的证明 X 中含有至少一个根子群 T_{u_1}, X 在 W 上不可约，必含有根子群 T_{u_2}不定驻$\langle u_1 \rangle$，因而 $u_2 \notin \langle u_1 \rangle \cup u_1^{\perp}$, u_1、u_2 组成连通链. 一般的，设已取根子群 $T_{u_i} < X(1 \leq i \leq k)$，使$\{u_1, \cdots, u_m\}$组成既约连通链，张成 V 的子空间 V_k，则当 $V_k \neq V$ 时有根子群 $T_{u_{k+1}} < X$ 不定驻 V_k, $u_{k+1} \not\subseteq V_k \cup V_k^{\perp}$, $\{u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}\}$ 组成连通链. 这就证明了：在 X 中可取出根子群 $T_{u_i}(1 \leq i \leq m)$，使$\{u_1, \cdots, u_m\}$组成既约连通链且张成 W. 所有这些 T_{u_i}生成 X 的一个子群 X_1，符合引理 3.3.6 的要求. 于是可用引理 3.3.6 得到结论 $X = T_V = G$. ▌

定理 3.3.1 的证明 X 是由 $G = \mathrm{TU}(V, h, L)$ 的某些长根子群 T_x 生成的不可约子群. 设 $L(X) = \{\langle x \rangle | T_x \leq X\}$ 是 X 所含的长根子群 $T_x < X$ 所对应的 L-奇异线组成的集合. 当然 $L(X)$不是空集合，可以从中取出 L-奇异线$\langle x_1 \rangle, \cdots, \langle x_r \rangle$来组成一个具有最大长度 r 的既约连通链(每个 $\langle x_i \rangle (i \geq 2)$ 既不含于 $W_{i-1} = \langle x_1, \cdots, x_{i-1} \rangle$ 也不与 W_{i-1} 正交). 记 $W = \langle x_1, \cdots, x_r \rangle$，则 $\dim W = r \geq 1$. 对每个 $\langle x \rangle \in L(X)$，如果 $x \notin W \cup W^{\perp}$，则 $\langle x_1 \rangle, \cdots, \langle x_r \rangle, \langle x \rangle$是长度为 $r+1$ 的既约连通链，与 r 的最大性相违背. 这证明了 $L(X)$中每个$\langle x \rangle$含于 W 或含于 $W^{\perp}$. 在这两种情形下，长根子群 $T_x < X$ 都定驻子空间 W. 于是所有的 $T_x(\langle x \rangle \in L(X))$ 生成的群 X 也定驻 W. 由 X 在 V 上不可约知只能 $W = V$, $r = \dim V = n$.

当 L 不含于 K 的中心，或当 K 是域且 L 真包含 K 的一个指数为 2 的子域时，由引理 3.3.6 立即得

$$X \geq \langle T_{x_1}, \cdots, T_{x_r} \rangle = T_V = \mathrm{TU}(V, h, L),$$

从而 $X = \mathrm{TU}(V, h, L)$.

在剩下的情形里，由连通链的定义，x_1 与 x_2 不正交，$W_2 =$

$\langle x_1, x_2\rangle$ 是双曲平面. 由引理 3.3.3 知 $T_{W_2}=\langle T_{x_1}, T_{x_2}\rangle\leq X$. 当 $n=2$ 时,已有 $X=G$. 设 $n\geq 3$. 由既约连通链的定义又有 $x_3\notin W_2\cup W_2^{\perp}$. 记 $W_3=W_2\oplus\langle x_3\rangle$. 如果 K 是域且 W_3 是 L-正则子空间,则由引理 3.3.4 可得 $T_{W_3}=\langle T_{W_2}, T_{x_3}\rangle<X$. 如果此时还有 $L\neq F_2$,则在引理 3.3.6 中取 $U_0=W_3(\dim W_3=3)$ 可进一步得 $T_V=\langle T_{W_3}, T_{x_4}, \cdots, T_{x_n}\rangle<X$, 从而 $X=T_V=\mathrm{TU}(V, h, L)$.

于是只剩下以下情形需要处理:

剩余情形 1 K 是域, $L=K_J$ 是 K 的指数为 2 的子域,且不能从 $L(X)$ 中选出既约连通链 $\langle x_1\rangle, \cdots, \langle x_n\rangle$ 使 $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ 是 L-正则子空间.

剩余情形 2 $L=F_2$, $K=F_4$, 但不属于剩余情形 1.

剩余情形 3 K 是以 L 为中心的广义四元数体.

下面分别处理这些剩余情形:

剩余情形 1 K 是域, L 是 K 的指数为 2 的子域,且不能从 $L(X)$ 中取出既约连通链张成 3 维 L-正则子空间. 我们证明此时定理的结论 IR2 成立.

首先要指出:如果存在三条奇异线 $\langle x_i\rangle\in L(X)(i=1, 2, 3)$, 使得可适当选取 x_1、x_2、x_3 满足 $(x_1, x_2)=(x_1, x_3)=1$, 但 $(x_2, x_3)\notin L$, 则 $U_0=\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ 是 L-正则子空间,这与原假设矛盾. 为看出这一点,记 $x_3=ax_1+x_2+x_0$, 其中 $x_0\in\langle x_1, x_2\rangle^{\perp}$, $a=-\overline{(x_2, x_3)}\notin L$. 由 $Q(x_3)\equiv a+Q(x_0)\equiv 0(\mathrm{mod}\ L)$ 知 $Q(x_0)\equiv -a\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ L)$, 于是 $U_0=\langle x_1, x_2\rangle\perp\langle x_0\rangle$ 是 L-正则子空间.

设已任意选定 $\langle x_i\rangle\in L(X)(1\leq i\leq n)$ 组成具有最大长度的既约连通链,从而 $\{x_i|1\leq i\leq n\}$ 组成 V 的一组基. 我们证明可在每个 $\langle x\rangle\in L(X)$ 中适当选取非零向量 x,使所选出的向量两两的内积值含于子域 L,从而 $X\leq\mathrm{Sp}(n, L)$.

我们按下面的步骤选取奇异向量 $\{v_i|1\leq i\leq n\}$ 组成 V 的一组基,使 $T_{v_i}<X(\forall 1\leq i\leq n)$, 且 $(v_1, v_j)=1(\forall 2\leq j\leq n)$. 首

先在奇异线$\langle x_1\rangle$中任取非零向量作为第一个基向量v_1，由$\langle x_2\rangle$与$\langle v_1\rangle=\langle x_1\rangle$非正交，可选$v_2\in\langle x_2\rangle$使$(v_1, v_2)=1$. 一般地，对任意$2\leq j\leq n$，设已选好$v_1, \cdots, v_{j-1}$使$T_{v_k}<X$及$\langle v_1, \cdots, v_k\rangle=\langle x_1, \cdots, x_k\rangle$对所有的$1\leq k\leq j-1$成立，且当$k\geq 2$时，有$(v_1, v_k)=1$，我们按下面的方法选取$v_j$. 注意，$\langle v_1\rangle, \cdots, \langle v_{j-1}\rangle, \langle x_j\rangle$仍组成既约连通链. 如果$\langle x_j\rangle$与$\langle v_1\rangle$不正交，则可选$v_j\in\langle x_j\rangle$使$(v_1, v_j)=1$. 否则，设$\langle x_j\rangle\subseteq v_1^{\perp}$，由连通链的定义，$\langle x_j\rangle$与某个$\langle v_t\rangle(2\leq t\leq j-1)$不正交，可选$x_j\in\langle x_j\rangle$使$(v_t, x_j)=1$，从而$v_j=v_t+x_j$是奇异向量. 由引理 3.3.3 知$T_{v_j}<\langle T_{v_t}, T_{x_j}\rangle<X$. 且$(v_1, v_j)=(v_1, v_t)+(v_1, x_j)=1$及$(v_1, \cdots, v_j)=\langle x_1, \cdots, x_j\rangle$成立. 按此归纳过程即可选出所需要的$v_i(1\leq i\leq n)$.

对任意$1\leq i, j\leq n$，记$a_{ij}=(v_i, v_j)$. 设有某个$a_{ij}\notin L$. 当然$i\neq j$(因$a_{ii}=0\in L$)且$i, j\geq 2$(因$a_{1i}, a_{1j}\in\{0, 1\}\subseteq L$). 于是$U_0=\langle v_1, v_i, v_j\rangle$是$L$-正则子空间，这与原假设矛盾. 可见基向量$v_i(1\leq i\leq n)$之间两两的内积$a_{ij}=(v_i, v_j)$都应含于$L$，$f$在这组基下的矩阵$H=(a_{ij})_{n\times n}\in \mathrm{Mat}_n L$. 于是$H'=\overline{H}'=-H$，且对角元$a_{ii}=0$，即$H$是$L$上交错方阵. 再由$f$非退化知$H$可逆，$n$必须是偶数.

对每个$\langle x\rangle\in L(X)$，由V非退化知$\langle x\rangle$必与某个基向量v_t不正交. 取这样的最小的t，选$x\in\langle x\rangle$使$(v_t, x)=1$. 我们断言$(x, v_i)\in L$对所有的$1\leq i\leq n$成立. 若不然，设有某个$(x, v_j)=\theta\notin L$. 当然$j>t$，当$t=1$时，$(v_1, v_j)=(v_1, x)=1$且$(x, v_j)\notin L$，$\langle v_1, v_j, x\rangle$是$L$-正则子空间，产生矛盾，当$t\geq 2$时，由$(v_t, x)=1$知$y=v_t+x$是奇异向量，由引理 3.3.3 知$T_y<\langle T_{v_t}, T_x\rangle\leq X$，且$(v_1, y)=(v_1, v_t)+(v_1, x)=1=(v_1, v_j)$，但$(v_j, y)=(v_j, v_t)+(v_j, x)=a_{jt}+\theta\notin L$，仍然有矛盾. 这就证明了$b_j=(x, v_j)\in L$对所有的$1\leq j\leq n$成立. 将$V$在基$\{v_i|1\leq i\leq n\}$下写成行向量空间$\mathrm{Mat}_{1\times n}K$. 设$x\in V$在基$\{v_i|1\leq i\leq n\}$下的坐标为$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\in \mathrm{Mat}_{1\times n}K$，即$x=$

$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$，则 $b_j=(x, v_j)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_{ij}$，即 $(b_1, \cdots, b_n)=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)H$，其中 $H=(a_{ij})_{n\times n}\in \mathrm{GL}(n, L)$. 从而 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)=(b_1, \cdots, b_n)H^{-1}$. 将 V 在基 $\{v_i \mid 1\leq i\leq n\}$ 下写成行向量空间 $\mathrm{Mat}_{1\times n}K$，而将 G 在这组基下写成矩阵群. 对每个长根子群 $T_x < X$，前面已证明可在 $\langle x\rangle$ 中选 x，使 $b_i=(x, v_i)\in L$，$\forall 1\leq i\leq n$. 再由 $H\in \mathrm{GL}(n, L)$ 知 $x=(b_1, \cdots, b_n)H^{-1}\in \mathrm{Mat}_{1\times n}L$. 于是 T_x 中的每个酉平延 $\rho_{x,s}(s\in L^*)$ 的矩阵

$$\begin{aligned}\rho_{x,s}&=I+Hx^t sx\in \mathrm{GL}(n, L)\cap \mathrm{TU}(n, K, H)\\&=\mathrm{Sp}(n, L, H).\end{aligned}$$

设 V_L 是 $\{v_i \mid 1\leq i\leq n\}$ 在 L 上张成的 n 维空间，则 $V=K\otimes_L V_L$ 上的内积 f 在 V_L 上的限制 f_L 是 V_L 上的非退化交错内积，矩阵群 $\mathrm{Sp}(n, L, H)$ 就是作用于 V_L 上的辛群 $\mathrm{Sp}(n, L, f_L)$. 每个 $T_x<X$ 也是 $\mathrm{Sp}(n, L, f_L)$ 的一个长根子群，同时也是 V_L 上的线性群 $\mathrm{SL}(n, L)$ 的根子群. 所有这些根子群 $T_x<X$ 生成的 X 可以看成 V_L 上的一个不可约子群. 于是可由关于线性群根子群的定理 3.2.1 得出：$X=\mathrm{Sp}(n, L, f_L)$，或当 $L=F_2$ 时，X 是嵌入 $\mathrm{Sp}(n,2)$ 中的正交群 $O^{\pm}(n, 2)$（但 $\neq O^{+}(4, 2)$）或对称群 S_{n+1} 或 S_{n+2}.

剩余情形 2 $K=F_4$，$L=F_2$. 但不属于剩余情形 1，即存在奇异线 $\langle x_i\rangle\in L(X)(i=1, 2, 3)$ 组成既约连通链，张成 3 维 L-正则子空间 W_3. W_3 也是非退化子空间. 由引理 3.3.4 的结论(2)知 $T_{W_3}\leq X$.

如果 $n=3$，则 $X=\mathrm{TU}(3, F_4, f)$. 设 $n\geq 4$，当然存在 $\langle x\rangle\in L(X)$ 使 $x\notin W_3\cup W_3^{\perp}$. 如果可选这样的 $\langle x\rangle$ 使 $W_4=\langle W_3, x\rangle$ 是 4 维退化子空间，则由引理 3.3.6 仍可得 $T_{W_4}\leq X$，进而 $X=G=\mathrm{TU}(n, K, f)$. 以下设无论怎样选择满足条件 $T_{W_3}<X$ 的 3 维非退化子空间和使 $x\notin W_3\cup W_3^{\perp}$ 的 $\langle x\rangle\in L(X)$，$W_4=\langle W_3, x\rangle$ 都是非退化子空间. 我们断言：此时 X 属于定理所说的

类型 IR3.

选定上面所说的非退化子空间 $W_4 = \langle W_3, x\rangle$. 任取 $0 \neq x \in \langle x\rangle$, 记 $x = w_1 + w_4$, 使 $w_1 \in W_3$, $w_4 \in W_3^\perp$, 则 w_1、w_4 都是非迷向向量, $(w_1, w_1) = (w_4, w_4) = 1$. 可将 w_1 扩充为 W_3 的一组非迷向正交基$\{w_1, w_2, w_3\}$, 则 $X_3 = T_{W_3}$ 就是非迷向线集 $L_3 = \{\langle w_i\rangle \mid i = 1, 2, 3\}$ 在 $SU(W_3)$中的稳定子群. 而 $X_4 = \langle T_{W_3}, T_x\rangle$ 是非迷向线集 $L_4 = \{\langle w_i\rangle \mid 1 \leq i \leq 4\}$ 在 $SU(W_4)$中的稳定子群. X_4 所含的长根子群形如 $T_{a_iw_i+a_jw_j}(1 \leq i < j \leq 4, a_ia_j \neq 0)$. 我们可以选取一个最大的自然数 $k \geq 4$, 使得存在一个 k 维非退化子空间 W_k 及其一组非迷向正交基 $\{w_i \mid 1 \leq i \leq k\}$, X 包含非迷向线集 $L_k = \{\langle w_i\rangle \mid 1 \leq i \leq k\}$ 在 $SU(W_k)$中的稳定子群 X_k. 而 X_k 由所有这样的元素 g 组成:每个 g 将每个 $w_i \mapsto \theta_i w_{\sigma(i)}$, $\forall 1 \leq i \leq k$, 其中 σ 是 k 元集合$\{1, 2, \cdots, k\}$上的一个置换,且所有的 θ_i 的乘积等于 1. 每个 $T_x < X_k$ 具有形式 $x = \lambda_i w_i + \lambda_j w_j$, $1 \leq i < j \leq k$, 且 $\lambda_i\lambda_j \neq 0$. $\rho_{x,1} \in T_x$ 的作用是将 $\lambda_i w_i$ 与 $\lambda_j w_j$ 互换,而将$\langle w_i, w_j\rangle^\perp$中的向量都定驻不动. 所有这样的 T_x 生成 X_k.

剩下的事情是要证明 $k = n$, $W_k = V$, $X_n \leq X$.

若不然,设 $k < n$. 则可选 $\langle y\rangle \in L(X)$ 不含于 W_k 也不与 W_k 正交. 任选 $0 \neq y \in \langle y\rangle$, 记 $y = u + w_{k+1}$ 使 $0 \neq u \in W_k$, $0 \neq w_{k+1} \in W_k^\perp$. 设已选 y 使 $u = \sum\limits_{i=1}^{t} a_i w_i$ 中的非零系数 a_i 的个数 $t \geq 1$ 最小. 不妨用 y 在适当的 $g \in X_k$ 下的象代替 y,并在必要时用适当的 $b_k w_k$ 代替 w_k,化为 $u = \sum\limits_{i=1}^{t} w_i$ 的情形.

如果 $t = 1$, 则 $y = w_1 + w_{k+1}$, w_{k+1} 非迷向,记

$$W_{k+1} = W_k \perp \langle w_{k+1}\rangle,\ L_{k+1} = \{\langle w_i\rangle \mid 1 \leq i \leq k+1\},$$

则 $X_{k+1} = \langle X_k, T_y\rangle \leq X$ 是 L_{k+1} 在 $SU(W_{k+1})$ 中的稳定子群,与 k 的最大性矛盾.

设 $t \geq 2$, 如果 $t < k$, 取 $U_3 = \langle w_1, w_2, w_k\rangle$, 则 $y = (w_1 +$

$w_2) + y_0(0 \neq y_0 \in U_3^{\perp})$ 在 U_3 中的分量 $w_1 + w_2$ 迷向，从而 $U_4 = \langle U_3, y\rangle$ 退化，由引理 3.3.6 知 $T_{U_4} = \langle T_{U_3}, T_y\rangle < X$，进而 $X = \mathrm{TU}(V, f)$.

剩下的情形是 $t = k$, $y = w_1 + \cdots + w_k + w_{k+1}$. 任取 $\theta \in F_4 \backslash F_2$，则 $\theta^3 = 1$. 当 $k \geq 5$ 时，可用 $g_1 \in X_k$ 将 y 变到

$$y_1 = \theta^2 w_1 + \theta(w_2 + \cdots + w_5) + w_6 + \cdots + w_k + w_{k+1},$$

$$T_{y_1} = g_1^{-1} T_y g_1 < X.$$

$$y_2 = y_1 + \theta y = w_1 + \theta^2(w_6 + \cdots + w_{k+1})$$

是迷向向量，由引理 3.3.3 知 $T_{y_2} < \langle T_y, T_{y_1}\rangle < X$，且它在 W_k 中的分量的非零系数的个数 $k - 4 < k$，这与 $t = k$ 的最小性相矛盾. 在 $k = 4$ 的情形下，由 $u = w_1 + \cdots + w_4$ 迷向及 y 迷向知 w_5 也是迷向向量. 存在 $\langle y_1\rangle \in L(X)$ 与 w_5 不正交，且可选 y_1 使 $(w_1, y_1) = 1$. 记 $y_1 = v + v_5$，使 $v \in W_4$, $v_5 \in W_4^{\perp}$. 则 $(w_5, v_5) = 1$. 当 $v = 0$ 时，可用迷向向量 $y + y_1 = u + (w_5 + v_5)$ 代替 y_1，化为 $v \neq 0$ 的情形. 记 $v = b_1 w_1 + \cdots + b_4 w_4$，由 $t = k$ 的最小性知所有的 $b_i \neq 0$. 用适当的 $g \in X_4$ 对 y_1 作用后可化为

$$y_1 = \theta w_1 + w_2 + \theta c(w_3 + w_4) + v_5$$

的形式，其中 $\theta \in F_4 \backslash F_2$ 可以任取，而 $c = (b_1 \cdots b_4)^2$. 此时

$$y_2 = y_1 + \theta y = \theta^2 w_2 + \theta(c + 1)(w_3 + w_4) + (\theta w_5 + v_5)$$

是迷向向量，且 $T_{y_2} < X$，仍与 $t = k$ 的最小性相矛盾.

这就证明了 $k = n$, $V = W_n$, $X_n \leq X$. 如果 $X_n \lneq X$，则 X 包含某个长根子群 T_u，使 $u = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$ 中的非零系数 a_i 的个数 $t > 2$. 由 u 迷向知 t 为偶数，$t \geq 4$. 不妨设 $u = w_1 + \cdots + w_t$. 如果 $t < n$，取 $U_3 = \langle w_1, w_2, w_n\rangle$，则 $T_{U_3} < X_n \leq X$ 且 $\langle U_3, u\rangle$ 退化，导致 $X = G$. 设 $t = n$, n 为偶数，$u = w_1 + \cdots + w_n$. 如果 $n \geq 8$，取 $g_1 \in X_n$ 将 u 送到 $v = \theta(w_1 + w_2 + w_3) + \theta^2(w_4 + w_5 + w_6) + (w_7 + \cdots + w_n)$, $w = u + v = \theta^2(w_1 + w_2 + w_3) +$

$\theta(w_4+w_5+w_6)$ 是迷向向量，且 $T_w<X$，用 w 代替 u 进行讨论即知 $X=G$. 若 $n=4$. 对任意 $x=b_1w_1+\cdots+b_4w_4$，设 $b=b_1\cdots b_4\in F_4^*$，则 $b^2x\in\langle y\rangle$ 的各系数之积为 $b^9=1$，存在 $g_0\in X_4$ 将 $u\mapsto b^2x$，于是 $T_x=g_0^{-1}T_ug_0<X$. 这说明 X 包含 G 的所有长根子群 T_x，从而等于 G. 唯一剩下的情形，$Y=\langle X_6, T_{w_1+\cdots+w_6}\rangle$ 是 G 的真子群，包含所有的根子群 $T_{a_iw_i+a_jw_j}(i\neq j, a_ia_j\neq 0)$ 和 $T_{a_1w_1+\cdots+a_6w_6}(a_1\cdots a_6=1)$，它就是定理的结论 IR3 中所说的 $3\cdot\mathrm{P}\Omega^{-,\pi}(6,3)$. 如果 $X\gneq Y$，则 X 还包含至少一个另外的长根子群，由前面的讨论仍可得 $X=G$.

剩余情形 3　K 是广义四元数体，L 是它的中心. 此时如果 $X\lneq G$，则 X 可能是 L 或它在 K 中的某个二次扩域上的辛群或酉群(即定理的结论 IR4～IR6 所说的群)，或属于定理的结论 IR7 所说的例外情形. 详细证明比较长(请参看文献[64])，在此略去. ▌

以下对酉平延群 $G=\mathrm{TU}(n, K, h, L)$ 中由短根子群生成的子群作一定的讨论. 本书作者在文献[31]、[36]和[37]中对 K 是域的情形下 G 中含短根子群的不可约子群 X 的分类作了较为详细的讨论. 本书不作细致的讨论了，而只是给出 X 含长根子群的一个简单的条件，以备后面的章节应用.

按照定义，G 的每一个短根子群由 V 中一对相互正交且不重合的奇异线$\langle u\rangle$、$\langle w\rangle$决定，具有形式

$$T_{u,w}=\{\eta_{au,w}\,|\,a\in K\},$$

其中 $\eta_{au,w}: x\mapsto x+(x, w)au+(x, au)w$ 当 $a\neq 0$ 是酉二平延. 如果$\langle u\rangle$与$\langle w\rangle$重合，不妨设 $u=w$，也可定义 $T_{u,w}$，但此时 $\eta_{au,w}: x\mapsto x+(x, u)(a+\bar{a})u$，当 $s=a+\bar{a}\in\mathrm{Tr}K$ 不为零时，$\eta_{au,w}$就是酉平延 $\rho_{u,s}$. 可见 $T_{u,u}$就是 $\mathrm{TU}(n, K, h, \mathrm{Tr}K)$的长根子群.

对 G 的每个子群 X 和每个非零奇异向量 $u\in V$，记

$$U_X(u)=\{w\in u^{\perp}\mid Q(w)\in L,\ T_{u,w}<X\}.$$

则对 $U_X(u)$ 中相互正交的向量 w_1、w_2，有 $\langle w_1, w_2\rangle\subseteq U_X(u)$.

引理 3.3.7 设 $\mathrm{Tr}K\neq 0$. 如果 $U_X(u)$ 在包含 $w\neq 0$ 的同时还包含某个 $au+bw$, $a\neq 0$，或者 $U_X(u)$ 含有互不正交的向量，则 X 包含 $\mathrm{TU}(V, h, \mathrm{Tr}K)$ 的长根子群 T_u.

证明 先设 $U_X(u)$ 包含 $w\neq 0$ 及某个 $au+bw$, $a\neq 0$. 由于 $au+bw$ 与 w 相互正交，故 $au=(au+bw)-bw\in U_X(u)$, X 包含长根子群 $T_{u,au}=T_u$.

再设 $U_X(u)$ 中有 w、v 互不正交. 可用 $(w, v)^{-1}w$ 代替 w，使 $(w, v)=1$. X 包含短根子群 $T_{u,w}$ 及 $T_{u,v}$，从而包含换位子

$$[\eta_{u,\lambda w}, \eta_{u,v}]=\rho_{u,s}: x\mapsto x+(x, u)su,$$

其中 $s=\lambda+\bar{\lambda}(\lambda\in K^*)$ 可取遍 $\mathrm{Tr}K$. 说明 X 包含 $\mathrm{TU}(V, h, \mathrm{Tr}K)$ 的长根子群 T_u. ▎

§3.4 正交群的根子群

本节讨论 $G=\Omega(n, F, Q)$ 中由根子群生成的不可约子群. 在这里不要求 Q 所对应的对称双线性型 $f(x, y)=Q(x+y)-Q(x)-Q(y)$ 非退化，但要求 Q 正则，即 $\mathrm{Rad}V$ 中不含非零的奇异向量. 通常把内积 $f(x, y)$ 简记为 (x, y)（但如果 V 上同时还有另一个内积 f_K，为避免混淆，就不能省略 f）.

我们知道，在 $\mathrm{char}F=2$ 且 $\mathrm{Rad}V\neq 0$ 的情形下，

$$G=\Omega(V, Q)=\Omega(V_1, Q_1, L),$$

其中 $V=V_1\oplus\mathrm{Rad}V$，从而 V_1 非退化，Q_1 是 Q 在 V_1 上的限制，而 $L=\{Q(x)\mid x\in\mathrm{Rad}V\}$. 在这样的情形下，对 $G=\Omega(V, Q)$ 的根子群 $T_{u,w}$ 如果 $\langle u, w\rangle\cap\mathrm{Rad}V\neq 0$，就说这个根子群是退缩的；而当 $\langle u, w\rangle\cap\mathrm{Rad}V=0$ 时，则说根子群 $T_{u,w}$ 是非退缩的. 由于 $\mathrm{Rad}V$ 不含非零奇异向量，长根子群 $T_{u,w}$ 所对应的全奇异平面 $\langle u,$

$w\rangle$与 $\mathrm{Rad}V$ 的交当然是 0. 也就是说，长根子群一定是非退缩的，而短根子群 $T_{u,w}$则可能是退缩的，也可能是非退缩的. 对退缩的短根子群 $T_{u,w}$，不妨在 $\langle u, w\rangle \cap \mathrm{Rad}V \neq 0$ 中取非零向量代替 w，化为 $w \in \mathrm{Rad}V$ 的情形. 此时，短根元素

$$t_{u,aw}: x \mapsto x + (x, u)(aw + a^2Q(w)u)$$
$$\equiv x + (x, u)a^2Q(w)u(\mathrm{mod}\ \mathrm{Rad}V)$$

相当于 $\Omega(V_1, Q_1, L) = \mathrm{TU}(V_1, Q_1, L)$ 中的平延 $\rho_{u, a^2Q(w)}$，而 G 的短根子群 $T_{u,w}$相当于 $\mathrm{TU}(V_1, Q_1, L)$的长根子群 T_u 的一个子群 $\{\rho_{u,s} | s \in L_0\}$，其中 L_0 是 $Q(w)$在 F^2 上生成的 L 的一维子空间. 既然在 § 3.3 中未能对任意 L 完成 $\Omega(V_1, Q_1, L)$中由长根子群生成的不可约子群的分类，在本节中也就不能完成 $\Omega(V, Q)$中由退缩的短根子群生成的不可约子群的分类. 因此在本节中，我们只考虑由 $\Omega(V, Q)$的非退缩根子群生成的不可约子群，并完成对它们的分类.

可以举出 $G = \Omega(V, Q)$ 的由退缩根子群生成不可约子群 X 的例子，它不含非退缩根子群. 不妨将 G 改写为 $\Omega(V_1, Q_1, L)$. 设 L 生成 F 的真子域 E，取 V_1 在 F 上的适当的基，使它们两两内积的值含于 E，这组基在 E 上张成一个子空间 $V_E \subsetneq V_1$（实际上 $V_1 = F \otimes_E V_E$），记 Q_1 在 V_E 上的限制为 Q_E，则 $\Omega(V_E, Q_E, L)$是 $\Omega(V_1, Q_1, L)$的由退缩根子群生成的不可约子群，并且当 $\dim_E V_E \geq 4$ 时不包含非退缩根子群. 当然，还可取 L 的 F^2 真子空间 L_1，设 E_1 是 L_1 生成的子域，同样得到 $\Omega(V_1, Q_1, L)$的子群 $\Omega(V_{E_1}, Q_{E_1}, L_1)$，它在 $V_1 = F \otimes_{E_1} V_{E_1}$ 上是不可约的，但当 $L_1 \subsetneq L$ 时，它在 $\Omega(V, Q)$中所对应的子群在 V 上是可约的. 我们猜想(但尚未能证明)，这些就是所能举出的全部例子了.

定理 3.4.1　设 F 是域，Q 是 $V = V(n, F)$ 上的正则二次型，$(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$ 是相关的对称内积. 设 $G = \Omega(n, F, Q)$，X 是由 G 的某些非退缩根子群生成的不可约子群. 则 X 是下列类型的子群之一：

IR1. $X = \Omega(n, F, Q)$.

IR2. $n = 2m$ 是偶数，$X = \mathrm{SU}(m, K, f_K)$，$Q(x) = f_K(x, x)$，式中 K 是 F 的二次扩域，$V = V(2m, F) = V(m, K)$，$J: a \mapsto \bar{a}$ 是 K 的对合，且 $K_J = F$，f_K 是 $V(m, K)$上的非退化 Hermite 型，且 $\nu(f_K) \geq 1$. 或当 $F = F_2$ 时，X 是 $V(m, K, f_K)$的一组由 m 条两两正交的非迷向线组成的集合在 $\mathrm{SU}(m, F_4, f_K)$ 中的定驻子群或其扩群 $3 \cdot \mathrm{P}\Omega^{-,\pi}(6, 3)$（当 $n = 6$）（见定理 3.3.1 IR3）.

IR3. $n = 2m$ 是偶数，F 是特征 2 的非完全域，$X = \Omega(m, K, Q_K, F)$，这里 $K = F[\alpha]$ 是 F 的二次扩域，$\alpha^2 = a$ 是 F 的非平方元，$V = V(2m, F) = V(m, K)$，Q_K 是 $V(m, K)$上的 F-正则二次型，$\nu_F(Q_K) \geq 1$，且 $Q(x) = \varphi(Q_K(x))$，$\varphi: K \to F$，$\lambda_0 + \lambda\alpha \mapsto \lambda(\forall \lambda_0, \lambda \in F)$.

IR4. $G = \Omega(7, F, Q)(\nu(Q) = 3)$，$X$ 同构于 Chevalley 群 $G_2(F)$.

IR5. $G = \Omega(8, F, Q)(\nu(Q) = 4)$，$X = \Omega_7$ 是 V 的非奇异向量 x 的稳定子群 $G_x = \Omega(x^{\perp})$ 在某个 $\sigma \in \mathrm{Aut}G$ 下的不可约象，σ 可按 §2.3 所说方式由旋量表示而得到.

IR6. $F = F_2$，$G = \Omega(2m, F_2, Q)$，$X = O(m, F_4, Q_K)$，$V = V(m, F_4) = V(2m, F_2)$，$Q_K$ 是 $V(m, F_4)$上正则无亏数二次型，$Q(x) = \varphi Q_K(x)$，φ 是 F_4 到 F_2 中的迹映射.

IR7. $F = F_2$ 或 F_3，X 是按 §2.3 所述的方式嵌入 $G = \Omega(n, F, Q)$ 中的对称群 S_{n+1}、S_{n+2} 或交错群 A_{n+1}、A_{n+2}. 或 $V = V(n, F_3, Q) = \langle \varepsilon_1 \rangle \perp \cdots \perp \langle \varepsilon_n \rangle$（所有的$Q(\varepsilon_i)$相等），$X$ 是一维子空间集合 $\{\langle \varepsilon_i \rangle \mid 1 \leq i \leq n\}$ 在 $G = \Omega(n, F_3, Q)$ 中的定驻子群.

IR8. $F = F_3$，$V(8, F_3, Q) = \langle \varepsilon_1 \rangle \perp \cdots \perp \langle \varepsilon_8 \rangle$（所有的$Q(\varepsilon_i)$相等），$V_7 = \left\{ \sum_{i=1}^{8} a_i \varepsilon_i \,\middle|\, \sum_i a_i = 0 \right\}$，$V = V(8, F_3, Q)$ 或 V_7，X 是具有如下形式的全体一维子空间组成的集合在 $G = \Omega(V, Q)$ 中的定驻子群：

$$\langle a_i\varepsilon_i + a_j\varepsilon_j\rangle (1 \leq i < j \leq 8,\ a_i,\ a_j \in F_3^*)$$

或
$$\left\langle \sum_i a_i\varepsilon_i \right\rangle \left(\prod_i a_i = 1 \right).$$

记 $L(X) = \{\langle u, w\rangle | T_{u,w} \leq X\}$. 则对任意 $g \in X$ 和 $P = \langle u, w\rangle$, 由 $T_{ug,wg} = g^{-1}T_{u,w}g < X$ 知 $Pg \in L(X)$. 即 $L(X)$在 X 的作用下不变. 从而 $L(X)$生成的子空间$\langle L(X)\rangle$在 X 的作用下也不变. 由 Q 正则及$\langle L(X)\rangle$含有奇异线知$\langle L(X)\rangle$不含于 $V^{\perp}$. 再由 X 的不可约性知 $\langle L(X)\rangle = V$. 设 $P_i \in L(X)$, $1 \leq i \leq k$, 且对每个 $i \leq k-1$, P_{i+1}既不含于 $W_i = \langle P_j | 1 \leq j \leq i\rangle$, 也不与 W_i 正交, 则称 $P_1, \cdots, P_k$ 是从 $L(X)$中取出的一条既约连通链. 设 $P_1, \cdots, P_m$ 是从 $L(X)$中取出的任意一条具有最大长度的既约连通链,张成子空间 W_m. 对任一 $P \in L(X)$, 由 m 的最大性知 $P_1, \cdots, P_m$, P 不再是既约连通链,故 $P \subseteq W_m$ 或 $P \subseteq W_m^{\perp}$ 成立,从而 $P = \langle u, w\rangle$ 所对应的长根子群 $T_{u,w}$定驻 W_m. 所有这些 $T_{u,w}$生成的群 X 也定驻 W_m. 这迫使 $W_m = V$.

对每个奇异向量 $u \neq 0$, 记 $V_X(u) = \{w \in V | T_{u,w} \leq X\}$. 则 $V_X(u)$是 V 的子空间. 设奇异向量 $v \in V_X(u)$, 则由 $T_{u,v} = T_{v,u} \leq X$ 知 $u \in V_X(v)$. 对任意的 $g \in X$, 有 $V_X(u)g = V_X(ug)$. 记 d 为所有的 $V_X(u)$($u \neq 0$ 奇异)的维数的最大值. 我们区别 X 包含或不包含短根子群的两种情况,并区别 d 的不同值,通过下面的命题 3.4.2 及命题 3.4.5 来证明定理 3.4.1.

命题 3.4.2. 设 X 是由 $\Omega(n, F, Q)$的若干长根子群生成的不可约子群,并且不含短根子群,d 是 $V_X(u)$的维数的最大值. 则下列结论之一成立:

(1) $d = 2$, X 是 IR2 类子群 $SU(n/2, K, f_K)$或 IR3 类子群 $\Omega(n/2, K, Q_K, F)$.

(2) $d = 3$, X 是 IR4 类子群 $G_2(F)$.

(3) $d = 4$, X 是 IR5 类子群 Ω_7.

证明 X 不含短根子群,从而每个 $V_X(u)$不含非奇异向量,是全奇异子空间.

(3.4.2.1) $d = 2$，则 X 是 IR2 或 IR3 类子群.

$L(X)$中任意两个相异的全奇异平面 L_1、$L_2 \in L(X)$ 的交只能是零. 否则，对 $0 \neq u_0 \in L_1 \cap L_2$，$V_X(u_0)$ 包含 3 维空间$\langle L_1, L_2\rangle$，与 $d = 2$ 的最大性相矛盾.

设 L_1、L_2 是 $L(X)$中互不正交的全奇异平面，首先 $L_1 \neq L_2$，从而 $L_1 \cap L_2 = 0$. 记 $L_i = \langle u_i, w_i\rangle$ $(i = 1, 2)$. 长根元素 $t_{u_2, w_2} \in X$ 将 L_1 中某个 $v \notin L_2^{\perp}$ 变到 $v + (v, w_2)u_2 - (v, u_2)w_2 \notin L_1$，从而 t_{u_2, w_2}不定驻 L_1. 如果存在 $0 \neq v_1 \in L_1 \cap L_2^{\perp}$，则 t_{u_2, w_2}定驻 v_1，从而应定驻 $V_X(v_1) = L_1$，产生矛盾. 故 $L_1 \cap L_2^{\perp} = 0$. 同理 $L_2 \cap L_1^{\perp} = 0$. 这证明了 $V_2 = L_1 \oplus L_2$ 应是 4 维非退化子空间. 对 L_1 的任一组基$\{u_1, w_1\}$，可选 $u_2 \in L_2 \cap u_1^{\perp}$ 和 $w_2 \in L_2 \cap w_1^{\perp}$，使 $(u_1, w_2) = 1 = -(u_2, w_1)$. 则$\{u_1, u_2, w_1, w_2\}$是 V_2 的基，X 的子群 $X_2 = \langle T_{u_1, w_1}, T_{u_2, w_2}\rangle \leq \Omega(V_2) \times 1_{V_2^{\perp}}$ 在 V_2 上的作用可在这组基下写成矩阵群

$$X_2 = \langle T_{21}(s)T_{43}(s), T_{12}(s)T_{34}(s) \,|\, s \in F\rangle$$
$$= \{I^{(2)} \otimes A \,|\, A \in \mathrm{SL}(2, F)\}.$$

也就是说，X_2 在 $U_2 = \langle u_1, u_2\rangle$ 与 $W_2 = \langle w_1, w_2\rangle$ 上都诱导出 $\mathrm{SL}(2, F)$，且 U_2 与 W_2 是同构的 FX_2-模，$\pi: U_2 \to W_2$, $au_1 + bu_2 \mapsto aw_1 + bw_2$是 FX_2-模同构. 令 g 取遍 X_2，则 $L_1 g \in L(X_2) \subset L(X)$ 取遍 $\langle u, \pi u\rangle (0 \neq u \in U_2)$. 以$\{1, \pi\}$为基张成 F 上二维空间 K，且定义每个 $\omega = a + b\pi \in K(a, b \in F)$ 将每个 $u \in U_2$ 映到 $\omega u = au + b\pi u$. 则 K 中的元素都是 U_2 到 V_2 中的 FX_2-模同态. $L(X)$包含所有的 $Ku(0 \neq u \in U_2)$. V_2 可写成张量积形式 $V_2 = K \otimes_F U_2$，而 $X_2 = 1_K \otimes \mathrm{SL}(U_2/F)$.

从 $L(X)$取出具有最大长度的既约连通链 $P_1, \cdots, P_m$ 张成 V，并且选择这样的连通链，使与 P_1 不正交的 P_i 的个数 k 最大. 不妨调整 $P_2, \cdots, P_m$ 的顺序使其中前 k 个与 P_1 不正交，而其余的 $P_i(i > k+1)$与 P_1 正交. 任意取定 P_1 的一组基$\{u_1, w_1\}$. 则在与 P_1 不正交的每个 $P_i(2 \leq i \leq k+1)$ 中可唯一地选取 $u_i \in u_1^{\perp}$ 及

$w_i \in w_1^{\perp}$，使 $(u_1, w_i) = 1 = -(u_i, w_1)$. 当然$\{u_i, w_i\}$是 P_i 的基. 且由前面对 L_1、L_2 讨论的结果知 $\langle au_1 + bu_i, aw_1 + bw_i\rangle \in L(X)$ 对所有的 $2 \le i \le k+1$ 和不全为 0 的 a、$b \in F$ 成立.

现在证明 $m = k+1$，即所有的 $P_i(i \ge 2)$ 都与 P_1 不正交. 若不然，则 $P_{k+2} \perp P_1$. 但是由连通链的定义知 P_{k+2} 与某个 $P_t(2 \le t \le k+1)$ 不正交. 在 P_{k+2} 中取 $u_{k+2} \in u_t^{\perp}$，$w_{k+2} \in w_t^{\perp}$，使 $(u_t, w_{k+2}) = 1 = -(u_{k+2}, w_t)$，则 $\widetilde{P}_{k+2} = \langle u_t + u_{k+2}, w_t + w_{k+2}\rangle \in L(X)$，并且 $\widetilde{P}_{k+2}$ 与 P_1 不正交. 可在连通链 $P_1, \cdots, P_m$ 中用 $\widetilde{P}_{k+2}$ 代替 P_{k+2}，得到另外一个连通链，其中与 P_1 不正交的 P_i 的个数为 $k+1$，与 k 的最大性相矛盾. 这证明了所有的 $P_i(2 \le i \le m)$ 都与 P_1 不正交. 在每个 P_i 中都按前面所述方式唯一地选定基 $\{u_i, w_i\}$. 进一步，对每个全奇异平面 $P \in L(X)$，由于 $P \not\subseteq \mathrm{Rad}V$，且 $V = \langle P_1, \cdots, P_m\rangle$，必然存在最小的自然数 t，使 P 与 P_t 不正交. 在 P 中可唯一地选取 $u \in u_t^{\perp}$、$w \in w_t^{\perp}$，使 $(u_t, w) = 1 = -(u, w_t)$. 由于 u、w 由 P 唯一确定，可分别记为 $u = u(P)$，$w = w(P)$. 特别，$u(P_i) = u_i$，$w(P_i) = w_i$.

设 U 是所有的 $u(P)(P \in L(X))$ 张成的子空间. 如果 U 全迷向，则它也全奇异，并且被每个 $T_{u(P), w(P)} < X$ 定驻，从而被 X 定驻，与 X 的不可约性相矛盾. 故 U 不可能全迷向. 存在某一对 L_1、$L \in L(X)$ 使 $(u(L_1), u(L)) \ne 0$. 按 $u(P)$的取法，它们都与 u_1 正交，因此，L_1、L 都不等于 P_1. 我们希望选 L_1、L 都与 P_1 不正交. 如果 $L_1 \perp P_1$，存在最小的自然数 t 使 P_t 与 L_1 不正交. 如果 $(u_t, u(L)) \ne 0$，则用 P_t 代替 L_1 即可化为 L_1 与 P_1 不正交的情形. 如果 $(u_t, u(L)) = 0$，则用 $\langle u_t + u(L_1), w_t + w(L_1)\rangle \in L(X)$ 代替 L_1 可化为 L_1 与 P_1 正交的情形. 用同样的方法可化为 L 与 P_1 不正交的情形. 不妨一开始就取 L_1、L 分别作为 P_2、P_3，化为 $(u_2, u_3) \ne 0$ 的情形.

按前面所述，非退化四维子空间 $V_2 = P_1 \oplus P_2$ 可写成张量积 $V_2 = K \otimes_F U_2$ 的形式，使

$$X_2 = \langle T_{u_1, w_1}, T_{u_2, w_2} \rangle = 1_K \otimes \mathrm{SL}(U_2/F),$$

其中

$$U = \langle u_1, u_2 \rangle, K = F \oplus F\pi, \pi(au_1 + bu_2) = aw_1 + bw_2.$$

以下考察 X_2 与 $T_{u_3, w_3} < X$ 生成的子群 $X_3 \leq X$. 将 P_3 的基向量 u_3、w_3 写成 $u_3 = x_1 + x_3$ 和 $w_3 = y_1 + y_3$ 的形式,使 x_1、$y_1 \in V_2$, x_3、$y_3 \in V_2^{\perp}$. 由 $(u_3, u_1) = 0$, $(u_3, w_1) = -1$ 及 $(u_3, u_2) = c \neq 0$ 知 $x_1 = a_0u_1 + u_2 - cw_1$ 对某个 $a_0 \in F$ 成立. 存在 $g_0 \in X_2 < X$ 定驻 u_1 且将 $a_0u_1 + u_2 \mapsto u_2$, g_0 也定驻 $w_1 = \pi(u_1)$. $u_3g_0 = x_1g_0 + x_3 = (u_2 - cw_1) + x_3$. 不妨一开始就用 $P_3g_0 \in L(X)$ 代替 P_3, 从而用 $x_1g_0 = u_2 - cw_1$ 代替 x_1,化为 $x_1 = u_2 - cw_1$ 的情形. 再由 $(w_1, y_1) = (w_1, w_3) = 0$ 及 $(u_1, y_1) = (u_1, w_3) = 1$ 知 $y_1 = u_1 + aw_1 + w_2 (a \in F)$.

于是 $u_3 = (u_2 - cw_1) + x_3$, $w_3 = (u_1 + aw_1 + w_2) + y_3$. 每个 $\lambda \in F$ 决定一个 $P(\lambda) = K(u_1 + \lambda u_2) \in L(X)$. 由

$$(u_3, \pi(u_1 + \lambda u_2)) = (u_2 - cw_1, w_1 + \lambda w_2) = -1 \neq 0$$

知 $P(\lambda)$与 $u_3 \in P_3$ 不正交,因而 $P(\lambda)$与 P_3 中所有的非零向量不正交. 特别,它与 P_3 中的向量 $v(\lambda) = \lambda u_3 + w_3 = (u_1 + \lambda u_2) + ((-\lambda c + a)w_1 + w_2) + (\lambda x_3 + y_3)$ 不正交. 但 $v(\lambda)$与 $w_1 + \lambda w_2 \in P(\lambda)$ 正交,故它与 $u_1 + \lambda u_2 \in P(\lambda)$ 不正交. 即 $(u_1 + \lambda u_2, v(\lambda)) = 1 - a\lambda + c\lambda^2 \neq 0$, $\forall \lambda \in F$. 这就是说:F 上的二次多项式 $f(x) = cx^2 - ax + 1$ 在 F 中没有根,是 $F[x]$中的不可约多项式. 注意

$$Q(v(\lambda)) = Q(\lambda x_1 + y_1) + Q(\lambda x_3 + y_3) = 0,$$

故

$$Q(\lambda x_3 + y_3) = -Q(\lambda x_1 + y_1) = -(c\lambda^2 - a\lambda + 1) \neq 0.$$

这首先说明 $\lambda x_3 + y_3 \neq 0$. 又 $Q(x_3) = -Q(x_1) = -c \neq 0$, 这说明 $x_3 \neq 0$. 故 x_3, y_3 在 F 上线性无关,张成 2 维 F-空间$\langle x_3, y_3 \rangle$.

这个2维子空间所含的1维子空间具有形式$\langle x_3\rangle$或$\langle \lambda x_3+y_3\rangle$ $(\lambda\in F)$，都是非奇异线.因而$\langle x_3, y_3\rangle$是$V_2^{\perp}$中的定号空间.

在$K=F\oplus F\pi$中可以定义乘法，使它成为F的扩环(即F-代数)，使$\pi^2=-c^{-1}(1+a\pi)$，即$c\pi^2+a\pi+1=0$. 前面已经知道$f(x)=cx^2-ax+1$是$F[x]$中的不可约多项式.因而$f(-x)=cx^2+ax+1\in F[x]$也不可约，π是不可约多项式$f(-x)$的根，因而$K=F[\pi]$是F的二次扩域. F上的4维空间$V_2=K\otimes_F U_2$也是K上以$\{u_1, u_2\}$为基的2维空间，F上的平面P_1、$P_2\in L(X)$分别是K上的1维子空间Ku_1、Ku_2. V_2的这个2维K-空间结构可以扩充为$V_3=V_2\perp(Fx_3\oplus Fy_3)$上的3维$K$-空间结构，使$\pi x_3=y_3$. 容易验证$\pi u_3=w_3$，$P_3\in L(X)$也是1维$K$-空间$Ku_3$.

设π的最小多项式$f(-x)=cx^2+ax+1$在K中的两个根为π、$\bar{\pi}$. 我们按$\pi\neq\bar{\pi}$或$\pi=\bar{\pi}$这两种不同情况，分别讨论群$X_3=\langle T_{u_i,\pi u_i}\mid i=1, 2, 3\rangle$的结构，进而定出$X$的结构.

情况1 $\pi\neq\bar{\pi}$：即char$F\neq 2$，或char$F=2$且$a\neq 0$.

此时GalK/F中有唯一的二阶元$J:\alpha\mapsto\bar{\alpha}$将$\pi\mapsto\bar{\pi}$. 记$\delta=\bar{\pi}-\pi\neq 0$，则$\delta$是非零反对称元，$K$中每个反对称元具有形式$s\delta(s\in F)$. 在$V_3=V(3, K)$上可定义关于对合$J$的非退化Hermite内积$f_K$，使

$$f_K(u_1, u_2)=\delta^{-1},\quad f_K(u_i, x_3)=0\ (i=1, 2),$$

$$f_K(x_3, x_3)=c,$$

则f_K与$V_3=V(6, F)$作为V的子空间上的二次型Q及其相关内积f有关系式：

$$Q(x)=f_K(x, x),$$

$$f(x, y)=\mathrm{Tr}(f_K(x, y))=f_K(x, y)+\overline{f_K(x, y)},$$

$$f_K(x, y)=(f(x, \pi y)-f(x, y)\pi)\delta^{-1}.$$

K 上 3 维酉群 $\mathrm{U}(V_3/K, f_K) = \mathrm{U}(3, K, f_K)$ 的每个酉平延

$$\rho_{u, s\delta}: x \mapsto x + f_K(x, u)s\delta u$$

$$= x + f(x, \pi u)su - f(x, su)(\pi u) \quad (s \in F),$$

也就是 F 上的 6 维正交群 $\Omega(V_3/F, Q) = \Omega(6, F, Q)$ 的二平延 $t_{su, \pi u}$. $\Omega(V_3/F, Q)$的长根子群 $T_{u, \pi u}$就是 $\mathrm{SU}(V_3/K, f_K)$的长根子群 T_u. 特别,X 的子群 $X_3 = \langle T_{u_i, \pi u_i} | i = 1, 2, 3\rangle$ 等于 $\langle T_{u_i} | i = 1, 2, 3\rangle = \mathrm{TU}(V_3/K, f_K)$ (见引理 3.3.4). 当 $F \neq F_2$ 时, $X_3 = \mathrm{SU}(V_3/K, f_K)$; 当 $F = F_2$ 时,任取 $V_3 = V(3, K, f_K)$ 的一组正交基 $\{\varepsilon_i | i = 1, 2, 3\}$, 则 X_3 就是两两正交的非迷向线集合 $\{K\varepsilon_i | i = 1, 2, 3\}$ 在 $\mathrm{SU}(V_3/K, f_K)$中的定驻子群.

一般地,可设 V_k 是 $V = V(n, F, Q)$ 的一个具有最大维数 $2k \geq 6$ 的子空间,且满足以下条件:

(i) $V_k \supseteq V_3$;

(ii) V_k 上有 k 维 K-空间结构,并可在 K 上定义关于对合 J 的非退化 Hermite 内积 f_K,使 $Q(x) = f_K(x, x)$ 对所有的 $x \in V_k$ 成立;

(iii) 当 $F \neq F_2$ 时,记 $X_k = \mathrm{SU}(V_k/K, f_K)$; 当 $F = F_2$ 时,记 X_k 为集合 $\{K\varepsilon_i | 1 \leq i \leq k\}$ 在 $\mathrm{SU}(V_k/K, f_K)$ 中的稳定子群,其中 $\{\varepsilon_i | 1 \leq i \leq k\}$ 是 $V_k = V(k, K, f_K)$ 的一组非迷向正交基,则 $X_k \leq X$.

至少有 V_3 满足上述三个条件. 因此,满足这三个条件且具有最大维数的 V_k 是存在的. 我们证明 $V_k = V$, X 是 IR2 类子群.

设 $P \in L(X)$, v、y 是 P 在 F 上的任一组基向量,在直和分解 $V = V_k \oplus V_k^{\perp}$ 下记分解式为 $v = v_1 + v_0$, $y = y_1 + y_0$. 如果 $P \not\subseteq V_k^{\perp}$, 则 v、y 在 V_k 中的分量 v_1、y_1 不全为 0. 不妨设 $v_1 \neq 0$. 如果 y_1 与 v_1 共线, $y_1 = \lambda v_1$ 对某个 $\lambda \in F$ 成立,则有非零向量 $\tilde{y} = y - \lambda v \in P \cap V_k^{\perp}$. X_k 定驻$\tilde{y}$,但可将 $v = v_1 + v_0$变到 P 之外,这将导致 $V_X(\tilde{y}) \supsetneqq P$, 与 $d = 2$ 相矛盾. 这说明 v_1 与 y_1 在 F 上线性

无关.

下面证明 $y_1=\beta v_1$ 对某个 $\beta\in K\backslash F$ 成立,从而 $Fv_1\oplus Fy_1=Ky_1$. 若不然,设 $y_1\notin Kv_1$,设法推出矛盾.

当 $X_k=\mathrm{SU}(V_k/K, f_K)$ 时,由 Witt 扩张定理知,存在 X_k 可在定驻 v_1 的同时将 y_1 变到 $y_1g\notin Fv_1+Fy_1$,从而在定驻 v 的同时将 $y\in P$ 移出 P 外,$V_X(v)\supsetneqq P$,产生矛盾.

$X_k\neq\mathrm{SU}(V_k/K, f_K)$ 仅当 $F=F_2$, $K=F_4$, X_k 是非迷向线集 $\{K\varepsilon_i\,|\,1\leq i\leq k\}$ 在 $\mathrm{SU}(V_k/K, f_K)$中的定驻子群,其中 $\mathscr{E}=\{\varepsilon_i\,|\,1\leq i\leq k\}$ 是 V_k 在 K 上的一组正交基. 此时,如果 $y_1\notin Kv_1$,则 X_k 能在定驻 v_1 的同时将 y_1 移出$\langle v_1, y_1\rangle$,或定驻 y_1 的同时移走 v_1,导致 $d\geq 3$, 仍出现矛盾.

这证明了: $P=Fv\oplus Fy\in L(X)$ 在 V_k 中的投影 Fv_1+Fy_1 如果不为 0,就一定是 1 维 K-空间 Kv_1.

如果可选 P 使 $Q(v_1)\neq 0$, 则 P 在 V_k 中的投影 Kv_1 是关于 f_K 的非迷向线,从而是关于 Q 的定号平面. 此时对每个 $0\neq x=x_1+x_0\in P(x_1\in V_k, x_0\in V_k^{\perp})$ 有 $Q(x_0)=-Q(x_1)=-f_K(x_1, x_1)\neq 0$, P 在 $V_k^{\perp}$ 中的投影 Fv_0+Fy_0 也是关于 Q 的定号平面. 在此情形下,取 $2(k+1)$ 维 F-子空间 $V_{k+1}=V_k\oplus P=V_k\perp(Fv_0+Fy_0)$. $y_1=\beta v_1$ 对某个 $\beta\in K\backslash F$ 成立. 定义 $y_0=\beta v_0$ 可将 V_k 上的 k 维 K-空间结构扩充为 V_{k+1} 上的 $k+1$ 维 K-空间结构,且 $y=\beta v$, $P=Kv$. V_k 上的 Hermite 内积 f_K 还可扩充到 V_{k+1} 上,使 $f_K(x_1, v_0)=0(\forall x_1\in V_k)$, 且 $f_K(v_0, v_0)=Q(v_0)\neq 0$. 记 Y_{k+1}为 X_k 与 T_v 共同生成的 $\mathrm{SU}(V_{k+1}/K, f_K)$ 的子群,则 T_v 就是 $\Omega(V, Q)$ 的长根子群 $T_{v,y}<X$. 故 $Y_{k+1}\leq X$. 当 $F\neq F_2$ 时,由引理 3.3.5 知 $Y_{k+1}=\mathrm{SU}(V_{k+1}/K, f_K)\leq X$, 取 $X_{k+1}=Y_{k+1}$即可得到与 k 的最大性的矛盾. 当 $F=F_2$ 时, Y_{k+1}是 $\mathrm{SU}(V_{k+1}/K, f_K)$ 的由长根子群生成的不可约子群,且不含于 $\mathrm{Sp}(2(k+1), 2)$,由定理 3.3.1 知 Y_{k+1} 包含一个 $X_{k+1}=\mathrm{Stab}\{K\varepsilon_i\,|\,1\leq i\leq k+1\}$, 其中 $\{\varepsilon_i\,|\,1\leq i\leq k+1\}$ 是 $V_{k+1}=V(k+1, K, f_K)$ 的一组非迷向正交基,仍与 k 的最大性相矛盾.

在剩下的情况下，所有的 $P \in L(X)$ 在 V_k 中的投影都是 K 上关于 f_K 的迷向线或等于 0.

如果 $V_k = V$，则每个 $P = \langle u, w\rangle \in L(X)$ 都是 K 上的迷向线，$T_{u,w} < X$ 就是 $SU(V/K, f_K)$ 的长根子群 T_v，$X \leq SU(V/K, f_K)$，X 是 IR2 类子群.

设 $V_k \neq V$，我们设法推出矛盾. 此时，由连通链 $P_1, \cdots, P_m$ 张成 V，知其中有某个 P_t 不含于 V_k. 任取 P_t 的一组 F-基 v、y，在直和分解 $V = V_k \oplus V_k^{\perp}$ 下记 $v = v_1 + v_{01}$，$y = y_1 + y_{01}$. 由于 P_t 与 P_1 不正交，P_t 在 V_k 中的投影 $Fv_1 + Fy_1$ 不为 0，按假设它应是 K 上的迷向线 Kv_1，因而是 F 上关于 Q 的全奇异平面. 而 P_t 在 $V_k^{\perp}$ 中的投影 $Fv_{01} + Fy_{01}$ 不为零，并且也应是关于 Q 的全奇异子空间. 不妨设 $v_{01} \neq 0$，则 $v_{01} \notin \mathrm{Rad}V$，由 $\langle P_1, \cdots, P_m\rangle = V$ 知存在 $P_l \in L(X)$ 与 v_{01} 不正交. 取 P_l 的 F-基 $\tilde{v}$、$\tilde{y}$，写成直和分解式 $\tilde{v} = v_2 + v_{02}$，$\tilde{y} = y_2 + y_{02}$. 则 $Fv_2 + Fy_2 = Kv_2$ 也应是关于 f_K 的迷向线. 如果 v_{01} 与 y_{01} 共线，设 $y_{01} = \lambda v_{01}$，不妨取 $0 \neq y - \lambda v \in P \cap V_k$ 代替 y，化为 $y_{01} = 0$ 即 $y = y_1 \in V_k$ 的情形. 此时可取 $g \in X_k$ 将迷向线 Kv_2 送到 $Kv_2 g \subseteq (Ky_1)^{\perp}$，则 $P_l g \in L(X)$ 与 $v \in P_t$ 不正交，但与 $0 \neq y \in P_t$ 正交. 产生矛盾. 这说明 v_{01} 与 y_{01} 不共线，P_t 在 $V_k^{\perp}$ 中的投影应是 F 上的 2 维全奇异子空间，P_t 也应如此. 可选 P_l 的基向量 $\tilde{v} \in y_{01}^{\perp}$、$\tilde{y} \in v_{01}^{\perp}$，即 $f(y_{01}, v_{02}) = f(v_{01}, y_{02}) = 0$. 再由 $v_{01} \notin P_l^{\perp}$ 有 $f(v_{01}, v_{02}) = \lambda \neq 0$，且可用 $\lambda^{-1}\tilde{v}$ 代替 $\tilde{v}$，使 $f(v_{01}, v_{02}) = 1$. $y_2 = \beta v_2$ 对某个 $\beta \in K \backslash F$ 成立，$\bar{\beta} - \beta \neq 0$. 存在 $g \in X_k$ 将 $v_1 \mapsto v_1 g$ 使 $f_K(v_1 g, v_2) = (1+\beta)(\bar{\beta} - \beta)^{-1} \in K^*$. 于是 $f(v_1 g, v_2) = -1$，$f(vg, \tilde{v}) = f(v_1 g, v_2) + f(v_{01}, v_{02}) = 0$；而 $f(vg, \tilde{y}) = f(v_1 g, \beta v_2) = 1$. $t_{v,y} \in X$ 将 $P_l g \in L(X)$ 送到 $P = P_l g t_{v,y} \in L(X)$. 而 $vgt_{v,y} = vg + \tilde{v} \in P$ 在 V_k 中的投影 $v_1 g + v_2$ 具有 $Q(v_1 g + v_2) = -1 \neq 0$，不是奇异向量，这与原假设矛盾(化成了已解决的情形). 这就完成了对情况 1 的证明.

情况 2　$\pi = \bar{\pi}$. 即 $\mathrm{char}F = 2$ 且 $a = 0$，π 是 F 中非平方元

$\delta=(bc)^{-1}$ 的平方根.我们断言:此时 X 是 IR3 类子群.

取定 $K=F[\pi]$ 上的 F-线性函数 $\varphi:\lambda_0+\lambda\pi\mapsto\lambda(\lambda_0、\lambda\in F)$. 在 3 维 K-空间 $V_3=\langle P_1, P_2, P_3\rangle$ 上可定义二次型 Q_K 及其相关的辛内积 f_K,使 $Q(x)=\varphi(Q_K(x))$, $f(x, y)=\varphi(f_K(x, y))$, $f_K(x, y)=f(x, \pi y)+f(x, y)\pi$. 于是 $Q(x)=0 \Longleftrightarrow Q_K(x)\in F$. 我们有 $P_i=Ku_i(i=1, 2, 3)$. 无论在 f_K 或在 f 下, $V_2=Ku_1\oplus Ku_2$ 都是非退化子空间. $V_3\cap V_3^{\perp}=Kx_3$ 是 $Ku_3=K(x_1+x_3)$ $(x_1\in V_2, x_3\in V_2^{\perp})$ 在 $V_2^{\perp}$ 中的投影. Kx_3 是 F 上关于 f 的全迷向平面,但不含关于 Q 的非零奇异向量. 因此 Q 在 V_3 上正则,且有亏数 2. F 包含 $K^2=\{\alpha^2|\alpha\in K\}$,是 K 作为 K^2-向量空间的子空间. 对 Kx_3 中任一非零向量 x,有 $Q_K(x)\notin F$,这就是说 V_3 是在 Q_K 下的 F-正则子空间. $\Omega(V_3/K, Q_K, F)=\mathrm{TU}(V_3/K, Q_K, F)$ 由 K 上形如

$$\begin{aligned}\rho_{u,s}:x\mapsto\ & x+f_K(x, u)su\\ &=x+f(x, \pi u)su\\ &\quad+f(x, su)\pi u(Q_K(u)\in F, s\in F^*)\end{aligned}$$

的全体辛平延生成. 而每个这样的 $\rho_{u,s}$ 也就是 $\Omega(V_3/F, Q)$ 的二平延 $t_{su,\pi u}$. $\Omega(V_3/F, Q)$ 的长根子群 $T_{u_i,\pi u_i}(i=1, 2, 3)$ 生成 X 的一个子群 X_3. 它也就是由 $\Omega(V_3/K, Q_K, F)$ 的长根子群 $T_{u_i}(i=1, 2, 3)$ 生成的子群,由引理 3.3.4 知 $X_3=\langle T_{u_i}|i=1, 2, 3\rangle=\Omega(V_3/K, Q_K, F)\leq X$.

一般地,可设 V_k 是 $V=V(n, F, Q)$ 的一个具有最大维数 $2k\geq 6$ 的子空间,且满足以下条件:

i) $V_k\supseteq V_3$.

ii) V_k 上有 k 维 K-空间结构,并可在 K 上定义 F-正则二次型 Q_K 及相伴的辛内积 f_K,使

$$Q(x)=\varphi(Q_K(x)),\ f_K(x, y)=f(x, \pi y)+f(x, y)\pi.$$

式中 $\varphi:\lambda_0+\lambda\pi\mapsto\lambda(\lambda_0, \lambda\in F)$ 是 K 上的 F-线性函数,F-正则是

指 $Q(x)\notin F$ 对所有的 $0\neq x\in \mathrm{Rad}(V_K, f_K)$ 成立.

iii) $X_k=\Omega(V_k/K, Q_K, f_K)\leq X$.

与情况 1 类似,可以证明 $V_k=V$, X 是 IR3 类子群. 证明具体过程见文献[70].

(3.4.2.2) $d\geq 3$, 则 X 是 IR4 或 IR5 类子群.

取奇异向量 $u_1\neq 0$, 使 $V_X(u_1)=d$. 不可约子群 X 可将奇异线 $\langle u_1\rangle$ 送到 $\langle u_{-1}\rangle\not\subseteq u_1^{\perp}$, 同时将 $V_X(u_1)$ 送到 $V_X(u_{-1})$. 不妨在 $\langle u_{-1}\rangle$ 中选 u_{-1}, 使 $(u_1, u_{-1})=1$. 记

$$U_1=u_1^{\perp}\cap V_X(u_{-1}),\ V_1=u_{-1}^{\perp}\cap V_X(u_1),$$

$$U_0=\langle u_1, U_1\rangle,\ V_0=\langle u_{-1}, V_1\rangle.$$

注意, $\langle u_1, u_{-1}\rangle\perp\langle U_1, V_1\rangle$, 从而 $\langle u_1, u_{-1}\rangle\cap\langle U_1, V_1\rangle=0$. 如果有 $0\neq u_0\in U_1\cap V_1$, 则 $V_X(u_0)$包含互不正交的 u_1、u_{-1}, 产生矛盾. 故 $U_1\cap V_1=0$, 从而 $U_0\cap V_0=0$.

第一步: $W=U_0\oplus V_0$ 是非退化子空间, 且对所有的 $0\neq u\in U_0$, $0\neq v\in V_0$, 有 $V_X(u)=\langle u, u^{\perp}\cap V_0\rangle$, $V_X(v)=\langle v, v^{\perp}\cap U_0\rangle$.

对任一对相互正交的 $0\neq u\in U_1$ 和 $0\neq v\in V_1$, 由 $u\in\langle v, u_1\rangle^{\perp}$ 知 $t_{v,u_1}\in X$ 定驻 u. 从而 t_{v,u_1}也定驻 $V_X(u)$, 将 $u_{-1}\in V_X(u)$ 送到 $u_{-1}t_{v,u_{-1}}=u_{-1}+v\in V_X(u_0)$. 于是 $v=(u_{-1}+v)-u_{-1}\in V_X(u)$. 这说明 $T_{u,v}=T_{v,u}<X$. 由 $0\neq v\in u^{\perp}\cap V_0$ 的任意性知 $V_X(u)\supseteq u^{\perp}\cap V_1$. 当然 $V_X(u)$还包含 u_{-1}及 u 本身. 故 $V_X(u)\supseteq\langle u, u_{-1}, u^{\perp}\cap V_1\rangle=\langle u, u^{\perp}\cap V_0\rangle$. 由维数 $d=V_X(u_1)$ 的最大性知

$$d\geq \dim V_X(u)\geq \dim\langle u, u^{\perp}\cap V_0\rangle\geq d.$$

这迫使上式中的"$\geq$"全部成为"$=$", 于是得 $V_X(u)=\langle u, u^{\perp}\cap V_0\rangle$, 且 $\dim(u^{\perp}\cap V_0)=d-1$, $u\notin V_0^{\perp}$, 由 $0\neq u\in U_1$ 的任意性知 $U_1\cap V_1^{\perp}=U_1\cap V_0^{\perp}=0$. 同样得 $V_X(v)=\langle v, v^{\perp}\cap U_0\rangle$ 对所有的 $0\neq v\in V_1$ 成立, 且 $V_1\cap U_1^{\perp}=0$, 由它及 $U_1\cap V_1^{\perp}=0$

可推出 $W_1 = U_1 \oplus V_1$ 是非退化子空间. 从而 $W = U_0 \oplus V_0 = \langle u_1, u_{-1}\rangle \perp W_1$ 是 $2d$ 维非退化子空间.

剩下还需考虑 $u \in U_0 \backslash U_1$ 及 $v \in V_0 \backslash V_1$ 的情形. 对这样的 u, 有 $(u, u_{-1}) = a \neq 0$, $u = a(u_1 + u_0)$ 对某个 $u_0 \in U_1$ 成立. 于是 $u = au_1 t_{u_0, u_{-1}}$. $t_{u_0, u_{-1}} \in X$ 在将 $au_1 \mapsto u$ 的同时将 $V_X(au_1) = V_X(u_1) = \langle u_1, u_1^{\perp} \cap V_0\rangle$ 送到 $V_X(u) = \langle u, u^{\perp} \cap V_0\rangle$. 这就证明了 $V_X(u) = \langle u, u^{\perp} \cap V_0\rangle$ 对所有的 $0 \neq u \in U_0$ 成立. 这说明了 $T_{u,v} = T_{v,u} < X$ 对所有的相互正交的非零向量 $u \in U_0$, $v \in V_0$ 成立, 每一个 $V_X(v)(0 \neq v \in V_0)$ 包含从而等于 $\langle v, v^{\perp} \cap U_0\rangle$.

U_0 与 V_0 是 $2d$ 维非退化子空间 W 的极大全奇异子空间, X 的子群 $X_0 = \langle T_{u,v} | u \in U_0, v \in V_0 \cap u^{\perp}\rangle$ 定驻 U_0 及 V_0, 且在这两个全奇异子空间上都诱导出 $\mathrm{SL}(d, F)$.

第二步: 设 $W \neq V$, 则 $d = 3$, X 是 IR4 类子群 $G_2(F)$.

由 $W \neq V$ 及 X 不可约知有长根子群 $T_{w_1, w_2} < X$ 不定驻 W. 记 $P = \langle w_1, w_2\rangle$. 如果 $d \geq 4$, 则 $\dim(V_0 \cap P^{\perp}) \geq \dim V_0 - 2 = d - 2 \geq 2$. 此时存在线性无关的 v_1、$v_2 \in V_0 \cap P^{\perp}$. T_{w_1, w_2} 固定 v_1、v_2 从而定驻 $V_X(v_i) = \langle v_i, U_0 \cap v_i^{\perp}\rangle (i = 1, 2)$, 并进而定驻 $U = \langle V_X(v_1), V_X(v_2)\rangle = \langle U_0, v_1, v_2\rangle$, 将 $U_0 \subset U$ 送到 $U \subset W$ 中. 同理, 当 $d \geq 4$ 时, 由于 $\dim(U_0 \cap P^{\perp}) \geq 2$, T_{w_1, w_2} 也将 V_0 送到 W 中, 从而将 $W = U_0 \oplus V_0$ 送到 W 中, 即定驻 W, 这与原假设矛盾. 因此, $W \neq V$ 仅当 $d = 3$ 时才有可能. 且 T_{w_1, w_2} 不定驻 W 仅当 $\dim(V_0 \cap P^{\perp}) = 1$ 或 $\dim(U_0 \cap P^{\perp}) = 1$ 时才有可能.

当然 $P = \langle w_1, w_2\rangle \not\subseteq W$. 在直和分解 $V = U_0 \oplus V_0 \oplus W^{\perp}$ 下记 $w_i = x_i + y_i + z_i$, 使 $x_i \in U_0$, $y_i \in V_0$, $z_i \in W^{\perp}$ (对 $i = 1, 2$). 不妨在 P 中选 $w_1 \notin W$, 即 $z_1 \neq 0$. 如果 z_2 与 z_1 线性相关, 还可进一步选 $w_2 \in P \backslash \langle w_1\rangle$, 使 $z_2 = 0$. 这样, 对 a、$b \in F$, 当 $a \neq 0$ 时就一定有 $az_1 + bz_2 \neq 0$. 由前面的讨论知 $P^{\perp} \cap U_0 = \langle y_1, y_2\rangle^{\perp} \cap U_0$ 与 $P^{\perp} \cap V_0 = \langle x_1, x_2\rangle^{\perp} \cap V_0$ 至少有一个的维数是 1, 不妨先设是后者, 则 $\dim\langle x_1, x_2\rangle = 2$. 特别, $x_2 \neq 0$. $t_{w_1, w_2} \in X$ 将任意 $y \in$

$V_0\backslash x_2^{\perp}$ 送到 $y+(y, x_2)w_1+(y, x_1)w_2=w+z\notin W$，其中 $w\in W$，$z=(y, x_2)z_1+(y, x_1)z_2\in W^{\perp}$，且 $z\neq 0$. 如果对这样的 y 存在 $0\neq u\in U_0\cap\langle y, y_1, y_2\rangle^{\perp}$，则 t_{w_1, w_2}固定 u 从而定驻 $V_X(u)=\langle u, V_0\cap u^{\perp}\rangle\subset W$，应将 $y\in V_X(u)$ 仍送到 W 中，导致矛盾. 这说明，对任意 $y\in V_0\backslash x_2^{\perp}$ 应有 $U_0\cap\langle y, y_1, y_2\rangle^{\perp}=0$，从而 $\langle y, y_1, y_2\rangle=V_0$，于是 $\dim\langle y_1, y_2\rangle=2$，且 $x_2^{\perp}\cap V_0=\langle y_1, y_2\rangle$，即 $U_0\cap\langle y_1, y_2\rangle^{\perp}=\langle x_2\rangle$. 同理，由 $\dim\langle y_1, y_2\rangle=2x$ 可得 $V_0\cap\langle x_1, x_2\rangle^{\perp}=\langle y_2\rangle$. 如果 $z_2\notin\langle z_1\rangle$，则同理还可得 $U_0\cap\langle y_1, y_2\rangle^{\perp}=\langle x_1\rangle$，但这导致 $\langle x_1\rangle=\langle x_2\rangle$，与 $\dim\langle x_1, x_2\rangle=2$ 相矛盾. 故只能 $z_2\in\langle z_1\rangle$，从而 $z_2=0$，即 $w_2=x_2+y_2\in W$. 特别，这说明 $\langle w_1, w_2\rangle\cap W\neq 0$ 对任意不定驻 W 的 $T_{w_1, w_2}<X$ 成立. $x_1\in y_2^{\perp}\backslash\langle y_1, y_2\rangle^{\perp}$，故 $(x_1, y_1)=c\neq 0$，且由 $Q(w_1)=c+Q(z_1)=0$ 得 $Q(z_1)=-c$. 记 $W_1=\langle W, w_1\rangle=W\perp\langle z_1\rangle$. 则 $X_1=\langle X_0, T_{w_1, w_2}\rangle$ 恰是作用在 $W_1=V(7, F)$ 上的 Chevalley 群 $G_2(F)$. $G_2(F)$在 W_1 的奇异线集合上可迁，所有的 $V_X(u)(u\in W_1)$ 的维数都达到了最大允许值 3. 因此 X 不可能再含有 $G_2(F)$以外的长根子群 $T_{u, w}$使 $\langle u, w\rangle\cap W_1\neq 0$.

若 $W_1\neq V$，则不可约子群 X 应含有 $T_{u, w}$不定驻 W_1. 如果 $T_{u, w}$定驻 W，则它定驻 $\langle V_X(u)|u\in W\rangle=W_1$，产生矛盾. 于是 $T_{u, w}$不定驻 W，但根据前面的讨论可知，这又导致 $W\cap\langle u, w\rangle\neq 0$，仍有矛盾. 故 $W_1=V$，$X=G_2(F)$，属于 IR4 类型.

第三步：设 $W=V$，则 $d=4$，X 是 IR5 类子群 Ω_7.

X_0 定驻 U_0 及 V_0，故不可约的 X 含有 X_0 之外的长根子群 T_{w_1, w_2}. 记 $P=\langle w_1, w_2\rangle$. 如果 $U_0\cap P\neq 0$，不妨设 $w_1\in U_0\cap P$，则 $w_2\in V_X(w_1)=\langle w_1, V_0\cap w_1^{\perp}\rangle$，又可选 $w_2\in V_0$，从而 T_{w_1, w_2} 含于 X_0，产生矛盾. 这说明 $U_0\cap P=0$. 同理 $V_0\cap P=0$. 对 $i=1, 2$，记 $w_i=x_i+y_i$，其中 $x_i\in U_0$，$y_i\in V_0$，$(x_i, y_i)=0$. 则 $\dim\langle x_1, x_2\rangle=\dim\langle y_1, y_2\rangle=2$. 注意，$T_{w_1, y_1}=T_{x_1+y_1, y_1}=T_{x_1, y_1}<X_0$，$V_X(w_1)$ 包含 y_1 及 w_2，由 $V_X(w_1)$ 全奇异知 $0=(y_1,$

$w_2) = (y_1, x_2 + y_2) = (y_1, x_2)$. 于是 $y_1 \in \langle x_1, x_2\rangle^{\perp}$. 同理 $y_2 \in \langle x_1, x_2\rangle^{\perp}$. 于是 $\langle y_1, y_2\rangle \subseteq \langle x_1, x_2\rangle^{\perp} \cap V_0$, 这只有在 $2 \le \dim(\langle x_1, x_2\rangle^{\perp} \cap V_0) = \dim V_0 - \dim\langle x_1, x_2\rangle = d - 2$ 时,即 $d \ge 4$ 时才有可能.

如果存在 $0 \ne y_3 \in \langle x_1, x_2\rangle^{\perp} \cap V_0$, 且 $y_3 \notin \langle y_1, y_2\rangle$, 则存在 $g \in X_0$ 在固定 x_1、x_2、y_1 的同时将 y_2 变到 $y_2 + y_3$. g 固定 w_1 且将 w_2 变到 $w_2 + y_3$, 于是 $V_X(w_1)$包含 $w_2g - w_2 = y_3 \in V_0$, $V_X(y_3)$包含 $w_1 = x_1 + y_1 \notin \langle y_3, U_0 \cap y_3^{\perp}\rangle$, 产生矛盾. 这证明了 $\langle x_1, x_2\rangle^{\perp} \cap V_0 \subseteq \langle y_1, y_2\rangle$, $d \le 4$. 从而 $d = 4$. 且 $\langle x_1, x_2\rangle^{\perp} \cap V_0 = \langle y_1, y_2\rangle$. $X \ge \langle X_0, T_{x_1+y_1, x_2+y_2}\rangle = \Omega_7$. 对 X 中任一不含于 X_0 的长根子群 T_{w_1, w_2},同样有: $\tilde{w}_1 = \tilde{x}_1 + \tilde{y}_1$, $\tilde{w}_2 = \tilde{x}_2 + \tilde{y}_2$, $\langle \tilde{x}_1, \tilde{y}_1\rangle \subset U_0$ 是平面,且 $\langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2\rangle^{\perp} \cap V_0 = \langle \tilde{y}_1, \tilde{y}_2\rangle$. X_0 可将 x_1、y_1、x_2、y_2 分别变到 $\tilde{x}_1$、$\tilde{y}_1$、$\tilde{x}_2$、$a\tilde{y}_2$, 从而将 T_{w_1, w_2} 共轭到 $T_{w_1, x_2+a\tilde{y}_2} < X$, 其中 $a \in K^*$. 如果 $a \ne 1$, 则 $\tilde{y}_2 \in \langle \tilde{w}_2, \tilde{x}_2 + a\tilde{y}_2\rangle \subset V_X(\tilde{w}_1)$, $\tilde{w}_1$ 含于 $V_X(\tilde{y}_2)$,但不含于 $\langle \tilde{y}_2, \tilde{y}_2^{\perp} \cap U_0\rangle$, 产生矛盾. 故 $a = 1$, $T_{w_1, w_2} < \Omega_7$, $X = \Omega_7$, 属于 IR5 类型. ▌

以下对短根子群生成的不可约子群的可能类型作出分类. 设 X 是由 $\Omega(V, Q)$的若干短根子群生成的群. 对每条奇异线$\langle u\rangle$,记 $V_X^*(u) = \{w \in V \mid T_{u,w} \le X, Q(w) \ne 0\}$. 即 $V_X^*(u)$是 $V_X(u)$中非奇异向量张成的子空间.

我们当然希望知道在什么情况下,有 $V_X^*(u) \ne V_X(u)$. 为此,需要考虑 $V_X(u)$中任一奇异向量 w 是否在 $V_X^*(u)$中. 当然必须假定 $V_X^*(u) \ne 0$, 即 $V_X(u)$不是全奇异子空间. 取 $V_X(u)$中的非奇异向量 x,则在绝大多数情形下,平面$\langle w, x\rangle$中含有与 x 不共线的非奇异向量 y, $w \in \langle x, y\rangle \subseteq V_X^*(u)$. 唯一的例外是: $F = F_2$ 且 $(w, x) = 1$. 因此,如果 $V_X^*(u) \ne 0$, 则 $V_X^*(u) \ne V_X(u)$ 的仅有的情况是: $F = F_2$, $V_X(u)$是全奇异子空间与一个双曲平面的正交和,此时 $V_X^*(u)$是全迷向子空间(当然含有非奇异向量),其维数比 $V_X(u)$少 1.

以下引理首先讨论两个短根子群生成子群的可能的类型.

引理 3.4.3　设 $F\neq F_2$，$X=\langle T_{u,x}, T_{v,y}\rangle$ 由短根子群 $T_{u,x}$、$T_{v,y}$ 生成，其中 u 与 v 不共线，$P_1=\langle u, x\rangle$ 与 $P_2=\langle v, y\rangle$ 不正交. 记 $W=\langle P_1, P_2\rangle$.

(1) 若 $(u, v)=0$，则 X 包含长根子群 $T_{u,v}$，但当 $F=F_3$，W 非退化且 $Q(x)=Q(y)$ 时例外.

(2) 若 $(u, v)\neq 0$，则 $X=\Omega(W)$，但下面的情形例外：$F=F_3$，$Q(x)=Q(y)$，且在选取 x、$y\in\langle u, v\rangle^{\perp}$ 后 $(x, y)=0$.

证明　(1) 当 $u\in W^{\perp}$ 时 $x\notin P_2^{\perp}$，此时 $t_{v,y}$ 固定 u，从而定驻 $V_X(u)$，$V_X(u)$ 包含所有的 $w(s)=s^{-1}(xt_{v,sy}-x)=(x, y)v-(x, v)y-s(x, v)Q(y)v$，其中 $s\in F^*$. 当 $(x, v)\neq 0$ 时，取 $s\neq 1$，得 $v=((s-1)Q(y))^{-1}(w(1)-w(s))\in V_X(u)$；当 $(x, v)=0$ 时，有 $(x, y)\neq 0$，$v=(x, y)^{-1}w(1)\in V_X(u)$. 当 $v\in W^{\perp}$ 时，同理可得 $u\in V_X(v)$. 总之，有 $T_{u,v}<X$.

在其余情形下，u 与 v 都不含于 $W^{\perp}$. 即 $(u, y)\neq 0$，$(v, x)\neq 0$，$v\notin x^{\perp}\cap P_2$. 因此可选 $y\in x^{\perp}$，不妨选 x、y，使 $(u, y)=(v, x)=1$. 此时对任意 $s\in F^*$，$L(X)$包含 $\langle u, x\rangle t_{v,sy}=\langle u+sv, x-sy-s^2Q(y)v\rangle$ 及 $\langle v, y\rangle t_{u,s^{-1}x}=\langle s^{-1}(u+sv), y-s^{-1}x-s^{-2}Q(x)u\rangle$，于是 $V_X(u+sv)$ 包含 $w=-s(x-sy-s^2Q(y)v)-s^2(y-s^{-1}x-s^{-2}Q(x)u)=Q(x)u+s^2Q(y)sv$. 当 $Q(x)\neq Q(y)$ 时，选 $s=1$，否则，按引理假设有 $F\neq F_2$、F_3，可选 $s\in F^*$ 使 $s\neq\pm 1$，从而 $s^2\neq 1$. 总之，可选 $s\in F^*$，使 $Q(x)\neq s^2Q(y)$. $V_X(u+sv)$ 包含 $Q(x)(u+sv)-(Q(x)u+s^2Q(y)sv)=(Q(x)-s^2Q(y))sv$，从而包含 v. 即 $L(X)$包含 $\langle u+sv, v\rangle=\langle u, v\rangle$，$T_{u,v}<X$.

(2) 不妨设 $(u, v)=1$. 并可分别在 P_1、P_2 中选取 x、$y\in\langle u, v\rangle^{\perp}$，记 $Q(x)=a\neq 0$，$Q(y)=b\neq 0$，$(x, y)=c$. 当 $c\neq 0$ 时，用 $c^{-1}x$ 代替 x，可使 $c=1$. 因此，总可设 $c=0$ 或 1.

$\forall\, s, r, s_1, r_1\in F$，$X$ 包含 $g_1=t_{v,sy}t_{u,rx}$ 及 $g_2=t_{u,r_1x}t_{v,s_1y}$，$L(X)$ 包含 $\langle u_1, x_1\rangle=\langle u, x\rangle g_1$ 及 $\langle v_1, y_1\rangle=\langle v, y\rangle g_2$. 取 s，r_1

$\neq 0$，记 $\lambda = sr$，$\lambda_1 = s_1 r_1$，则

$$u_1 = s^{-1}ug_1 = s^{-1}(1 - c\lambda + ab\lambda^2)u - sbv + \lambda bx - y,$$

$$x_1 = xg_1 = s^{-1}\lambda(2 - c\lambda)au + csv + (1 - c\lambda)x,$$

$$v_1 = r_1^{-1}vg_2 = r_1^{-1}(1 - c\lambda_1 + ab\lambda_1^2)v - r_1 au + \lambda_1 ay - x,$$

$$y_1 = yg_2 = r_1^{-1}\lambda_1(2 - c\lambda_1)bv + cr_1 u + (1 - c\lambda_1)y,$$

W 中异于$\langle u\rangle$与$\langle v\rangle$且不含于$\langle x, y\rangle$的奇异线$\langle w\rangle$具有形式

$$w = \alpha^{-1}Q(w_0)u - \alpha v + w_0$$

或

$$w = \alpha^{-1}Q(w_0)v - \alpha u + w_0 (0 \neq w_0 \in W_0,\ \alpha \in F^*),$$

且可在$\langle w\rangle$中适当选择 w，使它在$\langle x, y\rangle$中的分量 $w_0 = \beta x - y$ 或 $= \beta y - x$，$\beta \in F$. 注意，λ、λ_1 取遍 F 时，u_1、v_1 在$\langle x, y\rangle$中的分量 $\lambda bx - y$，$\lambda_1 ay - x$ 可取遍所有这样的 w_0. 而当 λ 取定之后，适当选择 $s \in F^*$，就可使$\langle u_1\rangle$、$\langle v_1\rangle$取遍上述形式的所有的奇异线$\langle w\rangle$. 这说明 X 可将$\langle u\rangle$或$\langle v\rangle$送到$\langle x, y\rangle$之外但在 W 之中的所有的奇异线$\langle w\rangle$，从而将 $V_X(u) \supseteq \langle u, x\rangle$ 或 $V_X(v) \supseteq \langle v, y\rangle$ 送到 $V_X(w)$.

如果 $\dim W = 3$，即 $\langle x\rangle = \langle y\rangle$，$\langle x, y\rangle = \langle x\rangle$ 中当然不含奇异线，于是对每个奇异向量 $0 \neq w \in W$，X 可将 $V_X(u) = u^\perp \cap W$ 或 $V_X(v) = v^\perp \cap W$ 送到 $V_X(w) = w^\perp \cap W$. X 包含 $\Omega(W)$中所有的根子群，从而等于 $\Omega(W)$.

设 $\dim W = 4$，即 $\dim\langle x, y\rangle = 2$. 我们设法证明

$$\dim V_X(u_1) = \dim V_X(v_1) = 3 \text{ 对某个 } u_1 \text{ 和 } v_1 \text{ 成立},$$

于是 $\dim V_X(w) = 3$ 即 $V_X(w) = w^\perp \cap W$ 对 W 中所有不含于$\langle x, y\rangle$的奇异向量 w 成立. 而对含于$\langle x, y\rangle$的非零奇异向量 w，则由 $w \in u^\perp \cap W = V_X(u)$ 和 $w \in V_X(v)$ 知 $V_X(w)$包含从而等于 $\langle w,$

$u, v\rangle = w^{\perp} \cap W$，这就能得到 $X = \Omega(W)$.

以下证明 $\dim V_X(u_1) = \dim V_X(v_1) = 3$ 对某个 u_1、v_1 成立.

如果 $\mathrm{char}F \neq 2$，且可选 λ 使 $1 - c\lambda + ab\lambda^2 = 0$，则 $u_1 = -sbv + (\lambda bx - y)$ 与 v 正交，其中 $Q(\lambda bx - y) = b(ab\lambda^2 - c\lambda + 1) = 0$. 但 $(x_1, v) = s^{-1}\lambda(2 - c\lambda)a$ 与 $(x_1, y) = (1 - c\lambda)c$ 不可能同时为 0，否则，$1 = (2 - c\lambda) - (1 - c\lambda) = 0$，产生矛盾. 于是 $\langle u_1, x_1\rangle$ 与 $\langle v, y\rangle$ 不正交. 除一个例外情形外，可用本引理的结论(1)得 $T_{v, u_1} < X$，于是 $V_X(v) \supseteq \langle v, y, u_1\rangle$ 与 $V_X(u_1) \supseteq \langle u_1, x_1, v\rangle$ 都至少 3 维，导致 $X = \Omega(W)$. 引理结论(1)失效的例外情形是：$F = F_3$，$a = Q(x) = Q(x_1) = Q(y) = b$ 且 $\langle u_1, x_1, v, y\rangle$ 非退化. 但在 $F = F_3$ 且 $a = b \neq 0$ 的情形下 $0 = 1 - c\lambda + ab\lambda^2 = 1 - c\lambda + 1 = 2 - c\lambda$，故 $(x_1, v) = s^{-1}\lambda(2 - c\lambda) = 0$. v 又与 u_1、y 都正交，故 v 与 $\langle u_1, x_1, v, y\rangle = W$ 正交，$\langle u_1, x_1, v, y\rangle$ 退化. 这说明所述的例外情形不会出现.

以下设 $\mathrm{char}F = 2$，或 $\mathrm{char}F \neq 0$ 且 $\nu\langle x, y\rangle = 0$ (即 $1 - c\lambda + ab\lambda^2 \neq 0$, $\forall \lambda \in F$). 当 $\mathrm{char}F = 2$ 时，由于 $F \neq F_2$，$|F^*| \geq 3$，而使 $1 - c\lambda + ab\lambda^2 = 0$ 的 λ 值至多有两个，必然可选 $\lambda \in F^*$ 使 $1 - c\lambda + ab\lambda^2 \neq 0$. 当 $\mathrm{char}F \neq 2$ 时，按假设 $1 - c\lambda + ab\lambda^2 \neq 0$ 对所有的 $\lambda \in F^*$ 成立. 因此，无论如何都可选 $\lambda \in F^*$，使 $1 - c\lambda + ab\lambda^2 \neq 0$. 取 $s = 1$，$\lambda_1 = (ab\lambda)^{-1}$，$r_1 = (ab\lambda)^{-1}(1 - c\lambda + ab\lambda^2)$. 则 $\langle u_1\rangle = \langle v_1\rangle$，$V_X(u_1) = V_X(v_1) \supseteq \langle u_1, x_1, y_1\rangle$. 只要能选 λ、s 使 $\langle u_1, x_1, y_1\rangle$ 的维数为 3 即可. 依次将 u_1、x_1、$(ab\lambda)y_1$ 在 W 的基 $\{u, v, x, y\}$ 下的坐标(都是 F 上的四维行向量)作为各行排成 3 行 4 列的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 - c\lambda + ab\lambda^2 & -b & \lambda b & -1 \\ \lambda(2 - \lambda c)a & c & 1 - c\lambda & 0 \\ (1 - c\lambda + ab\lambda^2)c & (1 - c\lambda + ab\lambda^2)^{-1}(2ab\lambda - c)b & 0 & ab\lambda - c \end{pmatrix},$$

则 $\mathrm{rank}A = \dim\langle u_1, v_1, y_1\rangle$. 只须选 λ 使 $\mathrm{rank}A = 3$ 即可. 为此，只须使 A 的后三列组成的方阵的行列式

$$-b(ab\lambda - c) + (1 - c\lambda + ab\lambda^2)^{-1}(1 - c\lambda)(2ab\lambda - c)b \neq 0,$$

即 $$(ab\lambda - c)(ab\lambda^2 - c\lambda + 1) + (c\lambda - 1)(2ab\lambda - c) \neq 0.$$

当 $c = 0$ 时,即要求 $ab\lambda(ab\lambda^2 - 1) \neq 0$. 只要能选 $\lambda^2 \neq (ab)^{-1}$ 即可. 除例外情况 $F = F_3$ 且 $ab = 1$ (即 $Q(x) = Q(y)$) 以外,这样的 λ 总是存在的.

设 $c = 1$. 如果 $ab \neq 1$, 取 $\lambda = 1$ 即可. 如果 $ab = 1$, 则所要求的条件变成 $(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) + (\lambda - 1)(2\lambda - 1) \neq 0$, 即 $(\lambda - 1)(\lambda + 1)\lambda \neq 0$, 只要能取 $\lambda \in F^*$, 使 $\lambda \neq \pm 1$ 即可. 由于我们要求 $1 - c\lambda + ab\lambda^2 = 1 - \lambda + \lambda^2 \neq 0$, 此时 $F \neq F_3$, 否则,取 $\lambda = -1$ 将会使 $1 - \lambda + \lambda^2 = 0$. 而在 $F \neq F_2$、F_3 的情形下,总可取非零的 $\lambda \neq \pm 1$. 这样就完成了引理的证明. ▌

除少数特别情形外,正交群中由短根子群生成的不可约子群只能是 $\Omega(V, Q)$. 下面的引理告诉我们,需要多少短根子群就足以生成 $\Omega(V, Q)$了.

引理 3.4.4 设 $X \leq G = \Omega(V, Q)$. 如果有 V 中互不正交的一对奇异向量 u、v 使 $V_X(u) = u^{\perp} \cap V$, $V_X(v) = v^{\perp} \cap V$, 则 $X = G$.

证明 只要证明 $V_X(w) = w^{\perp}$ 对所有的非零奇异向量 $w \in V$ 成立,则 X 包含 G 的所有的根子群,从而等于 G.

记 $V = \langle u, v \rangle \perp W$. 且不妨用 $(u, v)^{-1}u$ 代替 u,化为 $(u, v) = 1$ 的情形.

如果奇异向量 $w \in \langle u, v \rangle$, 则 $w \in \langle u \rangle$ 或 $w \in \langle v \rangle$, 已经知道 $V_X(w) = w^{\perp}$. 在其余情形下 $w = au + bv + z$, $0 \neq z \in W$, a、$b \in F$. 只要能找到 $g \in X$ 将 $u \mapsto w$, 则 $V_X(w) = V_X(u)g = u^{\perp}g = w^{\perp}$. 若 $Q(z) = 0$, 则 $ab = 0$, 不妨设 $b = 0$, 并可在正则子空间 W 中取奇异向量 y,使 $(y, z) = 1$, 则 $\langle T_{u,y}, T_{v,z} \rangle \leq X$ 在 $\langle u, z \rangle$上诱导出 $\mathrm{SL}(2, F)$,可将 $u \mapsto w$. 设 $Q(z) \neq 0$, 则 $ab \neq 0$, 不妨在$\langle w \rangle$中选 w 使 $w = u - cv + z$, 其中 $c = Q(z) \neq 0$, 于是 $t_{v,-z} \in X$ 将 $u \mapsto w$. 这就证明了 $V_X(w) = w^{\perp}$ 对所有的非零奇异

向量 $w \in V$ 成立,因而 $X = \Omega(V, Q)$. ▌

下面可以定出正交群中由短根子群生成的不可约子群.

命题 3.4.5 设 X 是由 $G = \Omega(n, F, Q)$ 中某些非退缩短根子群生成的不可约子群,则

(1) X 属于定理 3.4.1 所述类型 IR1, IR6, IR7 或 IR8.

(2) 如果下列条件之一满足,则 $X = G$.

(i) $F \neq F_2$、F_3.

(ii) $F = F_3$, 且存在 V 的至少 4 维非退化子空间 W, $\nu(W) \geq 1$, 使 $X \geq \Omega(W)$.

(iii) $F = F_2$, 且存在 V 的至少 5 维正则子空间 W, $\nu(W) \geq 1$, 使 $X \geq \Omega(W)$.

证明 设 d 为所有的 $V_X^*(u)$ 的最大维数,并设 $V_X^*(u_1) = d$ 达到这个最大值.

(3.4.5.1) 当 $d \geq 3$ 时,有 $X = G$, 唯一的例外是: $d = 3$, $F = F_2$, X 是嵌入 G 中的 A_{n+1} 或 A_{n+2}, 属于类型 IR7.

不可约子群 X 中有元素 g_0 将 $\langle u_1 \rangle \mapsto \langle v_1 \rangle \not\subseteq u_1^\perp$, 同时将 $V_X^*(u_1) \mapsto V_X^*(v_1)$. 假设已选取这样的 g_0, 使 $W_0 = V_X^*(u_1) \cap V_X^*(v_1)$ 的维数 r 最大. 当然 $r \leq d - 1$. 记

$$W = \langle V_X^*(u_1), V_X^*(v_1) \rangle, \ W_1 = v_1^\perp \cap V_X^*(u_1) \supseteq W_0.$$

如能证明 $r = d - 1$, 则将有 $W_1 = W_0$, $W = \langle u_1, v_1 \rangle \perp W_0$.

$V_X^*(v_1)$ 含有非奇异向量 x, 且由于 $v_1 \notin u_1^\perp$, 可选 $x \in \langle v_1, x \rangle \cap u_1^\perp$. 短根元素 $t_{v_1, x}$ 将

$$\langle u_1 \rangle \mapsto \langle u_{-1} \rangle = \langle u_1 - (u_1, v_1)(x + Q(x)v_1) \rangle \notin u_1^\perp,$$

则 $$V_X^*(u_1) \cap V_X^*(u_{-1}) \supseteq \langle v_1, x \rangle^\perp \cap V_X^*(u_1),$$

其维数 $\geq d - 2$. 由 r 的最大性知 $r \geq d - 2$. 因此 $r = d - 1$ 或 $d - 2$.

不妨在 $\langle v_1 \rangle \not\subseteq u_1^\perp$ 中选 v_1, 使 $(u_1, v_1) = 1$. 若有非零奇异向量 $u_0 \in W_0 \cap W_1^\perp$, 则对任意 $z \in W_1$ 有 $V_X^*(u_0) \supseteq \langle u_1, v_1,$

$v_1 t_{u_1,z}\rangle \ni z$，即 $V_X^*(u_0) \supseteq \langle u_1, v_1, W_1\rangle = \langle v_1, V_X^*(u_1)\rangle$，其维数 $\geq d+1$，产生矛盾. 故 $W_0 \cap W_1^{\perp}$ 不含非零奇异向量. 特别，当 $r=d-1$ 时，$W_1 = W_0$ 是正则子空间，从而 W 是正则子空间.

我们希望 $r=d-1$. 由于 $V_X^*(u_1)$、$V_X^*(v_1)$能由非奇异向量张成，W_1 与 $W_{-1} = u_1^{\perp} \cap V_X^*(v_1)$ 也都由非奇异向量张成. 任取非奇异向量 $x \in W_1$，$y \in W_{-1}$，则当 $F \neq F_2$、F_3时，由引理 3.4.3 得 $X \geq \Omega\langle u_1, v_1, x, y\rangle$，$x \in V_X(v_1)$，$y \in V_X(u_1)$. 这证明了当 $F = F_2$、F_3 时，必有 $W_1 = W_{-1} = W_0$，$r = d-1$. 当 $F = F_3$ 时，若能选 $Q(x) \neq Q(y)$ 或 $(x, y) \neq 0$，仍可得 $x \in V_X(v_1)$，$y \in V_X(u_1)$. 设 $r = d-2$，则 $F = F_2$ 或 F_3. 假如有非奇异向量 $x \in W_0$，则用 $t_{v_1,x}$代替 g_0，可得到

$$W = \langle V_X^*(u_1), v_1\rangle = \langle u_1, v_1\rangle \oplus W_0, \ r = \dim W_0 = d-1.$$

这说明当 $r = d-2$ 时，W_0 不含非奇异向量，$W_0 \cap W_1^{\perp}$ 也就不含非奇异向量. 但另一方面，$W_0 \cap W_1^{\perp}$ 又不含非零奇异向量，这迫使 $W_0 \cap W_1^{\perp} = 0$. 但 $\dim W_1 = d-1 = \dim W_0 + 1$，$W_1 = \langle W_0, u_2\rangle$ 对任一 $u_2 \in W_1 \backslash W_0$，$W_0 \cap u_2^{\perp} = W_0 \cap W_1^{\perp} = 0$，$\dim W_0 \leq 1$. 但已假设 $d \geq 3$，从而 $\dim W_0 = d-2 \geq 1$，故 $\dim W_0 = 1$，$d = 3$. 设 $W_0 = \langle w_0\rangle$，则 w_0 奇异，$W_1 = \langle u_2, w_0\rangle$ $((u_2, w_0) \neq 0)$ 是双曲平面. 同理 $W_{-1} = \langle v_2, w_0\rangle$ 也是双曲平面. 当 $F = F_2$时，双曲平面 W_1 不能由非奇异向量张成，产生矛盾. 当 $F = F_3$ 时，对任意非奇异向量 $x \in W_1$ 可选 $y \in W_{-1}$ 使 $Q(y) = -Q(x) \neq Q(x)$，仍可由引理 3.4.1 得 $x \in V_X(v_1)$，从而 $W_1 = W_0$，$r = d-1$.

这证明了 $r = d-1$，$W = \langle u_1, v_1\rangle \perp W_0$ 是正则子空间. 由于 $V_X(u) = V_X^*(u)$ 对 $u = u_1$ 或 v_1 成立，对 $\Omega(W, Q_W)$引用引理 3.4.4得 $\Omega(W, Q_W) \leq X$，$V_X(u) \supseteq u^{\perp} \cap W$ 对 W 中所有的奇异线$\langle u\rangle$成立. 且由 d 的最大性知 $V_X(u) = u^{\perp} \cap W$. 如果 $W = V$，则 $X = G$，已达到目的. 设 $W \neq V$，我们证明只能 $F = F_2$ 且 $d = 3$.

X 包含短根子群 $T_{w,z}$不定驻 W. 如果 $F = F_2$ 但 $d \geq 4$，

$\dim W = d+1 \geq 5$，在至少 3 维的 $\langle w, z\rangle^{\perp} \cap W$ 中存在两个不共线的奇异向量 w_1、w_2，$T_{z,w}$定驻 w_1、w_2，从而定驻 $\langle V_X^*(w_1), V_X^*(w_2)\rangle = W$，产生矛盾. 故当 $F = F_2$ 时，只能 $d=3$. 设 $F \neq F_2$，应有 $P = \langle w, z\rangle \nsubseteq W$ 且 $P \nsubseteq W^{\perp}$. 事实上，$w \notin W$，否则，$P \subseteq V_X^*(w) \subset W$. 且 $w \notin W^{\perp}$，否则，$V_X^*(w) \supseteq \langle Pg \mid g \in \Omega(W)\rangle \supseteq \langle W \cap w^{\perp}, w\rangle$，其维数 $\geq d+1$，这与 d 的最大性相矛盾. 对每个奇异向量 $u \in W\backslash w^{\perp}$，取非奇异向量 $x \in \langle u, w\rangle^{\perp} \cap W$，当 $F = F_3$ 时，还可选 $Q(x) \neq Q(z)$. 于是由引理 3.4.3 得 $x \in V_X^*(w)$ 及 $P \cap u^{\perp} \subset V_X^*(u) \subset W$. 不妨选取 $\langle z\rangle = P \cap W$，则 $\langle z\rangle = P \cap u^{\perp}$，所有的奇异向量 $u \in W\backslash w^{\perp}$ 都在 $W \cap z^{\perp}$ 中. 若 $W \cap z^{\perp} \neq W$，则存在奇异向量 $u \in W\backslash z^{\perp}$，从而 $u \in w^{\perp}$. 取非奇异向量 $y \in W \cap u^{\perp}$，且当 $F = F_3$ 时，可选 $Q(y) \neq Q(z)$，由引理 3.4.3得 $w \in V_X(u) \subset W$，产生矛盾. 故 $W \cap z^{\perp} = W$，$z \in \mathrm{Rad}W \neq 0$. 这仅当 $\mathrm{char}F = 2$ 才有可能. 对每个奇异向量 $u \in W\backslash w^{\perp}$ 和非奇异向量 $x \in \langle u, w\rangle^{\perp} \cap W$，有 $\langle w, x\rangle \in L(X)$. 用 $T_{w,x}$代替 $T_{w,z}$可知 $x \in \mathrm{Rad}W$. 可见商空间 $W/\mathrm{Rad}W$ 的维数只能为 2，$W = \langle u_1, v_1\rangle \oplus \mathrm{Rad}W$. 且 X 中不定驻 W 的短根子群只能具有形式 $T_{w,z}, z \in \mathrm{Rad}W$，$w \notin W \cup W^{\perp}$. 并且还应有 $w \notin \langle u_1, v_1\rangle^{\perp}$，否则，$T_{w,z}$ 定驻 u_1、v_1，从而定驻 $\langle V_X^*(u_1), V_X^*(v_1)\rangle = W$. 按照定理的假设，$X$ 包含非退缩根子群 T_{w_0, z_0}，$P_0 = \langle w_0, z_0\rangle$ 与 $\mathrm{Rad}V$ 的交为 0，且 T_{w_0, z_0}不定驻 W，从而 $P \cap \mathrm{Rad}W \neq 0$. 这说明 $\mathrm{Rad}W \nsubseteq \mathrm{Rad}V$，可选 $w_0 \notin (\mathrm{Rad}W)^{\perp}$，并写 $\mathrm{Rad}W = \langle x_1\rangle \oplus E_0$，其中 $(w_0, x_1) = 1$，$E_0 \subseteq w_0^{\perp}$. 不妨设 $(u_1, w_0) \neq 0$，取 $z_1 = u_1 + sx_1 \in w_0^{\perp}$，$s \in F^*$，则 $L(X) \ni \langle u_1, z_1\rangle t_{w_0, z_0} = \langle w_1, z_1\rangle$，$w_1 = u_1 t_{w_0, z_0} \notin W$，且 $w_1 \notin W^{\perp}$，但 $\langle w_1, z_1\rangle \cap W = \langle z_1\rangle \nsubseteq \mathrm{Rad}W$，仍有矛盾.

于是只剩下 $F = F_2$ 且 $d = 3$ 的情形. 4 维正则子空间 $W_4 = \langle u_1, v_1\rangle \perp W_0$ 非退化. W_0 可由非奇异向量张成，故不是双曲平面. 于是 W 的 Witt 指数是 1，$\Omega(W) = \Omega^-(4, 2)$. 我们知道

$\Omega^-(4, 2) \cong A_5$. 按照§2.3所述,取5元集合$\mathscr{E}_5 = \{\varepsilon_i | 1 \leq i \leq 5\}$为基,在$F_2$上张成5维空间$V_5 = V(5, 2)$,并在$V_5$上定义二次型$\tilde{Q}$及相伴的对称双线性型$\tilde{f}$,使

$$\tilde{Q}(\varepsilon_i) = 0 (1 \leq i \leq 5), \tilde{f}(e_i, e_j) = 1 (i \neq j).$$

则$\mathscr{E}_5$上的交错群A_5在4维空间$W_4 = \left\{ \sum_{i=1}^5 a_i \varepsilon_i \middle| \sum_i a_i = 0 \right\} \subset V_5$上诱导出$\Omega^-(4, 2)$. W_4与W度量同构,可以等同起来.这就将W_4嵌入了$V = V(n, F_2, Q)$(嵌入象为W),而集合$\mathscr{E}_5$上的A_5被嵌入X.

另取F_2上$n+2$维向量空间V_{n+2},设$\mathscr{E}_{n+2} = \{\varepsilon_i | 1 \leq i \leq n+2\}$是它的一组基.在$V_{n+2}$上定义二次型$\tilde{Q}$及相伴的对称双线性型$\tilde{f}$使所有的$\tilde{Q}(\varepsilon_i) = 0$,且$\tilde{f}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 1 (\forall i \neq j)$. 并将$\tilde{Q}$、$\tilde{f}$在$V_{n+2}$的任何子空间上的限制仍记为$\tilde{Q}$、$\tilde{f}$.记

$$W_{n+1} = \left\{ \sum_{i=1}^{n+2} a_i \varepsilon_i \middle| \sum_i a_i = 0 \right\}.$$

则作用于$\mathscr{E}_{n+2}$上的交错群A_{n+2}被嵌入$\Omega(W_{n+1}, \tilde{Q})$. 对每个自然数$m \leq n+2$,记$\mathscr{E}_m = \{\varepsilon_i | 1 \leq i \leq m\}$,设$V_m$是$\mathscr{E}_m$在$V_{n+2}$中所张成的$m$维子空间,$W_{m-1} = V_m \cap W_n$. 则集合$\mathscr{E}_m$上的交错群$A_m < A_{n+2}$被嵌入$\Omega(W_{m-1}, \tilde{Q})$. 已经知道当$m = 5$时,$(W_4, \tilde{Q})$可以保度量地嵌入$V(n, F_2, Q)$,且$A_5 = \Omega(W_4, \tilde{Q}) = \Omega^-(4, 2)$被嵌入$X \leq \Omega(n, F_2, Q)$. 因此,存在最大的奇数$m = 2k+1 \geq 5$,使非退化空间$(W_{2k}, \tilde{Q})$可以保度量地嵌入$V = V(n, F_2, Q)$,且$A_{2k+1}$含于$X$.

我们指出:$G = \Omega(n, F_2, Q)$的短根元素$t_{u,x}$等于两个正交平延$\rho_{x,1}$与$\rho_{u+x,1}$之积.而$t_{u,x} \in \Omega(W_{2k}) \leq G$含于$A_{2k+1}$的充分必要条件是:有两两不同的$i$、$j$、$s$、$t \in \{1, 2, \cdots, 2k+1\}$,使$u = \varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_s + \varepsilon_t$, $x = \varepsilon_i + \varepsilon_j$,此时$t_{u,x}$等于$A_{2k+1}$的元素$(ij)(st)$,

即 S_{2k+1} 中两个不相交对换的乘积.

我们断言：当 $\mathrm{Rad}V = 0$ 时，必然 $W_{2k} = V$；当 $\mathrm{Rad}V \neq 0$ 时，V 可等同于 W_{2k+1}，且 $A_{2k+2} \leq X$. 这导致 $X \cong A_{n+1}$ 或 A_{2n+2}，属于 IR7 类型.

若不然，设 $W_{2k} \neq V$. 则有短根元素 $t_{w,z} \in X$ 不定驻 W_{2k}，且当 $W_{2k} + \mathrm{Rad}V \neq V$ 时，还可进一步要求 $t_{w,z}$将 W_{2k}送到 $W_{2k} + \mathrm{Rad}V$ 之外. 于是$\langle w, z\rangle$既不含于 W_{2k}也不与 W_{2k}正交，当 $W_{2k} + \mathrm{Rad}V \neq V$ 时，它还应不含于 $W_{2k} + \mathrm{Rad}V$. 在正交和分解 $V = W_{2k} \oplus W_{2k}^{\perp}$ 下记 $w = u + v$, $z = x + y$. A_{2k+1} 中定驻 w 的全体元素作用于 z 所得的象张成的子空间 $U \subseteq V_X(w)$. 于是应有 $\dim U \leq d = 3$. 这将对 u、x、v、y 施加很强的限制（详细推导见文献[35]），这些限制足以使$\langle W_{2k}, w, z\rangle$成为 $(W_{2k+2}, \tilde{Q})$ 在 V 中的嵌入象，而 $t_{w,z} \in X$ 成为作用于 W_{2k+2} 上的交错群 A_{2k+3} 中的元素（两个对换的乘积），它与 A_{2k+1} 一起生成 $A_{2k+3} \leq X$. 这与 $2k+1$ 的最大性相矛盾. 恰如所需.

(3.4.5.2) $d = 2$ 且 $F \neq F_2$，则 $F = F_3$，$X = A_{n+1}$ 或 A_{n+2} 属于类型 IR7.

任取短根子群 $T_{u_0, x_0} < X$. 则不可约子群 X 可将$\langle u_0, x_0\rangle$变到$\langle v_0, y_0\rangle$使 $(u_0, v_0) = 1$. 不妨在$\langle u_0, x_0\rangle$中选 $x_0 \perp v_0$，在$\langle v_0, y_0\rangle$中选 $y_0 \perp u_0$. 记 $U = \langle u_0, v_0, x_0, y_0\rangle$. 则除了 $F = F_3$ 且 $(x_0, y_0) = 0$ 的情形以外，可用引理 3.4.3 得出 $\Omega(U) = \langle T_{u_0, x_0}, T_{v_0, y_0}\rangle \leq X$. 此时 $u_0^{\perp} \cap U$ 是 $V_X(u_0)$的子空间，其维数 $\dim U - 1 \leq d = 2$，这迫使 $\dim U = 3$. 在例外情形 $F = F_3$ 且 $(x_0, y_0) = 0$ 下，用 $\langle u_0, x_0\rangle t_{v_0, y_0} \in L(X)$ 代替$\langle v_0, y_0\rangle$，可使 $\dim U = 3$，这样就仍可用引理 3.4.3 得 $\Omega(U) \leq X$. 如果 $U = V$，X 属于类型 IR1，定理已成立.

以下设 $U \neq V$. 则 X 含有短根子群 $T_{w,z}$不定驻 U. 如果 $w \in U^{\perp}$，则 $\Omega(U) < X$ 在定驻 w 的同时可将 z 变到$\langle w, z\rangle$之外，$\dim V_X(w) > 2$，产生矛盾. 故 $w \notin U^{\perp}$.

对每个奇异向量 $u \in U\backslash w^{\perp}$，任取非奇异向量 $x \in U \cap u^{\perp}$. 当 $F \neq F_3$ 时，或当 $F = F_3$ 但是 $Q(z) \neq Q(x_0) = Q(x)$ 时，由引理 3.4.3 得到 $X \geq \langle T_{u,x}, T_{w,z} \rangle = \Omega(U_1)$，其中 $U_1 = \langle u, w, x, z \rangle$. $V_X(u) = \langle u, w \rangle = U_1 \cap u^{\perp}$ 迫使 $\dim U_1 = 3$，这在 $F = F_3$ 且 $Q(z) \neq Q(x_0)$ 时，是不可能的. 在 $F \neq F_3$ 时，由 $\dim U_1 = 3$ 知 $U \cap \langle w, z \rangle = \langle x_1 \rangle = (u^{\perp} \cap U) \cap w^{\perp}$，它是非奇异线并且与 u 的选取无关. 这当然迫使 $w \notin U$，否则，$\langle w, z \rangle = \langle w, x_1 \rangle \subset U$. 注意，$x_1$ 与 u 正交. 但 U 中与 w 不正交的奇异向量可以张成 U，从这些奇异向量中必可选出 u_1 与 x_1 不正交. 用 u_1 代替 u，则不可能再使 $\langle x_1 \rangle = (u_1^{\perp} \cap U) \cap w^{\perp}$ 成立. 产生矛盾.

只剩下 $F = F_3$ 的情形，在此情形下，可以证明 X 属于类型 IR7. 推导过程比较繁琐，这里从略. 详见文献[35].

(3.4.5.3) $d = 2$ 且 $F = F_2$，则 $n = 4k$，$X = O^{\pm}(2k, 4)$，属于类型 IR6.

证明省略. 详见文献[70].

(3.4.5.4) 命题结论(2)成立.

由前面各步骤可知，当 $F \neq F_2$、F_3 时只能 $X = G$.

设有 m 维正则子空间 W，$\nu(W) \geq 1$，使 $X \geq \Omega(W)$. 取 W 中的非零奇异向量 u，则 $V_X(u)$ 包含 $m-1$ 维空间 $W \cap u^{\perp}$，这说明 $d \geq m-1$. 当 $m \geq 4$ 时 $d \geq 3$，由(3.4.5.1)知 $F = F_3$ 时 $X = G$. 当 $m \geq 5$ 时 $d \geq 4$，仍由(3.4.5.1)可知 $F = F_2$ 时 $X = G$. ▌

§3.5 含根子群的不可约子群

前面各节讨论了典型群中由根子群生成的不可约子群. 现在可以利用前面的结果来讨论典型群 G 中含根子群的极大子群 M 的可能的形式. 如果 M 可约或者非本原，它应当属于 §2.2 中所定义的子群类型 C_1 或者 C_2. 设 M 不可约，并且本原. M 中所含的全体根子群生成 M 的一个正规子群 X. 如果 X 不可约，它已经在前面各节中定出了，而 M 是它在 G 中的正规化子，也可以认为已

经定出了.X 是否可能为可约的呢？下面的定理给出了回答.

定理 3.5.1 设 G 是作用于 $V=V(n, K)$ 上的典型群，M 是 G 的子群，且在 V 上不可约、本原. 如果 M 包含 G 的至少一个根子群 T，X 是 T 在 M 中所有的共轭生成的群. 则下列结论之一成立：

(i) X 是 M 的不可约正规子群.

(ii) K 是域，$n=2m$ 且 m 是偶数，$G=\Omega(2m, K, Q)$. $V=W\otimes_K A$ 是 K 上 m 维空间 W 和 2 维空间 A 的张量积，在 W、A 上分别定义了非退化交错内积 f_1、f_2，且 V 上的内积 $f=f_1\otimes f_2$，Q 由 f 及条件 $Q(w\otimes w)=0$ ($\forall\, w\in W$, $\beta\in A$) 决定. $M\leq \mathrm{GSp}(W, f_1)\otimes \mathrm{GSp}(A, f_2)$，$T$ 及其共轭是 G 的长根子群，且具有形式 $T_w\otimes 1_A$，T_w 是辛群 $\mathrm{Sp}(W, f_1)$的长根子群.

证明 X 的正规性显然. 若 X 不可约，则结论(i)成立. 设 X 可约，如果 V 是非齐次 K-X-模，则由引理 2.4.2(Clifford 定理)知，M 在齐次分量集合 $\{V_i \mid 1\leq i\leq m\}$ (其中 $m\geq 2$)上诱导出传递置换群，M 非本原，与 M 的本原性相矛盾. 故 V 是齐次 K-X-模，$V=\bigoplus_{j=1}^{k} W_j$，其中 $k\geq 2$，$W_j(1\leq j\leq k)$ 是相互同构的不可约 K-X-子模. 适当选取每个 W_j 的基凑成 V 的基，可使 X 中的所有的元素的矩阵具有形式 $\mathrm{diag}(P, \cdots, P)=I^{(k)}\otimes P$，$P\in \mathrm{GL}(r, K)$，其中 $r=\dim_K W_1=n/k$. 任取 G 的根子群 T 中的非单位元 $g=I^{(k)}\otimes P$，则 $\mathrm{rank}_K(g-I)=1$ 或 2. 但另一方面，$\mathrm{rank}(g-I)=\mathrm{rank}(I^{(k)}\otimes P-I)=k\cdot\mathrm{rank}(P-I)$ 是 $k\geq 2$ 的倍数，不可能等于 1，且仅当 $k=2$ 且 $\mathrm{rank}(P-I)=1$ 时可能等于 2.

以下设 $k=2$，$\mathrm{rank}(P-I)=1$，$\mathrm{rank}(g-I)=2$，$V=W_1\oplus W_2$，且存在 FX-同构 $\pi: W_1\to W_2$. g 在 $W_i(i=1, 2)$ 上的限制都是平延，$\langle u_i\rangle=W_i(g-I)(i=1, 2)$ 是 W_i 的一维子空间，且 $\pi(\langle u_1\rangle)=\langle u_2\rangle$. 不妨设 $u_2=\pi u_1$，则 $\mathrm{Im}(g-I)=\langle u_1, u_2\rangle$，$\mathrm{Im}(g-I)\cap W_i=\langle u_i\rangle$ 是 W_i 的一维子空间(对 $i=1, 2$). 特别，$\mathrm{Im}(g-I)$ 既不含于 W_1 也不含于 W_2.

先设 $J \neq 1$，g 是酉二平延

$$\eta_{u,w}: x \mapsto x + f(x, w)u + f(x, u)u,$$

根子群 $T = \{\eta_{\theta u, w} | \theta \in K\}$. 如果有 $x \in W_i (i = 1$ 或 $2)$，使 $a = f(x, w)$ 和 $b = f(x, u)$ 都不为 0，则

$$y(\theta) = x(\eta_{\theta u, w} - I) = a\theta u + b\bar{\theta} w \in W_i$$

对所有的 $\theta \in K^*$ 成立，从而

$$y_1(\theta) = (a\theta)^{-1} y(\theta) = u + \theta^{-1} c\bar{\theta} w \in W_i,$$

其中 $c = a^{-1}b \in K^*$. $y_1(\theta) - y_1(1) = c(\theta)w \in W_i$，其中 $\delta(\theta) = \theta^{-1}c\bar{\theta} - c$. 如果对所有的 $\theta \in K^*$，都有 $\delta(\theta) = 0$，即 $\bar{\theta} = c^{-1}\theta c$，$J: \theta \mapsto \bar{\theta}$ 是 K 的自同构. 但 J 是反自同构，这迫使 K 是域. 但这又导致 $\bar{\theta} = c^{-1}\theta c = \theta$, $\forall \theta \in K^*$，$J = 1$，与原假设相矛盾. 这说明一定能选 $\theta \in K^*$，使 $\delta(\theta) \neq 0$，于是 $\delta(\theta)w \in W_i \Longrightarrow w \in W_i$，由 $a\theta u + b\bar{\theta} w \in W_i$ 又导致 $u \in W_i$，于是 $\mathrm{Im}(g - I) = \langle u, w \rangle \subseteq W_i$，仍有矛盾. 这说明：对任意 $x \in W_i$，$f(x, w)$和 $b = f(x, u)$ 至少有一个为 0. 由 $g|_{W_1} \neq 1_{W_1}$ 知 W_1 与$\langle u, w \rangle$不正交. 由 $\eta_{\theta u, w} = \eta_{\bar{\theta} w, u}$ 知必要时可将 u、w 交换位置，使 w 与 W_1 不正交，存在 $x \in W_1$ 使 $f(x, w) = 1 \neq 0$，从而 $f(x, u) = 0$，$u = x(g - I) \in \mathrm{Im}(g - I) \cap W_1 = \langle u_1 \rangle$，$\langle u \rangle = \langle u_1 \rangle$. 如果有 $y \in W_1$ 使 $f(y, u) \neq 0 = f(y, w)$，则又可得

$$w = f(y, u)^{-1} y(g - I), \mathrm{Im}(g - I) = \langle u, w \rangle \subseteq W_1,$$

产生矛盾. 故 $W_1 \perp u$. 由 $V = W_1 \oplus W_2$ 非退化可知 $W_2 \not\subseteq u^{\perp}$，与前面同理又导致 $w \in \langle u_2 \rangle$，$W_2 \perp w$. 不妨设 $u = u_1$，$w = u_2 = \pi u$. 对前述满足 $f(x, w) = 1$ 的 $x \in W_1$，有 $xg = x + u$，于是 $(\pi x)g = \pi x + \pi u$. 但另一方面 $(\pi x)g = (\pi x)\eta_{u, \pi u} = \pi x + f(\pi x, u)\pi u$，故 $f(\pi x, u) = 1$. 选 $\theta \in K^*$ 使 $\bar{\theta} \neq \theta$，则

$$(\pi x)\eta_{\theta u, \pi u} = \pi x + \bar{\theta}(\pi u) \neq \pi x + \theta(\pi u) = \pi(x\eta_{\theta u, \pi u}),$$

这与 π 是 X-同构的假设相违背. 这说明 $J \neq 1$ 的情形根本不可能出现.

以下设 $J = 1$, 从而 K 是域. M 正规化 X, 由引理 2.3.7 知 M 定驻张量积结构 $V = W_1 \otimes_K A$, $A = \{a + b\pi | a, b \in K\} = \mathrm{Hom}_{FX}(W_1, V)$ 是 K 上二维空间, $(a + b\pi)x = ax + b\pi x$. 对任意 $0 \neq a + b\pi \in A$, 记

$$W_{a+b\pi} = (a + b\pi)W_1 = \{ax + b\pi x\} | x \in W_1\}.$$

则 $W_{a+b\pi}$ 是不可约 K-X-子模, $a + b\pi : W_1 \to W_{a+b\pi}$, $x \mapsto ax + b\pi x$ 是 KX-同构. 而 M 的每个元素将 W_1 送到某个 $W_{a+b\pi}$. 按照这样的记号, W_1 仍为 W_1(对应于 $1 \in A$), 而 $W_2 = W_\pi$. 设 g 是辛群或正交群中的二平延 $\eta_{u,w}$ 或正交群的短根元素 $t_{u,w}$, 根子群分别是 $T = \{\eta_{su,w} | s \in K\}$ 或 $T = \{t_{su,w} | s \in K\}$. $\langle u, w\rangle = \mathrm{Im}(g - I) = \langle u_1, \pi u_1\rangle$, $u = a_1u_1 + b_1\pi u_1$, $w = a_2u_1 + b_2\pi u_1$, $a_i + b_i\pi \in A (i = 1, 2)$ 在 K 上线性无关. 可用不可约 K-X-子模 $W_{a_i+b_i\pi}$ 代替 $W_i (i = 1, 2)$, 用映射 $W_{a_1+b_1\pi} \to W_{a_2+b_2\pi}$, $(a_1 + b_1\pi)x \mapsto (a_2 + b_2\pi)x$ 代替 π, 化为 $u = u_1$, $w = \pi u$ 的情形. 对任意 $x \in W_1$, 有

$$\begin{aligned} x(g - I) &= f(x, w)u - \varepsilon f(x, u)(w + \delta u) \\ &\in \mathrm{Im}(g - I) \cap W_1 = \langle u\rangle, \end{aligned}$$

其中 $\delta = 0$ (当 g 是二平延)或 $\delta = Q(w) \neq 0$ (当 g 是正交群的短根元素). 这迫使 $f(x, u) = 0$. 这说明 $u \in W_1 \cap W_1^\perp$, 不可约 KX-模 W_1 是退化空间, 且包含奇异向量 $u \neq 0$, 由引理 2.5.1 知 W_1 只能是全奇异子空间. M 的每个元素将 W_1 变为某个全奇异的 $W_{a+b\pi}$. 如果 g 是正交群的短根元素, 则每个 $W_{a+b\pi} \neq W_1$ (即 $b \neq 0$) 包含非奇异向量 $au + b\pi u = au + bw$ (由 $f(u, w) = 0$ 知 $Q(au + bw) = b^2Q(w) \neq 0$), 因而为非全奇异, 不可能是 W_1 的象, 故 M 只能将 W_1 变到自身, 这与 M 的不可约性相违. 设 g 是二平延. 由 $W_2(g - I) = \langle w\rangle$ 可得 $w \in W_2 \cap W_2^\perp$, W_2 也是全奇异子空间. 由 $u \perp W_1$ 及 $g|_{W_1} \neq 1_{W_1}$ 知 $w \notin W_1^\perp$, 存在 $x \in W_1$ 使

$f(x, w)=1$, $xg = x + u$, $(\pi x)g = \pi x + w$. 再由 $(\pi x)g = (\pi x)\eta_{u,w} = \pi x - \varepsilon f(\pi x, u)w$ 得 $f(\pi x, u) = -\varepsilon$. 如果 $\varepsilon = -1 \neq 1$, $\mathrm{char}K \neq 2$, 则对任意 a、$b \in K^*$ 有

$$f((a + b\pi)x, (a + b\pi)u) = ab(f(x, w) + f(\pi x, u))$$
$$= 2ab \neq 0,$$

$W_{a+b\pi}$ 含有两个互不正交的向量 $(a + b\pi)x$, $(a + b\pi)u$, 不可能全奇异. M 引起 $W_{a+b\pi}(0 \neq a + b\pi \in A)$ 中仅有的两个全奇异空间 W_1、W_2 的集合上的置换,这与 M 的本原性相违背. 唯一剩下的情形是: $\varepsilon = 1$, G 是正交群, g 是正交二平延, T 是 G 的长根子群,且 M 中所含的根子群都具有形式 $T_{x,\pi x}(0 \neq x \in W_1)$. 此时可在 W_1 上定义交错内积 $f_1(x, y) = f(x, \pi y)$, 并在 A 上定义交错内积 f_2 使 $f(1, \pi) = 1$, 使 $f = f_1 \otimes f_2$, 而 M 所含的长根子群形如 $T_x \otimes 1_A$, T_x 是 $\mathrm{Sp}(W_1, f_1)$ 的长根子群. 即引理的结论(ii)成立. ▌

推论 3.5.2　设 M 是典型群 G 中含根子群的极大子群,则下列结论之一成立:

(i) M 可约,是 C_1 类子群;

(ii) M 非本原,是 C_2 类子群;

(iii) M 中的根子群生成不可约子群 N, N 是定理 3.2.1、定理 3.3.1 或定理 3.4.1 所列子群之一,M 是 N 的正规化子;

(iv) M 是定理 3.5.1(ii)所述的子群.

典型群中含根子群的极大子群的具体类型,请参见文献[31]～[37]以及[56]～[59].

§3.6　可约子群的极大性

本节利用根子群的知识来研究 C_1 类子群,验证可约子群 G_W 在典型群 G 中的极大性. 这里 W 是 G 所作用的空间 V 的非平凡子空间 W,当 $G = U'(V, h, L)$ 时还假定 W 是全奇异子空间,或

非退化子空间,或是非奇异的迷向线.为了利用根子群的知识,我们只考虑 G_W 包含 G 的至少一个根子群的情形,这导致对 W 或 $W^{\perp}$ 的维数或 Witt 指数作一定的限制.对 G_W 的极大性的证明已由 O. H. King 在文献[20]~[22]中,李尚志、查建国在文献[31]、[34]~[36],[57]、[58]中给出.本节采用的大体上是李尚志、查建国的证明.

以下总假定 K 是体,$n \geq 2$,$G \leq \mathrm{GL}(n, K)$ 是作用于 $V = V(n, K)$ 上的典型群,U 是 V 的子空间,G_U 是 U 在 G 中的定驻子群.要证明 G_U 在 G 中的极大性,即证明 $G_U \lneq X \leq G \Longrightarrow X = G$.为此,先考察 G_U 包含了 G 的哪些根子群;再证明 G_U 所含的根子群在 X 的共轭作用下可以得出 G 的所有的根子群生成 $G \leq X$.

1. 线性群的可约子群

定理 3.6.1 设 $G = \mathrm{SL}(V)$,U 是 V 的非平凡子空间,则 G_U 是 G 的极大子群.

证明 对每个非零向量 $u \in V$,记 $T_u = \{\tau_{u,\varphi} | \varphi \in V^*, u\varphi = 0\}$,则 G_U 包含所有的 T_u,$u \in U$.对 $G_U \lneq X \leq G$,存在 $u \in U$,$g \in X$ 使 $v = ug \notin U$,但 $T_v = g^{-1}T_u g < X$.对任一 $w \in V \backslash U$,有 $g \in G$ 在定驻 U 的同时将 $\langle v \rangle \mapsto \langle w \rangle$.于是 $g \in G_U < X$,$T_w = g^{-1}T_v g < X$.这证明了 X 包含所有的 $T_x (0 \neq x \in V)$,即包含了 $G = \mathrm{SL}(n, K)$ 的所有的根子群,从而 $X = G$. ▌

2. 全奇异子空间的定驻子群

定理 3.6.2 设 $G = U'(V, h, L)$,$\nu = \nu_L(h) \geqslant 1$,$U$ 是 V 的全奇异子空间,则 G_U 是 G 的极大子群.但 $G = \Omega^+(2\nu, KQ)$ 且 $\dim U = \nu - 1$ 的情形例外.

证明 情况 1 $L \neq 0$,$G = \mathrm{TU}(V, h, L)$.

由 $X \gneq G_U = G_{U^{\perp}}$ 可知存在 $g_1 \in X$ 不定驻 $U^{\perp}$.记 $U^{\perp} = U \oplus W$,其中 W 非退化.当 $\nu_L(W) \geq 1$ 时,$U^{\perp}$ 可以由奇异直线张成,g_1 将某个奇异向量 $u_0 \in U$ 送到 $v_1 \notin U^{\perp}$.当 $\nu_L(W) = 0$ 时,$U^{\perp}$ 中的奇异向量全在 U 中,$g_1 \notin G_U$ 将某个奇异向量 $u_0 \in U$ 送到 $v_1 \notin U$,仍有 $v_1 \notin U^{\perp}$.在两种情形下都有 $T_{v_1} = g_1^{-1}T_{u_0}g_1 <$

X. 存在奇异向量 $u_1 \in U$ 使 $f(u_1, v_1) = 1$，并可记 $U = (U \cap v_1^{\perp}) \oplus Ku_1$. 对任意奇异向量 $v \notin U^{\perp}$，同样可取 $u \in U$ 使 $f(u, v) = 1$，记 $U = (U \cap v^{\perp}) \oplus Ku$. 由 Witt 扩张定理，存在 $g \in G$ 将 $U \cap v_1^{\perp}$、Ku_1、Kv_1 分别送到 $U \cap v^{\perp}$、Ku、Kv. $g \in G_U$，$T_v = g^{-1}T_{v_1}g < X$，如所欲证.

情况 2　$G = \Omega(n, K, Q)$，$\nu = \nu(Q) \geq 1$.

每条奇异线 $\langle u \rangle \subset V$ 对应于一个子群 $T_u = \{t_{u,w} | w \in u^{\perp}\}$. 显然 G_U 包含所有的 T_u，$u \in U$. X 还包含所有的根子群 $T_{u,w}$，$\langle u, w \rangle \subseteq U^{\perp}$. 只须证明 X 还包含其余的根子群 $T_{u,w}$，其中 $u \notin U$ 且 $\langle u, w \rangle \not\subseteq U^{\perp}$.

由 $X \not\leq G_U$ 知存在 $g_1 \in X$ 不定驻 U，从而也不定驻 $U^{\perp}$. g_1 将某个 $u_0 \in U$ 送到 $v_1 \notin U$，$T_{v_1} = g_1^{-1}T_{u_0}g_1 < X$. 若 $v_1 \in U^{\perp}$，记 $U^{\perp} = U \oplus W$，W 非退化. 并写 $v_1 = v_0 + w_1$ 使 $v_0 \in U$，$w_1 \in W$. 如果 W 是定号空间，则 $U^{\perp}$ 中的奇异向量 v_1 应含于 U，产生矛盾. 故 $\nu(W) \geq 1$，$\dim W \geq 2$. $\dim W = 2$ 且 $G = \Omega(n, K, Q)$ 时，$\nu = \dim U + 1 = n/2$，是例外情形. 在其余情形下都可用 $g_0 \in 1_{W^{\perp}} \times \Omega(W) < G_U$ 将 w_1 送到某个 w_{-1}，使 $f(w_1, w_{-1}) \neq 0$，从而 g_0 将 v_1 送到 $v_{-1} = v_0 + w_{-1}$，$f(v_1, v_{-1}) = f(w_1, w_{-1}) \neq 0$. $T_{v_{-1}} = g_0^{-1}T_{v_1}g_0 < X$. 取 $x \in W^{\perp} \setminus U^{\perp}$，则 $t_{v_{-1}, x} \in X$ 将 v_1 送到 $v_2 = v_1 - f(v_1, v_{-1})(x + Q(x)v_{-1}) \notin U^{\perp}$. 用 $g_1 t_{v_{-1}, x} \in X$ 代替 g_1，从而用 v_2 代替 v_1，可化为 $v_1 \notin U^{\perp}$ 的情形.

以下设 $v_1 \notin U^{\perp}$，$T_{v_1} < X$. 与情况 1 同理可证对任意奇异向量 $v \notin U^{\perp}$，有 $T_v < X$. 当 $\nu \geq 2$ 时，对 G 的任意长根子群 $T_{u,w} \not\leq G_U$ 有 $\langle u, w \rangle \not\subseteq U^{\perp}$，存在 $v \in \langle u, w \rangle \setminus U^{\perp}$，记 $\langle u, w \rangle = \langle v, x \rangle$，则 $T_{u,w} = T_{v,x} < T_v < X$. X 包含 G 的全体长根子群从而等于 G. 当 $\nu = 1$ 时，对任意奇异向量 $v \notin U$，有 $v \notin U^{\perp}$，从而 $T_v < X$. X 包含所有的 $T_u (0 \neq u \in V, Q(u) = 0)$，即包含 G 的所有的根子群（全是短根子群），$X = G$. ▌

3. 非退化子空间的定驻子群

定理 3.6.3 设 $n \geq 3$，$G = U'(V, h, L)(\nu = \nu_L(h) \neq 1)$ 作用于 $V = V(n, K)$，与 h 相伴的内积 f 非退化. 设 W 是 V 的非退化子空间且与 $W^{\perp}$ 度量不同构. 并假定：$\nu_L(W) \geq 1$ 与 $\nu_L(W^{\perp}) \geq 1$ 至少有一个成立，当 $L = 0$ 时，还要求 $\nu_L(U) \geq 1$ 且 $\dim U \geq 3$ 对 $U = W$ 或 $U = W^{\perp}$ 成立. 则 G_W 是 G 的极大子群，但下列情形例外：

(i) $G = \Omega(V, Q)$，$K = F_2$ 或 F_3，且 W 或 $W^{\perp}$ 是双曲平面；

(ii) $G = \Omega^-(6, 2) = \Omega(6, F_2, Q)(\nu(Q) = 2)$，$W$ 或 $W^{\perp}$ 是定号平面；

(iii) $G = \Omega(5, 3)$，W 或 $W^{\perp}$ 是定号平面.

证明 (3.6.3.1) *例外情形下存在非平凡扩群 X 使 $G_W < X < G$.*

例外情形(i) 设双曲平面 $U = W$ 或 $U = W^{\perp}$ 由双曲对 $\{u, v\}$ 张成，则 U 中满足条件 $Q(x) = 1$ 的向量 x 只有 $\pm (u + v)$，$G_W < G_{\langle u+v \rangle} < G$.

例外情形(ii) 设 $U = W$ 或 $W^{\perp}$ 是定号平面，即 $\nu(U) = 0$. 则 $U^{\perp}$ 是 4 维空间，且 Witt 指数为 2，可唯一地写成两个定号平面 U_1、U_2 的正交和. $V = U \perp U_1 \perp U_2$，$G_U < \mathrm{Stab}\{U, U_1, U_2\} < G$.

例外情形(iii) 设 $U = W$ 或 $W^{\perp}$ 是定号平面，存在正交基 $\{x_1, x_2\}$ 使 $Q(x_1) = Q(x_2) = 1$. 三维空间 $U^{\perp}$ 也存在正交基 $\{x_3, x_4, x_5\}$ 使 $Q(x_i) = 1$，$\forall i = 3, 4, 5$. 于是

$$G_U < \mathrm{Stab}\{\langle x_i \rangle \mid 1 \leq i \leq 5\} < G.$$

以下排除这些例外情形，证明 G_W 的极大性. 即对任意 $G_W \lneq X \leq G$ 证明 $X = G$.

(3.6.3.2) *X 中有根子群生成不可约子群.*

由于 $G_W = G_{W^{\perp}}$，可从 W 与 $W^{\perp}$ 二者之中任意选择一个来作为 W. 因此，总不妨设 $W^{\perp}$ 具有正的 Witt 指数，且当 $L = 0$ 时还设 $\dim W^{\perp} \geq 3$. 如果 W 与 $W^{\perp}$ 都具有正的 Witt 指数，还可选取 W 与

$W^\perp$二者中维数较小的一个作为W,化为$\dim W^\perp \geq \dim W$的情形. 特别当$L \neq 0$且K是有限域的情形,同维数的非退化空间都度量同构,维数≥ 2的空间都具有正的 Witt 指数,因此不可能有$\dim W = \dim W^\perp$,总可设$\dim W^\perp > \dim W$. 在这样的假设下,对任意$g \in G$都不可能有$W^\perp g \subseteq W$,否则,$W^\perp g = W$,$W^\perp$与W度量同构.

首先,我们证明X在V上不可约. 设$U \neq 0$是X的不变子空间,则U也被M定驻. 但被M定驻的非零真子空间只有W和$W^\perp$. 若$U \neq V$,则$U = W$或$W^\perp$,$X \leq G_W$,产生矛盾. 故$U = V$. 这说明X不可约.

当$L \neq 0$时,设M_0、X_0分别是G_W、X所含G的长根子群生成的子群. 当$L = 0$时,设M_0、X_0分别是G_W、X所含G的短根子群生成的子群. 则$M_0 \leq X_0 \trianglelefteq X$,且$M_0$在$W^\perp$上不可约. X_0的不变子空间也是M_0的不变子空间. 设U是$W^\perp$生成的X_0的不变子空间,我们证明$U = V$. 若不然,则由X不可约知有$g \in X$使$Ug \neq U$. 如果Ug不含于W,取$x \in Ug \backslash W$. 记$x = u + v$使$u \in W$,$v \in W^\perp$,则$v \neq 0$. 存在$g_0 \in M_0$固定u而变动v,于是$v_1 = xg_0 - x \in Ug$是$W^\perp$中的非零向量. $Ug \cap U$包含v_1,不等于零,这迫使$Ug = U$,产生矛盾. 但这又迫使$W \supseteq Ug \supseteq W^\perp g$,$W$含有奇异线. 按我们的假设应有$\dim W \leq \dim W^\perp$,从而$W = W^\perp g$,$W$与$W^\perp$度量同构,仍有矛盾. 这就证明了$U = V$. 从而$X_0$在$V$上不可约.

于是可以利用§3.3和§3.4中的结果来定出X.

(3.6.3.3) $G = \mathrm{TU}(n, K, h, L)(L \neq 0)$的情形.

按照§3.3的记号,对V的任一个由奇异线张成的子空间U,记T_U是所有的长根子群T_u(奇异向量$u \in U$)生成的子群,则$T_{W^\perp} < M_0 < X_0$. 如果L生成的子体等于$K \neq F_2$,或$L \neq F_2$且$\dim W^\perp \geq 3$,或$L = K_J = F_2$且$\dim W^\perp \geq 4$,则可由引理3.3.5得$X_0 = G$,从而$X = G$.

当$L = F_2$且$\dim W^\perp = 3$时,由W非退化知$K = F_4 \neq F_2$,此

时由引理 3.3.5(2)得 $X \geq \langle \mathrm{SU}(W^{\perp}), T_{w_1}, \cdots, T_{w_d} \rangle = T_V = G$，仍有 $X = G$.

还需处理 $\dim W^{\perp} = 2$ 的情形，即 $W^{\perp}$ 是双曲平面. 此时当然 $K \neq F_2$. 因此只须考虑 L 生成的体不等于 K 的情形，从而 $L \subseteq Z(K)$，且当 K 是域时 L 是 K 的指数为 2 的子域. 此时 W 不能含有奇异向量，否则，由 $\dim W \leq \dim W^{\perp} = 2$ 及 W 非退化知 W 也应是双曲平面，与 $W^{\perp}$ 度量同构，产生矛盾. 不可约子群 X_0 可将 $W^{\perp}$ 中某个奇异向量 u 变到 $w \notin W^{\perp}$，从而将 $T_u < G_W$ 共轭到 $T_w < X_0$. 记 $w = u_1 + v_1$ 使 $u_1 \in W$, $v_1 \in W^{\perp}$. 则 u_1 非奇异，$U = \langle W^{\perp}, w \rangle = W^{\perp} \langle u_1 \rangle$ 是 3 维 L-正则子空间，由引理 3.3.4 可得到 $T_U = \langle T_{W^{\perp}}, T_w \rangle \leq X_0$. 当 $n = 3$ 时 $U = V$，已有 $X = G$. 当 $n \geq 4$ 时 K 不是有限域(否则，W 含奇异向量)，$L \neq F_2$，用引理 3.3.6即得 $X_0 = G$，从而 $X = G$.

(3.6.3.4) $G = \Omega(n, K, Q)$ (即 $L = 0$)的情形.

X_0 是 G 的短根子群生成的不可约子群，且 $X_0 \geq \Omega(W^{\perp})$. 在大多数情况下，由命题 3.4.5 立即得 $X_0 = G$. 在剩下的情况中，除了例外情形外，只有 $G = \Omega^{+}(6, 2)$、且 W 是双曲平面这一种情况需要处理. 此时 $W^{\perp} \cong V^{-}(4, 2)$. X_0 将 $W^{\perp}$ 中某个奇异向量 $u \mapsto w \notin W^{\perp} \cup W$，且将 $V_X(u) = \{x \in u^{\perp} \mid t_{u,x} \in X\}$ 送到 $V_X(w)$. 显然，$V_X(u)$ 包含 $W^{\perp} \cap u^{\perp}$，维数至少是 3. $V_X(w)$ 也如此. $w = w_1 + w_2$ 在 W、$W^{\perp}$ 中的分量 w_1、w_2 都不为 0. $V_X(w)$ 中至少含有一个非奇异向量 $z \notin \langle w_1, w_2 \rangle$，$z = x_1 + x_2$ 在 W、$W^{\perp}$ 中的分量至少有一个不含于 $\langle w_1, w_2 \rangle$，且当 $x_1 \notin \langle w_1 \rangle$ 时，由 $(w, z) = 0$ 仍有 $x_2 \notin \langle w_2 \rangle$. 总之，有 $x_2 \notin \langle w_2 \rangle$. $\Omega(W^{\perp})$ 可在定驻 w_2(从而定驻 w)的同时使 z 的象张成至少 4 维的子空间 $U \subseteq V_X(w)$. 可见 $V_X(u)$ 也至少 4 维. 由命题 3.4.4 证明过程中的(3.4.5.1)知 $X = G$. ▍

4. 非奇异的迷向线的定驻子群

定理 3.6.4 设 K 是特征 2 的体，$n \geq 3$，$G = U'(n, K, h, L)$ $(\nu = \nu_L(h) \neq 1)$ 是作用于 $V = V(n, K)$ 上的典型群，与 h 相伴的内积非退化. 设 $\langle x \rangle$ 是非奇异的迷向线，且 $x^{\perp}$ 含有奇异线，则

$\langle x\rangle$的定驻子群$G_{\langle x\rangle}$是G的极大子群.

证明 设$G_{\langle x\rangle} \lneq X \leq G$，取$g_1 \in X$不定驻$\langle x\rangle$从而不定驻$x^{\perp}$.

当$L \neq 0$时，$G_{\langle x\rangle}$包含所有的长根子群T_u，其中$u \in x^{\perp}$. 而$x^{\perp}$可由所含的奇异线张成. g_1不定驻$x^{\perp}$，必然将$x^{\perp}$中的某个奇异向量u移到$w = ug_1 \notin x^{\perp}$，同时将$T_u < G_{\langle x\rangle} < X$共轭到$T_w < X$. 由$w$奇异知$w \notin \langle x\rangle = (x^{\perp})^{\perp}$. $x^{\perp}$和$\langle w\rangle$组成连通链张成非退化空间V. 由引理 3.3.3 或 3.3.5 得$X \geq \langle T_{x^{\perp}}, T_w\rangle = T_V = G$, $X = G$.

设$L = 0$, $G = \Omega(V, Q)$且n是偶数，从而≥ 4. $g_1 \in X\backslash G_{\langle x\rangle}$仍将某个奇异向量$u \in x^{\perp}$移到$w = ug_1 \notin x^{\perp}$. 记$V = \langle x, w\rangle \perp W$. 注意，$\langle u, x\rangle^{\perp} \subseteq V_X(u)$，因而$V_X(w)$包含$n-2$维子空间$\langle u, x\rangle^{\perp} g_1$，它含于$n-1$维空间$w^{\perp} = \langle w\rangle \oplus W$，因而与$W$的交的维数为$n-3 \geq 1$. 取$0 \neq y \in V_X(w) \cap W$. 则$y$在定驻子群$G_{x,w}$作用下的象张成$W \subset V_X(w)$. 于是$V_X(w) = \langle w\rangle \oplus W = w^{\perp}$, $V_X(u) = V_X(w)g_1^{-1} = u^{\perp}$. G_x可将$u \mapsto v \notin u^{\perp}$，从而$V_X(v) = v^{\perp}$. 由引理 3.4.4 知这导致$X = G$. ∎

§3.7 非本原子群的极大性

本节证明§2.2中所定义的C_2类子群(非本原子群)$M = \mathrm{Stab}\{W_1, \cdots, W_m\}$在$V = V(n, K)$上典型群$G$中的极大性，这里$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$，且所有的$\dim W_i = n/m (\forall 1 \leq i \leq m)$相等，且当$G = U'(n, K, h, L)$时，假定$W_i$两两度量同构，且：(i) $W_i \perp W_j$, $\forall i \neq j$；或(ii) $m = 2$, W_i全奇异. M的极大性的证明仍然主要依赖于根子群的知识，因此，一般仍要求M包含G的根子群. 对于含根子群的非本原子群的极大性，在文献[23]～[26]中以及[31]、[34]～[37]、[57]、[58]中作了验证. 对G是线性群的情形，在文献[41]中也解决了M不含根子群的情形，即M是G的单项子群的情形. 所用的方法主要是矩阵技巧. 文献[41]中的整个

证明较长,本节就不作详细介绍了,只介绍证明的主要思路.

下面的引理告诉我们,在多数情况下,非本原子群 M 的真扩群 X 中所含的根子群生成不可约子群 $X_0 \trianglelefteq X$. 我们利用前几节的结果证明 $X_0 = G$, 从而 $X = G$.

引理 3.7.1 设 G 是作用于 $V = V(n, K)$ 上的典型群, $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$, G 的非本原子群 $M = \mathrm{Stab}\{W_1, \cdots, W_m\}$ 包含 G 的某个根子群 T, $M \lneqq X \leq G$, X_0 是 T 在 X 中的全部共轭生成的子群, M_0 是 T 在 M 中的全部共轭所生成的子群. 如果 M_0 在每个 W_i 上不可约,则 X_0 在 V 上不可约.

证明 我们有 $M_0 \leq X_0 \trianglelefteq X$. 注意, $W_i (1 \leq i \leq m)$ 就是 M_0 作用下的全部极小不变子空间(即不可约 FM_0-子模). 设 W 是 X_0 作用下的任一不可约子空间,则 W 也是 M_0 的不变子空间,因而具有形式 $W = W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$. 由于 $X_0 \trianglelefteq X$. 所有的 $Wg (g \in X)$ 也都是 X_0 的不变子空间,每个 Wg 具有形式 $Wg = W_{j_1} \oplus \cdots \oplus W_{j_k}$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m$. 设 $\Sigma = \{Wg_i \mid 1 \leq i \leq d\}$ 是不同的 $Wg (g \in X)$ 组成的集合,则 X 引起 Σ 上的一个置换;当然 M 也就引起 Σ 的置换. 如果 $k = 1$, 则 $X = M$, 与 $M < X$ 相矛盾. 设 $k \geq 2$, 由于 M 可在定驻 W_{i_1} 的同时将 W_{i_2} 变到任意 $W_j (j \geq 2)$, 而 M 中定驻 W_{i_1} 的元素必然定驻 W,这说明 W 包含所有的 $W_i (1 \leq i \leq m)$, $W = V$. 这就证明了 X_0 在 V 上可约. ▌

1. 线性群的非本原子群

定理 3.7.2 a 设 K 是任意体, $\mathrm{SL}(n, K) \leq G \leq \mathrm{GL}(n, K)$ 作用于 $V = V(n, K)$ 上. 设 $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$, 且 $\dim W_i = r = n/m \geq 2$ 对所有的 $1 \leq i \leq m$ 成立, M 是集合 $\Sigma = \{W_1, \cdots, W_m\}$ 在 G 中的定驻子群. 则 M 是 G 的极大子群,但以下情形例外:

(i) $K = F_2$ 且 $r = 2$;

(ii) $G = \mathrm{SL}(4, 3)$ 且 $r = 2$.

证明 设 $M \lneqq X \leq G$, 排除例外情形,证明 $X = G$.

分别将 M、X 所含的 $\mathrm{SL}(V)$的根子群生成的群记作 M_0、X_0.

则 M_0 在每个 W_i 上不可约. 由引理 3.7.1 知 X_0 在 V 上不可约. 按照定理 3.2.1, $X_0 = \mathrm{SL}(V)$, 或 $X_0 \leq \mathrm{Sp}(V, f)$ (对某个 f). 当 $X_0 = G = \mathrm{SL}(V)$ 时, $X = G$. 如所欲证. 往下只须再排除 $X_0 \leq \mathrm{Sp}(V, f)$ 的可能.

设 $X_0 \leq \mathrm{Sp}(V, f)$, 对于每个 $1 \leq i \leq m$, 将 $\mathrm{SL}(W_i) \times \Pi_{j \neq i} 1_{W_j}$ 简记为 $\mathrm{SL}(W_i)$. 则 $\mathrm{SL}(W_i)$ 可以由 M 中的平延生成, 应含于 $\mathrm{Sp}(W_i)$. 这迫使 $r = \dim W_1 = 2$. $\mathrm{SL}(W_i)$ 中的平延都是 $\mathrm{Sp}(V, f)$ 中的平延, 它们定驻所有 $W_j (j \neq i)$ 中的所有向量, 这说明在辛内积 f 下 $W_i \perp W_j$ 对任意 $i \neq j$ 成立. 排除例外情形(i)之后有 $K \neq F_2$, 由定理 3.2.1 知 $X_0 = \mathrm{Sp}(V, f)$, $M < X \leq \mathrm{GSp}(V, f)$, 这仅当 $m = 2$ 且 $K = F_3$ 时才有可能. 但这正是例外情形(ii).

可见, 排除了例外情形之后, 不可能有 $X_0 \leq \mathrm{Sp}(V, f)$, 只能 $X = X_0 = \mathrm{SL}(V)$.

在例外情形下, 可举出 M 的非平凡扩群 X 的例子, 说明 M 不是 G 的极大子群:

(i) 在 V 上定义非退化辛内积 f, 使 $W_i \perp W_j (\forall i \neq j)$, 则 $M < X = \mathrm{Sp}(V, f) < G$.

(ii) 对 $i = 1, 2$, 取 W_i 的基 $\{u_i, v_i\}$, 在 $V = W_1 \oplus W_2 = \langle u_1, v_1, u_2, v_2 \rangle$ 上定义非退化交错内积 f, 使 $W_1 \perp W_2$, $f(u_i, v_i) = 1 (i = 1, 2)$. 则 $M < X = \mathrm{GSp}(V, f) \cap G < G$. ▎

定理 3.7.2 b　设 $n \geq 2$, K 是任意体, $V = V(n, K)$, $G = \mathrm{SL}(V)$ 或 $\mathrm{GL}(V)$. 设 $\mathscr{E} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一组左 K-基, 因而 $V = \langle e_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle e_n \rangle$. 则一维子空间集合 $\Sigma = \{\langle e_1 \rangle, \cdots, \langle e_n \rangle\}$ 在 G 中的定驻子群 M 是 G 的极大子群, 但以下情形例外:

(i) $|K| \leq 4$;

(ii) $G = \mathrm{SL}(2, K)$, K 是特征 2 的非完全域;

(iii) $n = 2$, $\mathrm{char} K \neq 2$, 当 $G = \mathrm{GL}(2, K)$ 时, $|K| \leq 5$, 或当 $G = \mathrm{SL}(2, K)$ 时 $|K| \leq 11$;

(iv) $G = \mathrm{SL}(4, 5)$.

证明要点　在基 $\mathscr{E}$ 下将 V 写成行向量空间 $\mathrm{Mat}_{1 \times n} K$, 将

GL(V)写成矩阵群 GL(n, K)，则 M 由 G 中所有的单项矩阵组成，称为 G 的*单项子群*. 这里，单项矩阵是指这样的可逆方阵，它的每一行只有一个非零元，因而它的每一列也只有一个非零元.

每个单项矩阵 $P \in M$ 对任一矩阵 $g \in \mathrm{Mat}_n K$ 的右乘作用 $g \mapsto gP$ 是将 g 的各列作某个置换 $\sigma \in S_n$，并分别右乘适当常数，而左乘作用 $g \mapsto Pg$ 则是将各行作置换 σ^{-1}，并分别左乘适当的常数. 当 P 取遍 M 时，对应的置换 σ 取遍对称群 S_n. 特别当 $g \in X$ 时，可将 g 的行(或列)作任意置换并乘以适当常数，得到一个 $P_1 g P_2 \in X (P_1、P_2 \in M)$.

对任意 $M \lneq X \leq G$，在排除例外情况之后要证明 $X = G$.

只要能在 X 中找到 SL(n, K)的一个平延 $T_{kl}(s_0)$，用 M 中的单项矩阵对这个平延作共轭，可知 X 包含所有形如 $T_{ij}(s)(i \neq j, s \in K^*)$ 的平延. 这导致 $X \geq \mathrm{SL}(n, K)$，从而 $X = G$.

为了在 X 中找到一个平延 $T_{kl}(s_0)$，我们对 n 作数学归纳法，归纳假设为：对 $2 \leq m < n$，GL(m, K)的单项子群 M_m 与任一非单项矩阵 $g \in \mathrm{GL}(m, K)$ 生成的群等于 GL(m, K).

为了使数学归纳获得成功，一是要解决 $n = 2$ 的情形，二是要在 $X \leq G \leq \mathrm{GL}(n, K)$ 中找出非单项矩阵 $g_0 = (a_{ij})_{n\times n}$，使它定驻 $\langle e_1 \rangle$，即 g_0 的第一行形如(a_{11}, 0, …, 0). 我们从任意的 $g_1 = (a_{ij})_{n\times n} \in X \backslash M$ 出发. 对每个 $1 \leq i \leq n$，记 g_1 的第 i 行为 u_i. 考虑第一行 u_1 所张成的 1 维子空间 $\langle u_1 \rangle$ 在 M 中的定驻子群 $M_{\langle u_1 \rangle}$. 每个 $P_0 \in M_{\langle u_1 \rangle}$ 决定一个元素 $g_2(P_0) = g_1 P_0 g_1^{-1} \in X$. 由于 $g_1 P_0$ 的第一行 $u_1 P_0 = \lambda u_1$ (对某个 $\lambda \in K^*$)与 λg_1 第一行相同，$(g_1 P_0) g_1^{-1}$的第一行与 $\lambda g_1 g_1^{-1} = \lambda I$ 的第一行相同，等于(λ, 0, …, 0). 这说明 $g_2(P_0) \in X_{\langle e_1 \rangle}$. 只要能选出 P_0 使 $g_2(P_0) \notin M$，就达到目的. 若不然，假定对所有的 $P_0 \in M_{\langle u_1 \rangle}$ 都有 $g_2(P_0) \in M$，往下设法推出矛盾. 在等式 $g_1 P_0 = g_2(P_0) g_1$ 中，左端矩阵的第 i 行是 g_1 的第 i 行在 P_0 作用下的象 $u_i P_0$，而在 $g_2(P_0) \in M$ 的假定下，$g_2(P_0) g_1$ 的各行由 g_1 的各行作置换并左乘一定的常数而得到. 也

就是说：$P_0 \in M_{\langle u_1\rangle}$ 引起一维子空间集合 $\Sigma_{n-1} = \{\langle u_2\rangle, \cdots, \langle u_n\rangle\}$ 的置换 $\sigma(P_0)$. 映射 $P_0 \mapsto \sigma(P_0)$ 定义了 $M_{\langle u_1\rangle}$到对称群 S_{n-1} 中的一个同态.

为了便于判断哪些矩阵含于定驻子群 $M_{\langle u_1\rangle}$，我们可用适当的 $P_1g_1P_2 \in X\backslash M$ 代替 g_1. 其中 P_1、$P_2 \in M$，如果 g_1 的某一行只含一个非零元，可用适当的 $P_1g_1P_2$ 代替 g_1，使 $u_1 = (1, 0, \cdots, 0)$，即 $g_1 \in X_{\langle e_1\rangle}$，这恰好是我们的归纳法所需要的. 以下设 g_1 的每行至少含两个非零元.

如果 g_1 的某一行不含零元，可化为 $u_1 = (1, \cdots, 1)$ 的情形. M_{u_1}包含所有这样的置换阵 P，每个 P 的右乘作用引起 g_1 的各列的一个偶置换 $\sigma(P)$. 映射 $P \mapsto \sigma(P)$ 定义了同态 $\varphi: A_n \to S_{n-1}$，它的核 $\mathrm{Ker}\varphi$ 只能是 A_n 或 Klein 四元群(当 $n = 4$). $\mathrm{Ker}\varphi$ 中所有的元素将 g_1 的每一行 u_i 变到自己的倍向量 $\lambda_i u_i$. 当 $n \geq 3$ 时，这是对 g_1 相当苛刻的要求，只有在 $n = 3$ 或 4 时的某种特殊的 g_1 才能满足这个要求. 可以设法用 $\langle g_1, M\rangle \leq X$ 中适当的元素代替 g_1，来破坏这个要求，得到所需的矛盾. $n = 2$ 的情形也可以用类似的思路处理，但需要更细致的技巧.

设 g_1 的每行都含有零元，可化为 $u_1 = (1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ 的形式，其中前 k 个分量为 1，后 $n-k$ 个分量为 0. 此时 $M_{\langle u_1\rangle}$由这样的单项矩阵 P 的全体组成，P 将每个 n 维行向量的前 k 个分量作任意置换并右乘同一个常数，而将后 $n-k$ 个分量作任意置换并分别独立地右乘常数，并满足约束条件 $\det M \in \det G$ 使 $P \in M$. 当 K 是非交换体时，K^* 的换位子群 C 是无限群，用 $D(c) = \mathrm{diag}(I_{(n-1)}, c) \in M_{u_1} (c \in C)$ 作用于$\langle u_2\rangle$，就能得到无穷多个不同的一维子空间$\langle u_2D(c)\rangle$，它们不可能都含于 $n-1$ 元集合 $\Sigma_{n-1} = \{\langle u_i\rangle \mid 2 \leq i \leq i\}$，产生矛盾. 当 K 是无限域时，用 $\Lambda(\lambda) = \mathrm{diag}(\lambda I_{(n-1)}, \lambda^{1-n}) \in M_{\langle u_1\rangle}$ 作用于$\langle u_2\rangle$也能得到无穷多个不同的一维子空间$\langle u_2\Lambda(\lambda)\rangle$，仍有矛盾. 这就只剩下 K 是有限域的情形. 设 $K = F_q$，如果 $n-k \geq 2$，则 $n \geq 4$，可逆矩阵 g_1 至少有一行

$u_i(i \geq 2)$ 的前 $n-2$ 个分量不全为 0. 取 $\Lambda_1(\lambda)=\mathrm{diag}(I_{(n-2)}, \lambda^{-1}, \lambda) \in M_{u_1}$ 作用于每个 $\langle u_i \rangle (i \geq 2)$ 可以得到 $q-1$ 个不同的 1 维子空间,它们都含于 3 维子空间 $\langle u_i, e_{n-1}, e_n \rangle$ 中,因而至多只有三个能含于 Σ_{n-1}. 但排除了例外情形(i)之后有 $q \geq 5$, $q-1>3$, 产生矛盾. 可见 u_1 只能含一个零元. g_1 的每一行都可以换到第一行,也都恰好含一个零元. 至少有某一行 u_i 的最后一个分量不为 0,因而前面的某个分量为 0. M_{u_1} 可将 g_1 的前 $n-1$ 列作偶置换,作用于 $\langle u_i \rangle$ 得到 $n-1$ 个不同的一维子空间,应穷举 Σ_{n-1}. 这对于 g_1 的构造施加了一个非常苛刻的限制. 我们可以设法用 $\langle g_1, M \rangle \leq X$ 中适当的元素代替 g_1 来破坏这个要求,从而引出矛盾.

证明的细节请参见文献[41].

在例外情形下 M 的非平凡扩群 X 的例子:

(i) 当 $K=F_2$ 时, M 定驻 $e=e_1+\cdots+e_n$, 从而 $M<G_e<G$.

当 $K=F_3$ 时,在 V 上定义对称双线性内积 f,使 $f(e_i, e_j)=0(\forall i \neq j)$ 及 $f(e_i, e_i)=1(\forall i)$, 则 $M<X=O(n, F_3, f) \cap G<G$.

当 $K=F_4$ 时,在 V 上定义 Hermite 内积 f,使 $f(e_i, e_j)=0(\forall i \neq j)$ 及 $f(e_i, e_i)=1(\forall i)$, 则 $M<X=U(n, F_3, f) \cap G<G$.

(ii) 任取 $0 \neq \varepsilon_i \in W_i(i=1, 2)$, 在 $V=\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle$ 上定义二次型 Q,使 $Q(a\varepsilon_1+b\varepsilon_2)=ab(\forall a, b \in K)$. 任取 K 的 K^2-子空间 L 使 $0 \neq L \neq K$, 则

$$M=\mathrm{GO}(2, K, Q) \cap G<\mathrm{GO}(2, K, Q, L) \cap G<G.$$

(iii) $\mathrm{GL}(2, 5)$ 及 $\mathrm{SL}(2, q)(q \leq 11)$ 的所有的子群都已在文献[5]中定出,从中可以找到 M 的扩群 X.

(iv) $G=\mathrm{SL}(4, 5)$. M 含于一个 C_6 类子群 X 中(详见文献[41]). ▌

2. 正交分解的定驻子群

定理 3.7.3　设 K 是任意体，$G = TU(n, K, h, L)$ 或 $\Omega(n, K, Q)$，作用于 $V = V(n, K)$ 上，且 h 或 Q 所伴随的内积 f 非退化. 设有直和分解 $V = W_1 \perp \cdots \perp W_m$，其中 $W_i(1 \leq i \leq n)$ 相互度量同构，从而具有相同的维数 $r = n/m$. 设 M 是集合 $\Sigma = \{W_1, \cdots, W_m\}$ 在 G 中的定驻子群，并且包含 G 的根子群，则 M 是 G 的极大子群，但下列情形例外：

(i) $G = Sp(n, 2)$ 或 $SU(n, 2^2)$，$r = 2$；

(ii) $G = SU(6, 2^2)$ 且 $r = 1$；

(iii) $G = \Omega(4, K, Q, L)$，K 是特征 2 的非完全域，L 生成 K 的真子域，且 $r = 2$；

(iv) $G = \Omega(n, F_2, Q)$，$W_i \cong V^+(2, 2)$ 或 $\cong V^+(4, 2)$；

(v) $G = \Omega(n, F_3, Q)$，$r = 2$ 或 3，或 $n = 8$ 且 $r = 1$.

证明　首先要指出：为了使 M 包含 G 的根子群，除 $G = SU(n, 2^2)$，$\Omega(n, F_2, Q)$ 或 $\Omega(n, F_3, Q)$ 的情形外，应有 $\nu_L(W_i) \geq 1$，当 $G = \Omega(V, Q)$ 且 $K \neq F_2$、F_3 时，还要求 $\dim W_i \geq 3$.

(3.7.3.1) 例外情形下非平凡扩群 X 的例子：

(i) 当 $G = Sp(2m, F_2, f)$ 且 $r = 2$ 时，在 V 上可定义与 f 相伴的二次型 Q，使 $Q(x) = 1$ 对所有 W_i 中的所有非零向量 x 成立，则正交群 $X = O(2m, F_2, Q)$ 是非平凡扩群.

当 $G = SU(2m, 2^2)$ 时，可以在每个 W_i 中取一组正交基 $\{w_{2i-1}, w_{2i}\}$，则 1 维子空间集合 $\{\langle w_j\rangle \mid 1 \leq j \leq 2m\}$ 在 G 中的定驻子群 X 是 M 的非平凡扩群.

(ii) 设 $W_i = \langle w_i\rangle(1 \leq i \leq 6)$，则形如 $\langle a_i w_i + a_j w_j\rangle(1 \leq i < j \leq 6, a_i, a_j \in K^*)$ 和 $\left\langle \sum_{i=1}^{6} a_i w_i \right\rangle\left(\prod_{i=1}^{6} a_i = 1\right)$ 的全体迷向线组成的集合的定驻子群 X 是 M 的非平凡扩群. X 就是定理3.3.1中的 IR3 类子群 $3P\Omega^{-,*}(6,3)$.

(iii) 设 L 生成 K 的真子域 E，在 $W_i(i = 1, 2)$ 中取奇异向量 u_i、v_i 使 $(u_i, v_i) = 1$. V 的 K-基$\{u_1, v_1, u_2, v_2\}$在 E 上生成 4 维

E-空间 V_E,设 Q_E 是 Q 在 V_E 上的限制,则 $X = \Omega(V_E, Q_E, L)$ 是 M 的非平凡扩群.

(iv) 当 $W_i \cong V^+(2, 2)$ 时,每个 W_i 中有唯一的一个非奇异向量 x_i, $X = G_{x_1+\cdots+x_m}$ 是非平凡扩群. 当 $W_i \cong V^+(4, 2)$ 时,每个 $W_i = V_{2i-1} \perp V_{2i}$, 所有的 $V_j \cong V^-(2, 2)$, $M < X = \mathrm{Stab}\{V_1, \cdots, V_{2m}\} < G$.

(v) 当 $r = 2$ 时,如果 $\nu(W_i) = 1$, 在每个 W_i 中取双曲对 $\{u_i, v_i\}$,则 $\langle u_i + v_i\rangle$ 包含了 W_i 中满足条件 $Q(x) = 1$ 的所有的向量,因而 $\langle u_i + v_i\rangle$ 被 $O(W_i)$定驻. $n/2$ 维子空间 $W = \langle u_i + v_i | 1 \le i \le m\rangle$ 的定驻子群 $X = G_W$ 是 M 的非平凡扩群. 如果 $r = 2$ 且 $\nu(W_i) = 0$, 可记每个 $W_i = \langle w_{2i-1}\rangle \perp \langle w_{2i}\rangle$ 使所有的 $Q(w_j) = 1 (1 \le j \le 2m)$. 于是

$$M < X = \mathrm{Stab}\{\langle w_j\rangle | 1 \le j \le n\} < G.$$

当 $n = 8$ 且 $r = 1$ 时,定理 3.4.1 中 IR8 类子群 X 是 M 的非平凡扩群.

以下排除所有的例外情形,证明 M 在 G 中的极大性,即对任意的 $M \lneq X \le G$, 证明 $X = G$.

(3.7.3.2) $L \ne 0$ 且 $\nu_L(W_i) \ge 1$ 的情形:

设 M_0、X_0 分别是 M、X 中所含的 G 的长根子群生成的子群,则 $M_0 = T_{W_1} \times \cdots \times T_{W_m}$ 在每个 W_i 上不可约,由引理 3.7.1 知,X_0 在 V 上不可约,属于定理 3.3.1 中所说的类型. 我们希望利用命题 3.3.2 来说明 $X_0 = G$ 从而 $X = G$.

首先,由命题 3.3.2 知,当 $G = \mathrm{Sp}(n, K, f)$ 且 $K \ne F_2$, 或 L 不含于 K 的中心,或 K 是域且 L 真包含 K 的一个指数为 2 的子域时, $X_0 = G$.

注意, $X_0 > T_{W_i}$, 而 W_i 是非退化子空间. 于是由命题 3.3.2 知:当 $r = \dim W_i \ge 4$ 时, $X_0 = G$. 设 $r = 3$, 则由 W_i 非退化知 f 不是辛内积,除 $L = F_2$ 的情形外,总有 $X_0 = G$; 而当 $L = F_2$ (且 $K = F_4$)时,由 $X_0 > \mathrm{SU}(W_i)$ 仍可知 $X_0 = G$.

只剩下 $r=2$ 的情形，即 W_i 是双曲平面，且 K 是以 L 为中心的广义四元数体；或 K 是域，L 生成 K 的真子域. 并且应排除 $L=F_2$ 的例外情形. 只要能证明 $X_0 \geq T_U$ 对 4 维非退化子空间 $U=W_1 \oplus W_2$ 成立，就将导致 $X_0=G$.

由 X_0 不可约知它含有长根子群 T_w 不定驻 W_1，$w=x_1+x_{i_2}+\cdots+x_{i_k}$，其中 $k\geq 2$，$0\neq x_j\in W_j$ 对 $j=1, i_2, \cdots, i_k$ 成立. 存在 $g\in M$ 将 $W_1, W_{i_2}, \cdots, W_{i_k}$ 分别送到 $W_1, W_2, \cdots, W_k$. 不妨用 $T_{wg}=g^{-1}T_w g<X_0$ 代替 T_w，从而用 wg 代替 w，化为 $w=x_1+\cdots+x_k$ 的情形，其中 $0\neq x_i\in W_i$. 对 $i=1, 2$，在双曲平面 W_i 中可选奇异向量 v_i，使 $(x_i, v_i)=1$. 在 $L\neq F_2$ 中可选 $0\neq s\in L$，使 $s\neq 1$. $\rho_{v_1, -s}\rho_{v_2, s-1}\in M$ 将 $w\mapsto\tilde{w}=w-sv_1+(s-1)v_2\in L(X)$. 我们有 $(w, \tilde{w})=-1\in L$，从而 $\rho_{\tilde{w}, 1}\in X$ 将 $w\mapsto w-\tilde{w}=sv_1+(1-s)v_2\in L(X)$. 不妨在一开始就取 $sv_1+(1-s)v_2\in L(X)$ 代替 $w\in L(X)$，化为 $k=2$ 且 x_1、x_2 为奇异的情形. 且可取奇异向量 $y_i\in W_i$ 使 $(x_i, y_i)=1$ 对 $i=1, 2$ 成立.

要证明 $X_0\geq T_U$ 对 $U=W_1\oplus W_2$ 成立，只须再证明 $T_u<X$ 对 U 中不含于 W_1 或 W_2 的奇异向量 u 成立. 这样的 u 具有形式 $u=w_1+w_2$，$0\neq w_i\in W_i$. 如果 w_i 奇异，除例外情形外，M 可将 x_1、x_2 分别送到 w_1、w_2，从而将 $T_w<X$ 共轭到 $T_u<X$. 设 w_i 非奇异，在奇异线 $\langle u\rangle=\langle w_1+w_2\rangle$ 中可适当选择 u，使之具有形式

$$u=ax_1+(s-\delta)\bar{a}^{-1}y_1+x_2+\delta y_2,$$

其中 $a\in K^*$，$s\in L$，$\delta\notin L$. 由于 $ax_1+(s-\delta\bar{\delta})\bar{a}^{-1}y_1\in W_1$ 与 $x_2\in W_2$ 都是奇异向量，由已有的结论已经知道对它们的和 $v=(ax_1+(s-\delta\bar{\delta})y_1)+x_2$ 有 $T_v<X$. 同样可知对 $y=(\bar{\delta}-1)\cdot\bar{a}^{-1}y_1+y_2$ 有 $T_y<X$. 而 $(v, y)=\delta$. 于是对 $v\rho_{y, 1}=v+\delta y=u$ 有 $T_u<X$. 这就证明了 $T_U<X_0$. 这导致 $X=G$.

(3.7.3.3) $G=\Omega(V, Q)$ 且 $\nu(W_i)\geq 1$ 的情形：

M 含有 G 的短根子群，设其中的短根子群生成的子群为 M_0，则 M_0 在每个 W_i 上不可约. 于是 X 所含的短根子群生成的子群

X_0 在 V 上不可约. 由命题 3.4.5(2)知,当 $K \neq F_2$、F_3 时 $X_0 = G$. 从而 $X = G$. 当 $K = F_3$ 时,排除了例外情况之后有 $r = \dim W_i \geq 4$, 而 $X \geq \Omega(W_1)$, 仍有 $X = G$. 当 $K = F_2$ 时,如果 $r \geq 6$, 仍有 $X = G$. 排除例外情况后,唯一剩下的情况是: $K = F_2$, $r = 4$ 且 $W_i \cong V^-(4, 2)$. 对它的处理参见文献[35].

(3.7.3.4) $\nu_L(W_i) = 0$ 的情形:

$\nu_L(W_i) = 0$ 时,只有在以下几种情形下 M 包含 G 的根子群:

(1) $G = \mathrm{SU}(n, 2^2)$, $\dim W_i = 1$, 但排除例外情形 $n = 6$;

(2) $G = \Omega(n, F_2, Q)$, $\dim W_i = 2$;

(3) $G = \Omega(n, F_3, Q)$, $\dim W_i = 1$, 但排除例外情形 $n = 8$.

对这些情况的处理,参见文献[35]和[57]. ▌

3. 极大全奇异子空间对的定驻子群

定理 3.7.4 设 $G = \mathrm{TU}(n, K, h, L)$ 或 $\Omega(n, K, Q)$ 作用于 $V = V(n, K)$ 上,h 或 Q 相伴的内积 f 非退化,且 Witt 指数 $\nu = \nu_L(h)$ 或 $\nu(Q)$ 等于 $n/2 \geq 2$. 设 $V = U_0 \oplus V_0$, 其中 U_0、V_0 是极大全奇异子空间,M 是集合 $\Sigma = \{U_0, V_0\}$ 在 G 中的定驻子群,则 M 是 G 的极大子群,但以下情形例外:

(i) $L \supsetneqq \mathrm{Tr}K$;

(ii) $G = \mathrm{Sp}(4, 3)$, $\mathrm{SU}(4, 2^2)$, $\mathrm{SU}(4, 3^2)$, $\Omega^+(8, 2)$ 或 $\Omega^+(8, 3)$;

(iii) $G = \Omega(4, K, Q)$, K 是特征 2 的非完全域,或 $|K| \leq 11$.

证明 (3.7.4.1) $G = \Omega(4, K, Q)$ 的情形:

此时可记 $V = U \otimes_K \Pi$, U_0、Π 都是域 K 上 2 维空间,各定义了非退化交错内积 f_1、f_2,使与 Q 相伴的对称双线性内积 $f = f_1 \otimes f_2$, 且所有的 $Q(u \otimes \pi) = 0$. 可设 $U_0 = U \otimes \pi_1$, $V_0 = U \otimes \pi_2$ 对 Π 的一组基 $\{\pi_1, \pi_2\}$ 成立,且 $f_2(\pi_1, \pi_2) = 1$.

$G = \mathrm{SL}(U) \otimes \mathrm{SL}(\Pi)$, $M = \mathrm{SL}(U) \otimes N$, N 是 $\mathrm{SL}(\Pi) = \mathrm{SL}(2, K)$ 的单项子群,M 在 G 中极大 $\Longleftrightarrow$ N 在 $\mathrm{SL}(2, K)$ 中极大. 由定理 3.7.2 b 即可得出 M 的极大性.

以下在$G=\Omega(n, K, Q)$时总假定$n\neq 4$，从而$n=2\nu\geq 6$.

(3.7.4.2) *例外情形下 M 在 G 中的非平凡扩群 X*：

(i) 不妨设$Q(u)=h(u, u)=0$对所有的$u\in U_0\cup V_0$成立，则当$L_0=\mathrm{Tr}K\neq 0$时，$X=\mathrm{TU}(V, h, L_0)$是非平凡真扩群；当$\mathrm{Tr}K=0$时，$X=\Omega(V, Q)$是非平凡真扩群.

(ii) 当$G=\mathrm{Sp}(4, 3)$时，取U_0的基$\{u_1, u_2\}$和V_0的基$\{u_{-1}, u_{-2}\}$，使$(u_i, u_{-i})=1(i=1, 2)$，而其余$(u_i, u_j)=0(j\neq -i)$. 取相互正交的非退化子空间$W_1=\langle u_1+u_{-2}, u_{-1}-u_2\rangle$与$W_2=\langle u_1-u_{-2}, u_{-1}+u_2\rangle$. 则$X=\mathrm{Stab}\{W_1, W_2\}$是非平凡真扩群.

$G=\mathrm{SU}(4, p^2)(p=2$或$3)$时，可构造出$X\cong \mathrm{GSp}(4, p)$作为$M$的扩群.

$G=\Omega^+(8, p)(p=2$或$3)$时，有$\Omega(7, p)$的不可约同构象X作为扩群.

(iii) 由(3.7.4.1)，单项子群N在$\mathrm{SL}(2, K)$中的每个扩群Y对应于M的一个扩群$\mathrm{SL}(U)\otimes Y$.

以下排除例外情形，证明M在G中的极大性. 即对$M\lneqq X\leq G$证明$X=G$.

(3.7.4.3) *M 所包含的根子群*：

M包含酉二平延或正交二平延组成的根子群$T_{u,v}$，其中u、v分别是U_0、V_0的非零向量且相互正交. 对G的每个子群Y和每个非零奇异向量$u\in V$，记

$$U_Y(u)=\{w\in u^{\perp} \mid Q(w)\in L, T_{u,w}<Y\}.$$

则对$u\in U_0$，$U_M(u)=V_0\cap u^{\perp}$（当$L\neq 0$）或$\langle V_0\cap u^{\perp}, u\rangle$（当$L=0$）.

(3.7.4.4) *如果存在 $u\in U_0$，使 $U_X(u)\supsetneqq U_M(u)$，则 $X=G$*：

$U_X(u)$包含某个$w\notin U_M(u)$. 记$w=x+y$，其中$x\in U_0$，$y\in V_0$. 则由$(u, y)=(u, w)=0$知$y\in V_0\cap u^{\perp}\subseteq U_X(u)$. 由$w$奇异知$(x, y)\in L$.

先设$L=0$，即$G=\Omega(V, Q)$. 此时必有$x\notin\langle u\rangle$且

$(x, y)=0$. $x=w-y\in U_X(u)$ 在定驻子群 M_u 下的所有的象张成 $U_0\supset U_X(u)$，从而 $V_X(u)\supseteq\langle V_0\cap u^\perp, U_0\rangle=u^\perp$，且 M 可将 u 送到 $v\in U_0$，使 $(u, v)\neq 0$，同时得到 $V_X(v)=v^\perp$. 由引理3.4.4得 $X=G$.

现在设 $L\neq 0$，$G=\mathrm{TU}(V, h, \mathrm{Tr}K)$. 如果 $x\in\langle u\rangle$，则 $x=w-y\in U_X(u)$，X 包含 G 的长根子群 $T_{u,x}=T_u$. 在 $x\notin\langle u\rangle$ 的情形，总存在 $v\in V_0\cap u^\perp$，使 $(x, v)=1$，从而 $(w, v)=1$，$U_X(u)$包含互不正交的向量 w、v，由引理 3.3.7 知，X 包含 G 的长根子群 T_u. 总之，X 包含长根子群 T_u. 用 M 作共轭知 $T_{w_1}<X$ 对所有的 $w_1\in U_0\cup V_0$ 成立. 对 $U_0\cup V_0$ 以外的任一奇异向量 $w_1=u_1+v_1$（u_1、v_1 分别是 U_0、V_0 中的非零向量），当 $0\neq s=(u_1, v_1)$ 时，用 $\rho_{v,s^{-1}}\in T_v<X$ 可将 $T_{u_1}<X$ 共轭到 $T_{w_1}<X$. 如果 $(u_1, v_1)=0$，取 $x_1\in U_0$，使 $(x_1, v_1)=-1$，则 $\rho_{x_1+v_1,1}\in X$ 将 $u_1-x_1\in U_0$ 送到 w_1，仍有 $T_{w_1}<X$. 这说明 X 包含所有的长根子群，等于 G.

(3.7.4.5) **X 中含有 g_1 将某个 $u_0\in U_0$ 送到 $w_1\notin U_0\cup V_0$，从而将 $U_X(u_0)\mapsto U_M(w_1)$：**

如果 X 定驻向量集合 $\Sigma=U_0\cup V_0$，则它也定驻 Σ 中仅有的两个 ν 维子空间U_0、V_0 组成的集合，即 $X\leq M$. 产生矛盾. 故每个 $g\in X\backslash M$ 将某个 $v\in U_0\cup V_0$ 送到 $w_1=vg\notin U_0\cup V_0$. 又存在 $g_0\in M$ 将 v 送到 $u_0\in U_0$，于是 $g_1=g_0^{-1}g\in X$ 将 $u_0\mapsto w_1\notin U_0\cup V_0$.

(3.7.4.6) **可选(3.7.4.5)中的 $w_1=u_1+v_1(u_1\in U_0, v_1\in V_0)$，使 $U_X(w_1)\nsubseteq\langle u_1, v_1\rangle$：**

若不然，则 $U_X(w_1)\subseteq\langle u_1, v_1\rangle$，$\dim U_X(w_1)\leq 2$. 注意，$U_X(w_1)=U_X(u_0)g_1\supseteq U_M(u_0)g_1$，故

$$\dim U_X(w_1)\geq d=U_M(u_0).$$

当 $G=\Omega(n, K, Q)$ 时，必有 $d=\nu\geq 3$，产生矛盾. 设 $G=\mathrm{TU}(n, K, h, \mathrm{Tr}K)$，则应有 $d=\nu-1\leq 2$. 若 $d=2$，则 $u_1\in U_X(w_1)$，

$U_X(u_1)$ 包含 $w_1 \notin U_M(u_1)$，导致 $X = G$. 故设 $d = 1$，$\nu = 2$. 此时 $V_X(w_1) = \langle w_2 \rangle \neq \langle w_1 \rangle$. 不妨在 $\langle w_2 \rangle$ 中选 $w_2 = u_1 + av_1$，其中 $1 \neq a \in K^*$. 由 $(w_1, w_2) = 0$ 知 $(u_1, v_1) = 0$. 取 $x_1 \in U_0$，$y_1 \in V_0$，使 $(x_1, y_1) = 0$，$(u_1, y_1) = (x_1, v_1) = 1$. $T_{w_1, w_2} < X$ 中的每个元素 $\eta_{\lambda w_1, w_2}(\lambda \in K)$ 将奇异向量 x_1、y_1 分别送到 $\tilde{w}_1 = x_1 + (\bar{a}\lambda + \bar{\lambda})u_1 + (\bar{a}\lambda + \bar{\lambda}a)v_1$ 和 $\tilde{w}_2 = y_1 - (\lambda + \bar{\lambda})u_1 - (\lambda + \bar{\lambda}a)v_1$，从而将 $T_{x_1, y_1} < M$ 共轭到 $T_{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2} < X$. $\tilde{w}_1$ 在 U_0、V_0 中的分量分别是 $\tilde{u}_1 = x_1 + (\bar{a}\lambda + \bar{\lambda})u_1$ 和 $\tilde{v}_1 = (\bar{a}\lambda + \bar{\lambda}a)v_1$. 当 λ 取遍 K 时，内积 $(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1) = (\bar{\lambda}a) + \overline{(\bar{\lambda}a)}$ 可取遍 $\mathrm{Tr}K$. 必可选取 λ 使 $(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1) \neq 0$. 用这样得到的 $\tilde{w}_1$ 代替 w_1，即可化为 $(u_1, v_1) \neq 0$ 从而 $w_2 \notin \langle u_1, v_1 \rangle$ 的情形.

(3.7.4.7) 定理证明的完成：

设 $w_1 = u_0 g_1 = u_1 + v_1$ 如(3.7.4.5)和(3.7.4.6)所述，$U_X(w_1) \not\subseteq \langle u_1, v_1 \rangle$. 取 $w_2 \in U_X(w_1)$，使 $w_2 = u_2 + v_2 \notin \langle u_1, v_1 \rangle$，其中 $u_2 \in U_0$，$v_2 \in V_0$. 如果 u_1、u_2 共线，则 v_1、v_2 不共线，用 M 将 U_0、V_0 互变，即可化为 u_1、u_2 不共线的情形. 故不妨一开始就设 $\dim\langle u_1, u_2 \rangle = 2$.

如果 $v_2 = 0$，则 $U_X(u_2)$ 包含 $w_1 \notin U_M(u_2)$，由(3.7.4.5)已经知道这导致 $X = G$. 故设 $v_2 \neq 0$. 在 $L = 0$ 的情形，如果 v_2 与 v_1 共线，设 $v_2 = av_1$，$a \in K$，则 $U_X(w_1)$ 包含 $u_0 = w_2 - aw_1 = u_2 - au_1 \in U_0$，$U_X(u_0)$ 包含 $w_1 \notin U_M(u_0)$，仍导致 $X = G$. 故以下设 $v_2 \neq 0$，且当 $L = 0$ 时，设 $v_2 \notin \langle v_1 \rangle$. 由于 $w_2 \notin U_0 \cup V_0$，必要时可用 w_2 代替 w_1，用 w_1 代替 w_2，也就是说：将 w_1 与 w_2 的地位互换.

如果存在 $g_0 \in M$ 在定驻 $\langle u_1 + v_1 \rangle$ 及 v_2 的同时使 $u_2 g_0 \neq u_2$，且在 $L = 0$ 时，$u_3 = u_2 g_0 - u_2 \notin \langle u_1 \rangle$. 则 g_0 定驻 w_1 从而定驻 $U_X(w_1)$，$u_3 = w_2 g_0 - w_2 \in U_X(w_1)$，$T_{w_1, u_3} = T_{u_3, w_1} < X$，$U_X(u_3)$ 包含 $w_1 \notin U_M(u_3)$，由(3.7.4.4)即可推出 $X = G$.

记 $W_0 = U_0 \cap \langle v_1, v_2 \rangle^{\perp}$. 如果 $W_0 \not\subseteq \langle u_1, u_2 \rangle$，取 $0 \neq u_3 \in$

$W_0 \setminus \langle u_1, u_2 \rangle$，则存在 $g_0 \in M$ 定驻 u_1、v_1、v_2，且将 $u_2 \mapsto u_2 + u_3$，导致 $X = G$.

在剩下的情形 $W_0 \subseteq \langle u_1, u_2 \rangle$ 里，有 $2 \geq \dim W_0 = \nu - \dim\langle v_1, v_2 \rangle$，从而

$$\nu \leq 2 + \dim\langle v_1, v_2 \rangle \leq 4, \; n = 2\nu \leq 8.$$

先考虑 $G = \Omega(n, K, Q)$ 的情况：此时 $(u_i, v_i) = Q(w_i) = 0$ 对 $i = 1$、2 成立. 又 $(w_1, w_2) = (u_1, v_2) + (v_1, u_2) = 0$，故 $s = (u_1, v_2) = -(v_1, u_2)$ 同时为零或同时不为零. 如果 $s \neq 0$，则 $W_0 = \langle u_1, u_2 \rangle \cap \langle v_1, v_2 \rangle^{\perp} = 0$，$\nu = 2$，$n = 4$，这是(3.7.4.1)中讨论过的情形. 故设 $s = 0$，即 $W_0 = \langle u_1, u_2 \rangle$，此时 $n = 8$. 排除了例外情况 $K = F_2$、F_3 之后，可选 $\pm 1 \neq a \in K^*$，存在 $g_0 \in M$ 在定驻 u_1、v_1、v_2 的同时将 $u_2 \mapsto a^2 u_2$，导致 $X = G$.

现在设 $G = \mathrm{TU}(n, K, h, L)$，$L = \mathrm{Tr}K \neq 0$. 如果 $W_0 \neq 0$，取 $0 \neq u_3 \in W_0$. u_3 不可能同时与 u_1、u_2 都共线，当 $u_3 \in \langle u_1 \rangle$ 时可将 w_2 与 w_1 的地位互换，化为 $u_3 \notin \langle u_1 \rangle$ 的情形. 于是存在 $g_0 \in M$ 在定驻 u_1、v_1、v_2 的同时将 $u_2 \mapsto u_2 + u_3$，这导致 $X = G$. 剩下的情形是 $W_0 = 0$. 这仅当 $\dim\langle v_1, v_2 \rangle = 2$ 且 $\nu = 2$ 才有可能.

由 $w_1 = u_1 + v_1$ 奇异知 $(u_1, v_1) \in \mathrm{Tr}K$.

如果 $(u_1, v_1) \neq 0$，则$\langle u_1, v_1 \rangle$是双曲平面从而非退化. 此时记 $u_2 = au_1 + x_2$，$v_2 = bv_1 + y_2$ 使 a、$b \in K$，$\langle x_2, y_2 \rangle \perp \langle u_1, v_1 \rangle$. 由 $(w_1, w_2) = 0$ 知 $b = a$，$w_2 = aw_1 + (x_2 + y_2)$. 再由 $Q(w_2) \equiv Q(aw_1) + (x_2, y_2) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ L)$ 知 $(x_2, y_2) \in L$. 当然 x_2、y_2 都不为 0，V 是平面$\langle u_1, v_1 \rangle$与$\langle x_2, y_2 \rangle$的正交和，$s = (x_2, y_2) \neq 0$. 排除了例外情形之后，有 $\mathrm{Tr}K \neq F_2$、F_3，可选取 $\lambda \in (\mathrm{Tr}K) \setminus \{0, \pm 1\}$，存在 $g_2 \in M$ 定驻 u_1、v_1，且将 x_2、y_2 分别送到 λx_2，$\lambda^{-1} y_2$，$w_2 g_2 \in U_X(w_1)$，且 $(w_2 g_2, w_2) = (\lambda - \lambda^{-1})s \neq 0$. $U_X(w_1)$ 非全迷向，从而 $U_X(u_0) = U_X(w_1) g_1^{-1}$ 非全迷向，不可能含于 $U_M(u_0)$，这导致 $X = G$.

如果 $(u_2, v_2) \neq 0$，将 w_2 与 w_1 的地位互换即可.

现在考虑 $(u_1, v_1) = (u_2, v_2) = 0$ 的情形. 由 $(w_1, w_2) = (u_1, v_2) + (v_1, u_2) = 0$ 知 $(u_1, v_2) = -(v_1, u_2)$ 且不能为 0,否则,V 全迷向. 不妨将 w_1 乘以适当倍数,化为 $(u_1, v_2) = 1 = -(v_1, u_2) = (u_2, v_1)$ 的情形. 当 $\mathrm{char}K \neq 2$ 时,$\eta_{w_1, w_2} \in X$ 将 v_1、u_1 分别送到 $-u_1$、$2u_1 + v_1$,从而将 $T_{v_1, u_1} < M$ 共轭到 $T_{-u_1, 2u_1+v_2}$,$U_X(u_1)$包含 $2u_1 + v_2 \notin U_M(u_1)$,这导致 $X = G$. 当 $\mathrm{char}K = 2$ 时,存在 $g_2 \in M$ 在定驻 u_1、v_1 的同时将 u_2、v_2 分别送到 $u_2 + u_1$、$v_2 + v_1$,从而 $U_X(w_1)$包含 $w_2 g_2 - w_2 = w_1$,$U_X(u_0) = U_X(w_1) g_0^{-1}$ 包含 $u_0 \notin U_M(u_0)$,仍导致 $X = G$. ▌

第 4 章

同一空间上的典型群的相互嵌入

Aschbacher 的 C_8 类子群由群 G 的这样的子群 M 组成，它们与 G 是作用于同一个向量空间 $V = V(n, K)$ 上的典型群. 例如 V 上的线性群 G 中的辛群、酉群或正交群 M；特征 2 的域上的辛群 G 中的正交群 M；对一般的特征 2 的体 K, $G = \mathrm{TU}(n, K, Q, L) > M = \mathrm{TU}(n, K, Q, L_1)(L \supset L_1)$ 等. 为确定 M 在什么时候是 G 的极大子群，我们只须搞清楚 M 在 G 中的全部扩群. 更一般地，我们定出 $\mathrm{U}'(n, K, h, L) = \mathrm{TU}(n, K, h, L)$ (当 $L \neq 0$) 或 $\Omega(n, K, Q)$ (当 $L = 0$) 在 $\mathrm{GL}(n, K)$中的全部扩群.

本章的主要结果都已经公开发表. 域上辛群 $\mathrm{Sp}(n, K, f)$的正规化子在线性群 $\mathrm{SL}(n, K)$中的极大性早已由 J. McLaughlin 在文献[60]和[61]中证明了. R. H. Dye 和 O. H. King 在文献[7]～[9]、[27]和[28]中讨论了域上酉群和正交群(域特征不为 2)在线性群中的极大性，以及特征 2 的完全域上的正交群在辛群中的极大性. 本书作者在文献[35]和[44]中解决了 K 为域时的所有的其他情形，特别是完全定出了 K 为特征 2 的非完全域时正交群在线性群中的扩群；又在文献[39]、[47]和[48]中解决了 K 为非交换体的情形，只剩下 Witt 指数 $\nu_L(h)$或 $\nu(Q)$等于 0 的情形待解决. 本章叙述的证明基本上沿用了本书作者在上述论文中的方法.

§4.1　主要定理

定理 4.1.1　设 $n \geq 2$，$N = \mathrm{U}'(n, K, h, L)$ 的 Witt 指数 $\nu_L(h) \geq 1$，且当 $L = 0$ 时 $n \geq 3$. 设 X 是 N 在 $\mathrm{GL}(n, K)$ 中的扩群，则下列情形之一成立：

(i) $X \trianglerighteq \mathrm{SL}(n, K)$.

(ii) $X \trianglerighteq \mathrm{U}'(n, K, h, L_1)$，对某个 $L_1 \supseteq L$.

(iii) $\mathrm{GL}(n, K) = \mathrm{GL}(4, 2) \cong A_8$，$N = \Omega^-(4, 2) \cong A_5$，$X = \mathrm{Sp}(4, 2)' \cong A_6$，或 $N = \Omega^+(4, 2) \cong (S_3 \times S_3 \times S_2) \cap A_8$，$X \cong \Gamma L(2,4) \cong (S_3 \times S_5) \cap A_8$.

(iv) $N = \Omega(2, K, Q, L) = \Omega(2, K_0, Q, L)$，$K_0$ 是 L 生成的 K 的子域，$X \trianglerighteq \Omega(2, E, Q, L_1)$ 对某个 $L_1 \supseteq L$ 及 K 中包含 L 的某个子域 E.

(v) K 是以 L 为中心的广义四元数体，$N = \mathrm{SL}(2, L)$，$X \trianglerighteq \mathrm{SL}(2, L(\delta))$ 对某个 $\delta \in K \backslash L$；或 $X \trianglerighteq \Omega(2, L(\delta), Q_1, L_1)$ 对某一对 Q_1、L_1；或 $X \trianglerighteq \mathrm{TU}(2, E, f_1)$，$f_1$ 是关于 K 的对合 J_1：$a \mapsto e^{-1}\bar{a}e$ 的某个内积，这里 $e \in K^*$，$a \mapsto \bar{a}$ 是 K 作为广义四元数体的标准对合.

(vi) $N = \mathrm{SU}(2, 3^2) = \mathrm{SL}(2, 3)$，$X/\{\pm 1\} \cong A_5$.

推论 4.1.2　(1) $\mathrm{SU}(n, K, f)(\nu(f) \geq 1)$ 的正规化子是 $\mathrm{SL}(n, K)$ 的极大子群，但以下情形例外：K 是特征 2 的广义四元数体，$\mathrm{SU}(n, K, f) = \mathrm{SL}(2, Z(K))$.

(2) 设 $\mathrm{char}K = 2$，且当 $L = 0$ 时 $n \geq 3$，L 在 L_1 中极大，则 $\mathrm{U}'(n, K, h, L)(\nu_L(h) \geq 1)$ 的正规化子是 $\mathrm{U}'(n, K, h, L_1)$ 的极大子群. 特别是如果 K 是特征 2 的域，L 是 L_1 的极大 K^2-子空间，且当 $L = 0$ 时 $n \geq 3$，则 $\Omega(n, K, Q, L)(\nu_L(Q) \geq 1)$ 的正规化子是 $\Omega(n, K, Q, L_1)$ 的极大子群；如果 L 是 K 的极大 K^2-子空间，则 $O(n, K, Q, L)$ 是 $\mathrm{Sp}(n, K, f)$ 的极大子群.

§4.2 同一空间上典型群的相互包含关系

设 K 是体，F 是 K 的中心，$V=V(n, K)$ 是 K 上 n 维左向量空间. 本章的目的是确定 V 上一个典型群在另一个典型群中的全部扩群. 在讨论这个问题之前，我们先考察 V 上典型群之间的包含关系.

设 $\mathrm{U}(V, h, L)\le \mathrm{GU}(V, h, L)\le \mathrm{GU}(V, f)$, $f=h+\rho\bar{h}$ 非退化，$Q(x)=h(x, x)$, $(\forall x\in V)$. 在面的引理 4.2.1 和4.2.2 中，我们对 $\mathrm{GL}(V)$ 中的元素落入 $\mathrm{GU}(V, h, L)$ 的条件作进一步讨论.

引理 4.2.1 (1) $\mathrm{GU}(V, f)$ 可刻画为 $\mathrm{GL}(V)$ 中保持关于 f 的正交关系的元素全体所组成的子群. 即：$\forall g\in \mathrm{GL}(V)$、$g\in \mathrm{GU}(V, f)$ 的必要且充分的条件是：

$$f(x, y)=0 \Longleftrightarrow f(xg, yg)=0,\ \forall x, y\in V.$$

(2) 如果有 $\mathrm{U}(V, h, L)\le \mathrm{GU}(V, f)$ 且 $\nu_L(h)\ge 1$，则上述 $g\in \mathrm{GU}(V, f)$ 的必要且充分条件还可减弱为：$f(x, y)=0 \Longleftrightarrow f(xg, yg)=0$, $\forall x, y\in V$ 且 $Q(x)\in L$. 但以下情形例外：$n=2$, $\mathrm{char}K=2$, K 是 F 上的广义四元数体，$L=F\subsetneqq K_J$. $g\in \mathrm{GL}(V)$ 满足所述条件，从而将 L-奇异向量全部变到迷向向量，但 g 将某些 L-奇异向量变到非 L-奇异，$g\notin \mathrm{GU}(V, f)$.

证明 (1) 必要性很显然. 只须证充分性. 即：设 $g\in \mathrm{GL}(V)$ 保持关于 f 的正交关系，求证 $g\in \mathrm{GU}(V, f)$.

对每个 $0\ne u\in V$，由 f 非退化，可取 $v\in V$，使 $f(v, u)=1$. 则由 $f(v, u)\ne 0$ 可知 $\lambda=f(vg, ug)\ne 0$. $\forall x\in V$, $f(x-f(x, u)v, u)=0 \Longrightarrow f((x-f(x, u)v)g, ug)=0 \Longrightarrow f(xg, ug)=f(x, u)f(v, u)=f(x, u)\lambda$. 其中 $\lambda\in K^*$ 与 x 无关而由 u 决定，可记为 λ_u.

我们证明上述的 λ_u 实际上与 u 无关. 即对任意 $0\ne u$、$w\in$

V，有 $\lambda_u = \lambda_w$. 先设 u、w 在 K 上线性无关.

$$\forall x \in V,\ f(xg,\ (u+w)g) = f(x,\ u+w)\lambda_{u+w},$$

而另一方面又有

$$\begin{aligned} f(xg,\ (u+w)g) &= f(xg,\ ug) + f(xg,\ wg) \\ &= f(x,\ u)\lambda_u + f(x,\ w)\lambda_w. \end{aligned}$$

比较这两个等式可得 $f(x,\ y_0) = 0$，其中 $y_0 = \overline{\lambda_{u+w}}(u+w) - \overline{\lambda_u}u - \overline{\lambda_w}w$. 由 $x \in V$ 的任意性可得 $y_0 = 0$. 再由 u、w 线性无关，得 $\lambda_u = \lambda_{u+w} = \lambda_w$. 当 u、w 线性相关(即共线)时，可取 $y \in V$ 与 u、w 都不共线，得到 $\lambda_u = \lambda_y = \lambda_w$.

于是存在 $\lambda \in K^*$，使 $f(xg,\ yg) = f(x,\ y)\lambda$ 对所有的 x、$y \in V$ 成立，λ 由 g 决定而与 x、y 无关. 这样的 λ 必是中心对称元(即 $\lambda \in F^*$ 且 $\overline{\lambda} = \lambda$). 这证明了 $g \in \mathrm{GU}(V,\ f)$.

(2) 仍只须证充分性. 注意：条件

$$f(x,\ y) = 0 \Longleftrightarrow f(xg,\ yg) = 0 (\forall x,\ y \in V)$$

等价于 $x^\perp g = (xg)^\perp, \forall x \in V$. 由(1)可知，只须证明：如果 $u^\perp g = (ug)^\perp$ 对所有 L-奇异向量 $u \neq 0$ 成立，则 $x^\perp g = (xg)^\perp$ 对所有的非 L-奇异向量 $x(Q(x) \notin L)$ 也成立.

如果 $x^\perp$ 包含 L-奇异向量 $u \neq 0$，则对每一个这样的 u，已经知道 $xg \in u^\perp g = (ug)^\perp$，即 $ug \in (xg)^\perp$. $x^\perp$ 可以由 L-奇异向量张成，故 $x^\perp g = \langle ug | u \in x^\perp,\ Q(u) \in L \rangle \subseteq (xg)^\perp$，从而 $x^\perp g = (xg)^\perp$.

现在考虑任意非 L-奇异向量 x. V 由 L-奇异向量张成，其中必有某个 L-奇异向量 $u \notin x^\perp$. $\langle u,\ x \rangle$ 是双曲平面，可由两个互不正交的 L-奇异向量 u、v 张成. 当 $n \geq 3$ 时存在 $0 \neq w \in \langle u,\ v \rangle^\perp$，$w^\perp$ 包含奇异向量 $u \neq 0$，由已经证明的结论可知 $xg \in w^\perp g = (wg)^\perp$，从而 $wg \in (xg)^\perp$. 对每一个满足了条件 $Q(y) \equiv Q(w) (\bmod L)$ 的 $0 \neq y \in x^\perp$，$y^\perp$ 同样包含非零的 L-奇异向量，从而 $yg \in (xg)^\perp$. 所有这样的 y 可张成 $x^\perp$，$x^\perp g = \langle y \in$

$x^{\perp} \mid Q(y) \equiv Q(w)(\mathrm{mod}\ L)\rangle$ 含于从而等于 $(xg)^{\perp}$.

剩下的情形是 $n=2$，此时可记 $V=\langle u, v\rangle$，使 $Q(u)$、$Q(v) \in L$，且 $f(u, v)=1$. $f(u, v) \neq 0 \Longrightarrow \lambda=f(ug, vg) \neq 0$. 只要 λ 是中心对称元，则 $f(xg, yg)=f(x, y)\lambda$ 对所有的 $x=a_1u+b_1v$、$y=a_2u+b_2v$ 成立，$(\forall a_i, b_i \in K)$，$g \in \mathrm{GU}(V, f)$ 恰如所需. 当 $J=1$ 时 K 是域，λ 当然是中心对称元，设 $J \neq 1$ 从而 $L \neq 0$，且不妨设 $1 \in L \subseteq K_J$，$\rho=-1$. $\forall s \in L$，$Q(su+v) \in L \Longrightarrow ((su+v)g)^{\perp}=(su+v)^{\perp}g=\langle su+v\rangle g$，即 $su+v$ 迷向，$s\lambda \equiv Q(sug+vg) \equiv 0(\mathrm{mod}\ K_J)$. 取 $s=1$ 知 $\lambda \in K_J$ 是对称元. 只须再证明 λ 含于 K^* 的中心 F^*. 当 K 是域时，显然. 当 K 非交换时，由 $s\lambda \in K_J(\forall s \in L)$ 得 $s\lambda=\overline{s\lambda}=\lambda s$. 这说明 λ 中心化 L，从而 λ 中心化 L 所生成的环 R. 当 $L \nsubseteq F$ 时 $R=K$，$\lambda \in F^*$ 如所欲证. $L \subseteq F$ 时 K 是 F 上的广义四元数体，$L=F=\mathrm{Tr}K$. 当 char $K \neq 2$ 时 $K_J=F$，$\lambda \in K_J$ 迫使 $\lambda \in F^*$. char $K=2$ 时，如果 g 将 L-奇异向量仍变到 L-奇异向量，特别，$(u+v)g=ug+vg$ 是 L-奇异向量，$\lambda \equiv Q(ug+vg) \equiv 0(\mathrm{mod}\ L)$，$\lambda \in L=F$，仍有 $g \in \mathrm{GU}(V, f)$. 剩下的情形是例外情形，此时 g 将所有的 L-奇异线 $\langle w\rangle(w=u$ 或 $w=su+v$, $s \in L)$ 变到迷向线 $\langle wg\rangle$，从而满足条件 $w^{\perp}g=\langle w\rangle g=\langle wg\rangle=(wg)^{\perp}$，$\lambda \in K_J$ 但 $\lambda \notin L=F$，$g \notin \mathrm{GU}(V, f)$，$L$-奇异线 $\langle su+v\rangle(0 \neq s \in L)$ 被变到非 L-奇异的迷向线. ∎

引理 4.2.2 $\mathrm{GU}(V, Q, L)(L \neq K, \nu_L(h) \geq 1)$ 可刻画为 V 中全体 L-奇异线的集合在 $\mathrm{GL}(V)$ 中的稳定子群.

证明 记 $P_L=\{\langle u\rangle \mid 0 \neq \in V, Q(u) \in L\}$ 是 V 中全体 L-奇异线的集合. 易见 $\mathrm{GU}(V, Q, L)$ 定驻 P_L. 反过来，设 $g \in \mathrm{GL}(V)$ 定驻 P_L，要证明 $g \in \mathrm{GU}(V, Q, L)$.

对任意 $\langle u\rangle \in P_L$，我们证明 $u^{\perp}g=(ug)^{\perp}$：对任意 $w \in u^{\perp}$，要证明 $wg \in (ug)^{\perp}$. $w \in \langle u\rangle$ 时显然. 设 $w \notin \langle u\rangle$，则 $f(u; w)=0 \Longrightarrow \langle u, w\rangle$ 的 1 维子空间全是 L-奇异线(当 w L-奇异)或仅有一条 L-奇异线 $\langle u\rangle$(当 w 非 L-奇异). 而 $f(u, w) \neq 0 \Rightarrow \langle u, w\rangle$ 至

少含有两条 L-奇异线和一条 L-非奇异线. $\langle u, w\rangle$ 的 L-奇异线和 L-非奇异线与 $\langle ug, wg\rangle$ 一一对应. 故 $f(u, w) = 0 \Longleftrightarrow f(ug, wg) = 0$. 这证明了 $u^{\perp}g = (ug)^{\perp}$ 对任意 $\langle u\rangle \in P_L$ 成立. 由引理 4.2.1(2)知,这导致 $g \in \mathrm{GU}(V, f)$. (由于 g 定驻 P_L,例外情形不会出现.)即存在 $\lambda \in F^* \cap K_J$ 使 $f(xg, yg) = f(x, y)\lambda$ 对任意 x、$y \in V$ 成立.

可选 L-奇异向量 $u_i(1 \leq i \leq n)$ 组成 V 的一组基, $f(u_ig, u_jg) = f(u_i, u_j)\lambda$ 对 $1 \leq i, j \leq n$ 成立. 每个 $x \in V$ 可写成

$$x = \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_iu_i,\ x_i \in K(1 \leq i \leq n),$$

$$\begin{aligned} Q(xg) &\equiv \sum\nolimits_{1\leq i<j\leq n} f(u_ig, u_jg) \\ &\equiv \sum\nolimits_{1\leq i<j\leq n} f(u_i, u_j)\lambda \equiv Q(x)\lambda (\mathrm{mod}\ L). \end{aligned}$$

从而证明了 $g \in \mathrm{GU}(V, Q, L)$. ▌

以下引理给出判别 $\mathrm{GU}(V, h, L)$ 的元素是否落入 $\mathrm{U}(V, h, L)$ 的一个简单而有用的条件.

引理 4.2.3　设 $g \in \mathrm{GU}(n, K, h, L) \leq \mathrm{GU}(n, K, f)$, 则:

(1) 若 $g \notin \mathrm{U}(n, K, h, L)$, 则 $\mathrm{Ker}(g - I)^{\infty} = \{x \in V(n, K) \mid$ 存在自然数 k 使 $x(g - I)^k = 0\}$ 是全迷向子空间.

(2) 如果 $\dim \mathrm{Ker}(g - I)^{\infty} > n/2$, 则 $g \in \mathrm{U}(n, K, h, L)$. 特别当 $\mathrm{rank}(g - I) < n/2$ 或 g 幺幂(即 $g - I$ 幂零)时是如此.

证明　$g \in \mathrm{GU}(n, K, h, L) \Longrightarrow$ 存在中心对称元 λ, 使 $f(xg, yg) = \lambda f(x, y)$ 且 $Q(xg) - \lambda Q(x) \in L$, $\forall x$、$y \in V$.

设 $g \notin \mathrm{U}(n, K, h, L)$, 即 $\lambda \neq 1$. 我们约定 $(g - I)^0 = I$, 从而 $x = 0 \Longleftrightarrow x(g - I)^0 = 0$. 设 x、$y \in \mathrm{Ker}(g - I)^{\infty}$, 即有非负整数 m、k 使 $x(g - I)^m = y(g - I)^k = 0$. 我们对 $m + k$ 作数学归纳法证明 $f(x, y) = 0$. 如果 $x = 0$ 或 $y = 0$, 显然 $f(x, y) = 0$. 特别,当 $m + k = 0$ 时是如此. 设 $x \neq 0$, $y \neq 0$, 从而 $m, k \geq 1$. 并设当非负整数 m_1、k_1 满足条件 $m_1 + k_1 < m + k$ 时,

$$x_1(g-I)^{m_1}=y_1(g-I)^{k_1}=0 \Longrightarrow f(x_1, y_1)=0.$$

记 $x_0=x(g-I)$, $y_0=y(g-I)$. 则

$$x_0(g-I)^{m-1}=y_0(g-I)^{k-1}=0,$$

由归纳假设有 $f(x, y_0)=f(x_0, y)=f(x_0, y_0)=0$, 但 $xg=x+x_0$, $yg=y+y_0$. 故 $\lambda f(x, y)=f(xg, yg)=f(x+x_0, y+y_0)=f(x, y)$. 由 $\lambda \neq 1$ 即得 $f(x, y)=0$. 这证明了(1)成立.

由 f 非退化知,当 $\mathrm{Ker}(g-I)^{\infty}$ 的维数大于 $n/2$ 时,它不可能全迷向,由(1)立即得 $g \in \mathrm{U}(n, D, h, L)$. ∎

对于 V 上不同的酉群 $\mathrm{U}(V, h, L)$之间的相互包含关系,有如下引理:

引理 4.2.4 设 $\mathrm{U}(V, h_i, L_i) \leq \mathrm{U}(V, f_i)(i=1, 2)$ 作用于同一个空间 $V=V(n, K)$ 上,其中 h_i 是 V 上 J_i-半双线性型, $J_1: a \mapsto \bar{a}$ 和 $J_2: a \mapsto \tilde{a}$ 是 K 的对合, $Q_i(x)=h_i(x, x)$ 和 $f_i=h_i+\rho_i h_i^{J_i}$ 是 h_i 相关联的伪二次型和 ρ_i-Hermite 内积, $\rho_i \in \{\pm 1\}$. 我们在这里只考虑 $\nu_{L_i}(h_i) \geq 1$ 的情形,并且排除 $\mathrm{U}(V, h_1, L_1)=O(2, K, Q_1)$ 的情形.

则 $\mathrm{U}'(V, h_1, L_1) \leq \mathrm{GU}(V, h_2, L_2)$ 的必要且充分的条件是:存在 $e \in K^*$, 使 $\tilde{a}=e^{-1}\bar{a}e(\forall a \in K)$, $L_1 e \subseteq L_2$, $f_2(x, y)=f_1(x, y)e$ 并且 $Q_2(x) \equiv Q_1(x)e(\mathrm{mod}\ L_2)(\forall x \in V)$. 但以下情形例外:

(i) K 是域, $J_1 \neq 1$, $J_2=1$, $N_1=\mathrm{TU}(2, K, f_1)=\mathrm{SL}(2, K_{J_1})<M_2=\mathrm{GSp}(2, K, f_2)=\mathrm{GL}(2, K)$.

(ii) K 是广义四元数体, $L_1=F$, $U'(V, h_1, L_1)=\mathrm{TU}(2, K, Q_1, F)=\mathrm{SL}(2, F)$, 只要 J_2 也定驻 F 中所有的元素,就一定有 $\mathrm{TU}(2, K, h_1, F) \leq \mathrm{U}(2, K, h_2, L_2)$, 且存在 $\delta \in K^*$ 使 $\tilde{a}=\delta^{-1}\bar{a}\delta(\forall a \in K)$, 选 u_1、$u_2 \in V$, 使 $Q_1(u_i) \in F(i=1, 2)$ 且 $f_1(u_1, v_1)=1$, 只要 $f_2(u_1, v_1) \notin F\delta$, 就不存在统一的 $e \in K^*$, 使 $f_2(x, y)=f_1(x, y)e$ 对所有的 x、$y \in V$ 成立.

证明 充分性显然;下面证必要性:记 $N_1 = \mathrm{U}'(V, h_1, L_1)$, $M_2 = \mathrm{GU}(V, h_2, L_2)$.

我们要在假设 $N_1 \leq M_2$ 下找到满足所述条件的 e 来.

当 $L_1 \neq 0$ 时,可以取 $0 \neq \theta \in L_1$,用 $L_1\theta^{-1}$ 代替 L_1,相应地用 $a \mapsto \theta\bar{a}\theta^{-1}$ 代替 J_1,用 $h_1(x, y)\theta^{-1}$ 代替 $h_1(x, y)$,化为 $\varepsilon_1 = -1$, $1 \in L_1 \subseteq K_{J_1}$ 的情形,而不改变群 N_1,也不影响推理的正确性.

证明分以下几步进行:

(4.2.4.1) $N_1 \leq \mathrm{GU}(V, h_2, L_2) \Longrightarrow N_1 \leq \mathrm{U}(V, h_2, L_2)$.

$N_1 = \mathrm{U}'(V, h_1, L_1)$ 由根元素生成,每个根元素 T 都是幺幂元素. 由引理 4.2.3(2)知

$$T \in \mathrm{GU}(V, h_2, L_2) \Longrightarrow T \in \mathrm{U}(V, h_2, L_2).$$

从而所有这样的 T 生成的 $N_1 \leq \mathrm{U}(V, h_2, L_2)$.

以下记 $N_2 = \mathrm{U}(V, h_2, L_2)$.

(4.2.4.2) 对 $i = 1, 2$ 记 $P_{L_i} = \{\langle u\rangle \mid u \neq 0, Q_i(u) \in L_i\}$, 并对任意的 $W \subseteq V$ 记 $W^{\perp_i} = \{x \in V \mid f_i(x, w) = 0, \forall w \in W\}$. 我们证明: $P_{L_1} \subseteq P_{L_2}$; 且对任意 $\langle u\rangle \in P_{L_1}$ 有 $u^{\perp_1} = u^{\perp_2}$.

先设 $n \geq 3$. $\forall \langle u\rangle \in P_{L_1}$, 可取 $w \in u^{\perp_1}\backslash\langle u\rangle$, 还可取 $\langle v\rangle \in P_{L_1}$, 使 $f_1(v, w) = 0$,$f_1(v, u) = 1$. 存在 $g_1 \in N_1$, 固定 u 且将 $w \mapsto w + u$. 由 $N_1 \leq N_2$ 得知 $g_1 \in N_2 \leq \mathrm{U}(V, f_2)$,$f_2(w, u) = f_2(wg_1, ug_1) = f_2(w + u, u)$, 从而 $f_2(u, u) = 0$. 又存在 $g_2 \in N_1$, 固定 u 且将 $v \mapsto v - Q_1(w)u + w$, 于是又可由 $g_2 \in N_2$ 得到

$$f_2(v - Q_1(w)u + w, u) = f_2(v, u),$$

$$f_2(w, u) = Q_1(w)f_2(u, u) = 0.$$

由 $w \in u^{\perp_1}\backslash\langle u\rangle$ 的任意性及 $f_2(u, u) = 0$ 可知 $u^{\perp_1} \subseteq u^{\perp_2}$, 从而 $u^{\perp_1} = u^{\perp_2}$. 再由 $g_1 \in N_2 = \mathrm{U}(V, h_2, L_2)$ 得知 $0 \equiv Q_2(wg_1) - Q_2(w) \equiv Q_2(w + u) - Q_2(w) \equiv f_2(w,u) + Q_2(u) \equiv Q_2(u) \pmod{L_2}$, 即 $Q_2(u) \in L_2$, $\langle u\rangle \in P_{L_2}$. 这又证明 $P_{L_1} \subseteq P_{L_2}$.

再设 $n=2, N_1=\mathrm{TU}(2, K, h_1, L_1), L_1\neq 0$ 从而 $1\in L_1\subseteq K_{J_1}$. $\forall\langle u\rangle\in P_{L_1}$, 可取 $\langle v\rangle\in P_{L_1}$ 使 $f_1(v, u)=1$. 存在 $g_1\in N_1\leq N_2$ 固定 u 且将 $v\mapsto v+u$, $f_2(v+u, u)=f_2(v, u)$, 从而 $f_2(u, u)=0$. 这证明了 $u^{\perp_2}=\langle u\rangle=u^{\perp_1}$. 当 $|L_1|>2$ 时,可选 $0\neq s\in L_1$, 且 $s\neq 1$, 存在 $g_2\in N_1\leq N_2$ 将 $u\mapsto su$, $0\equiv Q_2(su)-Q_2(u)\equiv Q_2((s-1)u+u)-Q_2(u)\equiv Q_2((s-1)u)\pmod{L_2}$, 从而 $Q_2(u)\in L_2$. $|L_1|=2$ 仅当 $K=F_2$ 才有可能,此时 $N_1=\mathrm{Sp}(2, 2)=\mathrm{SL}(2, 2)\leq N_2$ 迫使 $N_2=\mathrm{Sp}(2, 2)$, $L_2=K$, 当然仍有 $Q_2(u)\in L_2$. 这证明了 $P_{L_1}\subseteq P_{L_2}$.

(4.2.4.3) *存在 $0\neq e\in K^*$, 使 $L_1e\subseteq L_2$ 且 $\tilde{a}=e^{-1}\bar{a}e$, $\forall a\in K$.*

取 $\langle u_1\rangle$、$\langle u_2\rangle\in P_{L_1}\subseteq P_{L_2}$ 使 $f_1(u_1, u_2)=1$, 则 $e=f_2(u_1, u_2)\neq 0$. $\forall s\in L_1$, $\langle su_1+u_2\rangle\in P_{L_1}\Longrightarrow\langle su_1+u_2\rangle\in P_{L_2}\Longrightarrow 0\equiv Q_2(su_1+u_2)\equiv se\pmod{L_2}$. 这证明了 $L_1e\subseteq L_2$. 当 $L_1\neq 0$ 从而 $1\in L_1$ 时,还可知 $e\in L_2$.

记 $\Lambda=\{\lambda\in K^*\mid$ 存在 $\Lambda(\lambda)\in N_1$ 将 $u_1\mapsto\bar{\lambda}^{-1}u_1$, $u_2\mapsto\lambda u_2\}$. 则 Λ 是 K^* 的子群. 对任意的 $\lambda\in\Lambda$, 由 $\Lambda(\lambda)\in N_1\leq N_2$, 得 $f_2(\bar{\lambda}^{-1}u_1, \lambda u_2)=f_2(u_1, u_2)$, 即 $\bar{\lambda}^{-1}e\tilde{\lambda}=e$, $\tilde{\lambda}=e^{-1}\bar{\lambda}e$. 记 R 为 Λ 所生成的 K 的子环,则 $\forall a\in R$ 也有 $\tilde{a}=e^{-1}\bar{a}e$ 成立. 只要能证明 $R=K$ 即可. Λ 包含 $L_1\backslash\{0\}$, 且包含所有的非零的 $Q_1(x)$ $(x\in\langle u_1, u_2\rangle^{\perp_1})$. 因此,对任意的 x、$y\in\langle u_1, u_2\rangle^{\perp_1}$, 由 $f_1(x, y)\equiv Q_1(x+y)-Q_1(x)-Q_1(y)\pmod{L_1}$ 知 $f_1(x, y)\in R$.

当 $n\geq 3$ 时, $\langle u_1, u_2\rangle^{\perp_1}\neq 0$ 且非退化, $f_1(x, y)$ $(x, y\in\langle u_1, u_2\rangle^{\perp_1}$ 可取遍 K, $R=K$, 恰如所需.

设 $n=2$. 当 $L\nsubseteq F$ 时,由引理 1.7.8 知 $R=K$.

设 $L\subseteq F$. 如果 K 是非交换体,则它是 F 上广义四元数体, $L=F$. 此时 $\tilde{s}=e^{-1}\bar{s}e=s$ 对所有的 $s\in F$ 成立. J_1 与 J_2 都是 K 的反自同构,且都定驻 F 中所有的元素,由定理 1.7.6 知 $J_2J_1^{-1}$ 是 K 的某个内自同构 $I_\delta: a\mapsto\delta^{-1}a\delta$, 从而 $J_2: a\mapsto\delta^{-1}\bar{a}\delta$. 为了使

J_2 是对合，即 $J_2^2 = 1_K$，要求 $\bar{\delta} \in F^*\delta$. 按 u_1、u_2 的取法，已有 $f_1(u_1, u_2) = 1$，$f_2(u_1, u_2) = e \neq 0$，从而 $f_2(u_1, u_2) = f_1(u_1, u_2)e$. 要使引理成立，必须 $f_2(u_1, bu_2) = f_1(u_1, bu_2)e$ 对所有的 $b \in K^*$ 成立. 即 $e\tilde{b} = \bar{b}e$，$\tilde{b} = \delta^{-1}\bar{b}\delta = e^{-1}\bar{b}e$，$\forall b \in K^*$、这也就是要求 $e\delta^{-1}$ 含于 K 的中心 F，$e \in F\delta$. 但 e 可以取满足条件 $\bar{e} \in F^*e$ 的任一非零元素. 只要 $e \notin F\delta$，就成为引理的反例. 这就是引理的例外情形(ii).

以下设 K 是域. 如果 $J_1 = 1$，则当 char $K \neq 2$ 时，$N_1 = \mathrm{Sp}(2, K, f_1) = \mathrm{SL}(2, K)$，$\Lambda = K^*$，$R = K$；当 char $K = 2$ 时，$N_1 = \Omega(2, K, Q_1, L_1) > \Omega(2, K, Q_1)$，$\Lambda$ 包含所有的非零平方元 $a^2 (a \in K^*)$，由 $\tilde{a}^2 = \widetilde{a^2} = e^{-1}\overline{a^2}e = a^2$ 得到 $\tilde{a} = a$，$J_2 = 1$. 如所欲证. 当 K 是域且 $J_1 \neq 1$ 时，K_{J_1} 是域且等于 L_1，$N_1 = \mathrm{SL}(2, K_{J_1})$. 如果 $J_2 \neq 1$，则 $L_2 = K_{J_2} = K_{J_1} = L_1$，$J_2 = J_1$，符合要求. 在 $J_2 = 1$ 时属于引理的例外情形(i).

(4.2.4.4) 对(4.2.4.3)找到的 e，证明 $f_2(x, y) = f_1(x, y)e$ 和 $Q_2(x) \equiv Q_1(x)e \pmod{L_2}$ 对所有的 x、$y \in V$ 成立，从而完成引理的证明.

仍如(4.2.4.3)设 $\langle u_1 \rangle$、$\langle u_2 \rangle \in P_{L_1} \subseteq P_{L_2}$，$f_1(u_1, u_2) = 1$，$f_2(u_1, u_2) = e \neq 0$. 将 u_1、u_2 扩充为 V 的一组基 $\{u_i \mid 1 \leq i \leq n\}$，使 $\langle u_i \rangle \in P_{L_1}$，$\forall 1 \leq i \leq n$. 在这组基下将 V 写成行向量空间 $\mathrm{Mat}_{1\times n}K$，并将 N_1、N_2 写成矩阵群. 设 $f_i(x, y) = xH_i(y^{J_i})'$ $(i = 1, 2)$，其中 $H_i \in \mathrm{GL}(n, K)$ 的第(k, l)一元为 $f_i(u_k, u_l)$. 特别，H_1、H_2 的第(1, 2)-元分别为 1、e. $\mathrm{U}(n, K, f_i)$ 成为矩阵群

$$\mathrm{U}(n, K, H_i) = \{A \in \mathrm{GL}(n, K) \mid AH_i(A^{J_i})' = H_i\}.$$

对任意 $A \in N_1 \leq N_2$，同时有 $AH_1\bar{A}' = H_1$ 及 $AH_2\tilde{A}' = H_2$ 成立. 再由 $\tilde{a} = e^{-1}\bar{a}e (\forall a \in K)$，得

$$H_2e^{-1} = AH_2\tilde{A}'e^{-1} = AH_2e^{-1}\bar{A}',$$

$$H_2e^{-1}H_1^{-1} = (AH_2e^{-1}\overline{A}')(AH_1\overline{A}')^{-1}$$
$$= A(H_2e^{-1}H_1^{-1})A^{-1}.$$

即：$H_2e^{-1}H_1^{-1}$ 中心化 N_1，从而应当是中心纯量阵 cI，$c \in F^*$，$H_2 = cH_1e$. 比较最后这个等式两端的第(1, 2)-元，得 $e = ce$，$c = 1$，$H_2 = H_1e$. 于是 $\forall x$、$y \in V = \mathrm{Mat}_{1\times n}K$，有

$$f_2(x, y) = xH_2\tilde{y}' = xH_1e\tilde{y}' = xH_1\overline{y}'e = f_1(x, y)e.$$

且 $\forall x = \sum_{i=1}^n x_iu_i \in V$，有

$$Q_2(x) \equiv \sum_{1\le i<j\le n} x_if_2(u_i, u_j)\tilde{x}_j \equiv \sum_{1\le i<j\le n} x_if_1(u_i, u_j)e\tilde{x}_j$$
$$\equiv \sum_{1\le i<j\le n} x_if_1(u_i, u_j)\overline{x_j}e \equiv Q_1(x)e(\mathrm{mod}\ L_2).$$

如所欲证. ▌

推论 4.2.5 设 $\mathrm{U}(V, h_i, L_i) \le \mathrm{U}(V, f_i)(i = 1, 2)$ 如引理 4.2.4 所述，并排除引理 4.2.4 所述的例外情形. 设 $g \in \mathrm{GL}(V)$，则 $g^{-1}\mathrm{U}'(V, h_1, L_1)g \le \mathrm{GU}(V, h_2, L_2)$ 的必要且充分条件是：存在 $e \in K^*$，使 $\tilde{a} = e^{-1}\overline{a}e(\forall a \in K)$，$L_1e \subseteq L_2$，$f_2(xg, yg) = f_1(x, y)e$，并且 $Q_2(xg) \equiv Q_1(x)e(\mathrm{mod}\ L_2)(\forall x, y \in V)$. 特别当 $J_1 = J_2$，$h_1 = h_2$，$L_1 = L_2$ 时，$g \in \mathrm{GU}(V, h_1, L_1)$.

证明 $\forall x$、$y \in V$，定义 $h_3(x, y) = h_2(xg, yg)$，则 h_3 是 V 上 J_2-半双线性型，$\mathrm{GU}(V, h_3, L_2) = g\mathrm{GU}(V, h_2, L_2)g^{-1}$. 对 $\mathrm{U}'(V, h_1, L_1) \le \mathrm{GU}(V, h_3, L_2)$ 应用引理 4.2.4 即得. ▌

为了证明 §4.1 中的主要定理，定出 $N = \mathrm{U}'(n, K, h, L) \le \mathrm{U}(n, K, f)$ 在 $\mathrm{GL}(n, K)$ 中的扩群 X，我们将分 $X \le \mathrm{GU}(n, K, f)$ 与 $X \not\le \mathrm{GU}(n, K, f)$ 两种情形来讨论. 在后一种情形下，我们设法在 X 中找到 $\mathrm{SL}(n, K)$ 的一个根子群，然后用下面的引理定出 X.

引理 4.2.6 设 $\mathrm{U}'(n, K, h, L) \le N \le \mathrm{U}(n, K, f)$，且 N 在 $V = V(n, K)$ 上不可约. 设 $N \le X \le \mathrm{GL}(n, K)$，并且 X 含有

$\mathrm{SL}(n, K)$ 的一个根子群，则下列结论之一成立：

(i) $X \geq \mathrm{SL}(n, K)$;

(ii) K 是域，n 为偶数，f 是交错型，$X = \mathrm{Sp}(n, K, f)$;

(iii) $K = F_2$，n 为偶数，$\mathrm{U}'(n, K, h, L) = \Omega(n, F_2, Q)$，$X = O(n, F_2, Q)$.

证明 当 $n = 2$ 时，由 N 不可约知，有 $g \in N$ 将 X 所含的 $\mathrm{SL}(n, K)$的根子群 T 共轭到 $\tilde{T} = g^{-1}Tg \neq T$，$X \geq \langle T, \tilde{T} \rangle = \mathrm{SL}(2, K)$，(i) 成立.

以下设 $n \geq 3$，则 N 不可约且本原，X 也是如此. 设 Y 是 X 所含的 $\mathrm{SL}(n, K)$的根子群的全体所生成的群，则 $X \trianglerighteq Y$. 由定理 3.5.1知 Y 不可约. 于是又可用定理 3.2.1 得：$Y = \mathrm{SL}(n, K)$；或 $Y \leq \mathrm{Sp}(n, K, f_1)$，对某个 f_1，且 $Y \lneqq \mathrm{Sp}(n, K, f_1)$ 仅当 $K = F_2$ 时才可能. 当 $Y = \mathrm{SL}(n, K)$ 时(i)已成立. 故设 $Y \leq \mathrm{Sp}(n, K, f_1)$. 由于 V 上已定义了一个非退化内积 f，V 上每个 K-线性函数 φ 对应于一个 $v \in V$ 使 $x\varphi = f(x, v)$，$\forall x \in V$. 从而 $\mathrm{SL}(n, K)$的平延 $\tau_{u,\varphi}$具有形式 $\tau_{u,v}: x \mapsto x + f(x, v)u$，其中 $f(u, v) = 0$. 每个 $g \in N \leq \mathrm{U}(n, K, f)$ 将 $\tau_{u,v}$共轭到 $g^{-1}\tau_{u,v}g = \tau_{ug,vg}$，从而将 $\mathrm{SL}(n, K)$的根子群 $T_{u,v} = \{\tau_{au,v} \mid a \in L\}$ 共轭到 $T_{ug,vg}$. 若存在 $T_{u,v} < Y$ 使 u、v 不共线，则存在 $g_1 \in N$ 定驻 u 且将$\langle v \rangle$变到$\langle v_1 \rangle \neq \langle v \rangle$，$g_1^{-1}T_{u,v}g_1 = T_{u,v_1} < Y$. 这导致

$$V_Y(u) = \{x \in V \mid T_{u,x} < Y\} \supseteq \langle v, v_1 \rangle,$$

$V_Y(u)$ 是至少二维的子空间. 但由 $Y \leq \mathrm{Sp}(n, K, f_1)$ 知，$V_Y(u)$ 的维数只能是 1，产生矛盾. 故 $T_{u,v} < Y \Longrightarrow \langle u \rangle = \langle v \rangle \Longrightarrow f(u, u) = 0$. 即：$\forall 0 \neq u \in V$，$V_Y(u) \neq 0 \Longleftrightarrow f(u, u) = 0$ 且 $V_Y(u) = \langle u \rangle$. 当 $Y = \mathrm{Sp}(n, K, f_1)$ 时，对任意 $0 \neq u \in V$ 有 $V_Y(u) \neq 0$，从而 $f(u, u) = 0$，$V_Y(u) = \langle u \rangle$. 这说明$f$是交错型，且 $Y = \langle T_{u,u} \mid 0 \neq u \in V \rangle = \mathrm{Sp}(n, K, f)$，(ii) 成立. 设 $Y \lneqq \mathrm{Sp}(n, K, f_1)$ 从而 $K = F_2$. 此时 f 只能是交错型. 记 $P(Y) = \{0 \neq u \in V \mid \rho_{u,1} \in Y\}$，这里 $\rho_{u,1} = \tau_{u,u}$是 $\mathrm{Sp}(n, F_2, f)$ 的辛平延. 则 $Y =$

$\langle \rho_{u,1} \mid u \in P(Y)\rangle \leq \mathrm{Sp}(n, F_2, f)$. 当然我们设 $Y \lneq \mathrm{Sp}(n, F_2, f)$（否则，(ii) 成立），于是 $N \trianglerighteq \Omega(n, F_2, Q)$. $\forall a \in K(a=0$ 或 $1)$，记 $P_a = \{0 \neq u \in V \mid Q(u)=a\}$，则 $\Omega(n, F_2, Q)$ 传递地作用在集合 P_a 上（$a=0$ 或 1），可知 $u \in P(Y) \Longrightarrow P_{Q(u)} \subseteq P(Y)$. 若 $P(Y)$ 含有 u_0 使 $Q(u_0)=0$，$P(Y) \supseteq P_0$. 可取 u、$v \in P_0$ 使 $f(u, v)=1$，于是 $Q(u+v)=1$，且 $\rho_{u+v,1} = \rho_{v,1}\rho_{u,1}\rho_{v,1} \in Y$，从而 $u+v \in P(Y)$，$P_1 \subseteq P(Y)$. 但这意味着 $P(Y)$ 包含所有的非零向量，$Y = \mathrm{Sp}(n, F_2, f)$，这与假设矛盾. 这证明了 $P(Y)$ 与 P_0 的交是空集，$P(Y)=P_1$，$Y = \langle \rho_{u,1} \mid Q(u)=1\rangle = O(n, F_2, Q)$，(iii) 成立. ▮

我们知道，当 $L \subseteq L_1$ 时有 $\mathrm{U}'(V, h, L) \leq \mathrm{U}'(V, h, L_1)$，$L \subsetneqq L_1$ 的情形仅当 $\mathrm{char}K=2$ 时可能发生. 下面的引理说明，$\mathrm{U}'(V, h, L)$ 添加一个适当的酉平延可生成一个 $\mathrm{U}'(V, h, L_1)$.

引理 4.2.7 设 $\mathrm{char}\, K=2$，$N=\mathrm{U}'(n, K, h, L) \leq \mathrm{U}(n, K, f)$，$\rho_{u_0, c_0}: x \mapsto x + f(x, u_0)cu_0$ 是 $\mathrm{U}(n, K, f)$ 的酉平延，其中 $Q(u_0) \in L$，$c_0 \in K_J \setminus L$. 设 $X = \langle N, \rho_{u_0, c_0}\rangle$，则下列结论之一成立：

(i) $X = \mathrm{TU}(n, K, h, L_1)$，其中 $L_1 = \{s + ac_0\bar{a} \mid s \in L, a \in K\} \supsetneqq L$.

(ii) $n=2$，$X = \mathrm{TU}(2, E, h_E, L_1)$，其中 E 是 K 的子体，且包含 L 和 c_0，$L_1 = \{s + ac_0\bar{a} \mid s \in L, a \in E\}$，$\nu_L(h_E)=1$.

证明 集合 $S = \{a \in K_J \mid \rho_{u_0, a} \in X\}$ 是加法子群，且包含 L 及 c_0. 从而 $\mathrm{Tr}K \subseteq L \subsetneqq S \subseteq K_J$.

记 $E = \{\lambda \in K \mid \bar{\lambda} S \lambda \subseteq S\}$. 我们证明 E 是 K 的子体，且包含 L 与 c_0，满足条件 $\bar{E}=E$. 且当 $n \geq 3$ 或当 $L \nsubseteq Z(K)$ 时 $E=K$.

易见 E 对乘法封闭且包含 1. 对任意 λ_1、$\lambda_2 \in E$，$c \in S$，有

$$\overline{(\lambda_1+\lambda_2)}c(\lambda_1+\lambda_2) = \bar{\lambda}_1 c\lambda_1 + \bar{\lambda}_2 c\lambda_2 + \mathrm{Tr}(\bar{\lambda}_1 c\lambda_2) \in S.$$

这说明 E 对加法封闭. 从而 E 是 K 的子环.

记 $B = \{\lambda \in K^* \mid$ 存在 $g \in X$ 将 $u_0 \mapsto \bar{\lambda}u_0\}$，则 B 是 K^* 的子群. 我们证明 $B \subset E$. 对任意 $\lambda \in B$，$c \in S$，按 B 的定义有 $g \in X$

将 $u_0 \mapsto \lambda u_0$. 于是 $g^{-1}\rho_{u_0,c}g = \rho_{\lambda u_0,c} = \rho_{u_0,\bar{\lambda}c\lambda} \in X$, $\bar{\lambda}c\lambda \in S$. 这说明 $\bar{\lambda}S\lambda \subseteq S$, $\lambda \in E$. 可见 $B \subset E$.

对任意 $0 \neq s \in L$, N 可将 $u_0 \mapsto su_0$. 这说明 $L \subseteq E$. 对任意 $\lambda \in E$, 由 $\mathrm{Tr}\lambda = \lambda + \bar{\lambda} \in L$ 知 $\bar{\lambda} = \mathrm{Tr}\lambda + \lambda \in E$. 这证明了 $\bar{E} = E$. 由于假定 $1 \in L$, 对任意 $0 \neq \lambda \in E$, 有 $\overline{\lambda^{-1}}1\lambda^{-1} \in L \subseteq E$, 再由 $\bar{\lambda} \in E$ 及 E 对乘法的封闭性,得 $\lambda^{-1} = \bar{\lambda} \cdot \overline{\lambda^{-1}}1\lambda^{-1} \in E$. 这证明了 E 是体且包含 L.

如果 L 不含于 K 的中心,则由命题 1.7.8 知 L 生成的体等于 K,于是 $E = K$.

设 $n \geq 3$, 按引理 3.3.4 的证明,对任意 $x_0 \in u_0^{\perp}$ 且 $Q(x_0) \neq 0$, N 可将 $u_0 \mapsto Q(x_0)u_0$, 从而 $Q(x_0) \in B$. 且由于 V 是至少 3 维的非退化空间,从引理 3.3.4 的证明中还知道:所有的 $Q(x_0) \neq 0$ ($x_0 \in u_0^{\perp}$) 与 L 一起生成的体等于 K,于是 $E = K$.

设 $n = 2$. 取 L-奇异向量 $v_0 \in V$, 使 $(u_0, v_0) = 1$. 则 N 可将 $u_0 \mapsto v_0$, 从而将所有的 $\rho_{u_0,c} \in X$ 共轭到 $\rho_{v_0,c} \in X$. 对每个 $0 \neq c \in S$, $\rho_{v_0,c} \in X$ 可将 $u_0 \mapsto u_0 + cv_0$, 从而将 $\rho_{u_0,1} \in X$ 共轭到 $\rho_{u_0+cv_0,1} \in X$. 于是 $g = \rho_{v_0,c}\rho_{c^{-1}u_0,1}\rho_{u_0+cv_0,1} \in X$, 它将 $u_0 \mapsto c^{-1}u_0$, $c^{-1} \in B$, 从而 $c \in B \leq E^*$. 这证明了 E 包含 S,当然就包含 L 与 c_0.

当 $n \geq 3$ 时, $E = K$, $\mathrm{TU}(n, K, h, S)$ 有定义. 我们证明 $X = \mathrm{TU}(n, K, h, S)$ 且 $S = L_1$. 对任意 L-奇异向量 $0 \neq u \in V$, 有 $g \in N$ 将 $u_0 \mapsto \lambda u$, 对某个 $\lambda \in K^*$. 于是对任意 $c \in S$ 有 $g^{-1}\rho_{u_0,c}g = \rho_{\lambda u,c} = \rho_{u,\bar{\lambda}c\lambda} \in X$, 当 c 取遍 S 时, $\bar{\lambda}c\lambda$ 也取遍 S. 对任意 S-奇异向量 w, 当 $Q(w) \notin L$ 时,可写 $w = u + bv$ 使 $Q(u)$, $Q(v) \in L$, $(u, v) = 1$, 且 $b \in S \backslash L$. 对任意 $c \in S$, $\rho_{v,b} \in X$ 将 $u \mapsto u + bv = w$, 从而将 $\rho_{u,c} \in X$ 共轭到 $\rho_{w,c} \in X$. 这证明了 $\rho_{w,c} \in X$ 对所有的 $Q(w)$, $c \in S$ 成立. 所有这些 $\rho_{w,c}$ 生成 $\mathrm{TU}(n, K, h, S) \leq X$. 另一方面, $X = \langle N, \rho_{u_0,c_0} \rangle \leq \mathrm{TU}(n, K, h, L_1) \leq \mathrm{TU}(n, K, h, S)$. 这证明了 $X = \mathrm{TU}(n, K, h, L_1) = \mathrm{TU}(n, K, h, S)$, $S = L_1$.

设 $n=2$. 我们知道 E 是 K 中包含 L 及 c_0 的子体,且当 $L\nsubseteq Z(K)$ 时 $E=K$. 取 L-奇异向量 $v_0\in V$,使 $(u_0, v_0)=1$,记 $V_E=E_{u_0}\oplus E_{v_0}$ 是 u_0、v_0 张成的 2 维 E-空间,h_E 是 h 在 V_E 上的限制. 则所有的 $\rho_{u_0,c}$, $\rho_{v_0,c}(c\in S)$ 生成 V_E 上的 $\mathrm{TU}(2, E, h_1, S)\leq X$. 仍由 $X\leq \mathrm{TU}(2, E, h_E, L_1)\leq \mathrm{TU}(2, E, h_E, S)$ 知, $X=\mathrm{TU}(2, E, h_E, S)$ 且 $S=L_1$. ▌

§ 4.3　TU(n, K, h, L)的扩群

本节证明定理 4.1.1,即定出

$$N=\mathrm{TU}(n, K, h, L)\leq \mathrm{TU}(n, K, f)$$

在 $\mathrm{GL}(n, K)$中的全部扩群,其中 $f=h+\rho\bar{h}$ 非退化, $L\neq 0$. 且不妨设 $\rho=-1$ 及 $1\in L$. 我们将把 $f(x, y)$简记为(x, y).

当 $n\geq 3$ 时,不妨用极大的 $N_1=\mathrm{TU}(n, K, h, L_1)\leq X$ $(L_1\supseteq L)$ 代替 N,当 $n=2$ 时可记 $N=\mathrm{TU}(2, E_0, h, L)$, 其中 E_0 是 L 在 K 中生成的子体,此时不妨用极大的 $N_1=\mathrm{TU}(2, E, h, L_1)(K\supseteq E\supseteq E_0, L_1\supseteq L)$ 代替 N. 经过这样的代替之后,化成这样的情形:不存在 $N\leq \mathrm{TU}(n, E, h, L_1)\leq X$ 使 $L_1\supsetneqq L$. 我们证明:在这样的假设下必有:(i) $X\trianglerighteq N$; 或(ii) $X\trianglerighteq \mathrm{SL}(n, K)$. 当 $L=K$ 即 $N=\mathrm{Sp}(n, K, f)$ 时,由定理 3.2.1 即得所需结论. 以下设 $L\neq K$, 从而 $\mathrm{TU}(n, K, h, L)=\mathrm{TU}(n, K, Q, L)$, 对 $Q(x)=h(x, x)$. 特别, $K\neq F_2$.

由于V 上已定义了一个非退化内积 f,每个线性函数 $\varphi\in V^*$ 对应于一个 $v\in V$,使 $x\varphi=f(x, v)$, $\forall x\in V$. 从而平延 $\tau_{u,\varphi}$ 具有形式 $\tau_{u,v}: x\mapsto x+(x, v)u$, 其中 $(u, v)=0$. 特别,酉平延 $\rho_{u,s}=\tau_{su,u}$. 而对 $g\in \mathrm{GL}(V)$ 有 $g^{-1}\tau_{u,v}g=\tau_{ug,vg^*}$, $g^*\in \mathrm{GL}(V)$ 由 $f(xg^{-1}, y)=f(x, yg^*)(\forall x, y\in V)$ 决定. 特别,当 $g\in \mathrm{U}(n, K, f)$ 时,有 $g^*=g$. 而 $(\tau_{u,v})^*=\tau_{v,u}$. $\mathrm{SL}(n, K)$ 的根子群具有形式 $T_{u,w}=\{\tau_{au,w}|a\in K\}$, 其中 u、w 是非零向量,且

$f(u, w) = 0$.

如果 X 将 L-奇异线互变，则由引理 4.2.2 知 $X \leq GU(V, h, L)$，$N \trianglelefteq X$，定理成立. 若不然，则有 $g_1 \in X$ 将某个 L-奇异向量 u_0 送到 $x_1 = u_0 g_1$，使 $Q(x_1) \notin L$，X 包含 $\rho_{u_0, s} = \tau_{su_0, u_0} (s \in L)$ 在 g_1 下的共轭 $g_1^{-1} \tau_{su_0, u_0} g_1 = \tau_{sx_1, y_1}$，其中 $y_1 = u_0 g_1^*$，且 $(x_1, y_1) = (u_0 g_1, u_0 g_1^*) = (u_0, u_0) = 0$.

情形 1　对所有使 $x_1 = u_0 g_1$ 非奇异的 $g_1 \in X$ 和奇异向量 u_0，$y_1 = u_0 g_1^*$ 与 x_1 都共线.

在此情形下，由 $(x_1, y_1) = 0$ 还可知 x_1 迷向. 我们证明这将导致 $X \geq TU(n, E, h, L_1)$ 对某个 $L_1 \supsetneqq L$ 成立，这与 L 的极大性相违背. 说明情形 1 实际上不可能发生.

由 y_1、x_1 相互正交且共线，知 x_1 迷向，$Q(x_1) \in K_J \backslash L$，但是 $Q(x_1) \notin L$，可见 $K_J \neq L \neq 0$. 这只有在 char $K = 2$ 时才有可能. 当 K 是域时，它只能是特征 2 的非完全域. 总之，K 是无限体，并且 L 是无限集合(见命题 1.7.7). 我们证明：可选 $g_1 \in U(n, K, f)$，从而 $g_1^{-1} \rho_{u_0, s} g_1 = \rho_{x_1, s} \in X$ 对所有的 $s \in L$ 成立.

由 y_1、x_1 共线可记 $y_1 = a x_1$，$a \in K^*$，则 X 包含 $\tau_{sx_1, y_1} = \tau_{\bar{a}sx_1, x_1}$，$\forall s \in L$. 取奇异向量 u_1 使 $f(u_1, x_1) = 1$，则 $\tilde{g}_1 = \tau_{\bar{a}sx_1, x_1} \in X$ 将 u_1 变到 $\tilde{x}_1 = u_1 + \bar{a}sx_1$，如果有某个 $s \in L$ 使 $\bar{a}s \notin K_J$，则相应的 $\tilde{x}_1$ 非迷向，这与情形 1 的假设相违背. 故对所有的 $s \in L$ 都有 $\bar{a}s \in K_J$，$\bar{a}s = \overline{\bar{a}s} = sa$，$\tau_{\bar{a}sx_1, x_1} = \rho_{x_1, sa} \in U(n, K, f) \cap X$，$\tilde{x}_1 = u_1 \rho_{x_1, sa} = u_1 + sax_1$. 由于 x_1 非奇异，我们证明必可选 $s \in L$ 使 $\tilde{x}_1$ 非奇异. 若不然，对所有的 $0 \neq s \in L$ 都有 $Q(\tilde{x}_1) \equiv sa + saQ(x_1)sa \equiv 0 \pmod{L}$，从而 $(sa)^{-1} Q(\tilde{x}_1)(sa)^{-1} \equiv (sa)^{-1} + Q(x_1) \equiv 0 \pmod{L}$，$(sa)^{-1} \equiv Q(x_1) \not\equiv 0 \pmod{L}$. 但 L 是无限集合，总可取两个相异的非零的 s_1、$s_2 \in L$，并取 $s_3 = (s_1^{-1} + s_2^{-1})^{-1}$，得 $(s_3 a)^{-1} = ((s_1 a)^{-1} + Q(x_1)) + ((s_2 a)^{-1} + Q(x_1)) \equiv 0 \pmod{L}$，引出矛盾. 这证明了，总可选 $s_0 \in L$，使 $\tilde{x}_1 = u_1 + s_0 a x_1 = u_1 \rho_{x_1, s_0 a}$ 非奇异. 用 u_1、$\rho_{x_1, s_0 a}$ 分别代替 u_0、g_1，

即化为 $g_1 \in \mathrm{U}(n, K, f)$ 的情形,从而 $\rho_{x_1, s} \in X$ 对所有的 $s \in L$ 成立.

下面证明 X 含有一个 $\rho_{u,c}$,其中 $u \neq 0$ 奇异,但 $c \notin L$. 记 $x_1 = u_1 + cv_1$, 使 u_1、v_1 奇异并且满足 $f(u_1, v_1) = 1$, $c \equiv Q(x_1) \not\equiv 0 (\bmod\ L)$, 但 $c \in K_J$. 对任一 $0 \neq s \in L$, X 包含 $\rho_{u_1, s}^{-1}\rho_{u_1+cv_1, s} = \rho_{u_1, s}^{-1}\rho_{v_1, c}^{-1}\rho_{u_1, s}\rho_{v_1, c} = \rho_{v_1+su_1, c}\rho_{v_1, c}$, 再用 $\rho_{v_1, s^{-1}} \in N$ 作共轭可知 $\rho_{su_1, c}\rho_{v_1, c} \in X$. 取两个不同的非零 s_1、$s_2 \in L$, 则得 $(\rho_{s_1u_1, c}\rho_{v_1, c})(\rho_{s_2u_1, c}\rho_{v_1, c})^{-1} = \rho_{u_1, c_1} \in X$, 其中 $c_1 = s_1cs_1 + s_2cs_2 = (s_1 + s_2)c(s_1 + s_2) + \mathrm{Tr}(s_1cs_2)$, 由 $c \equiv Q(x_1) \not\equiv 0 (\bmod\ L)$ 知 $c_1 \not\equiv 0 (\bmod\ L)$. 这证明了 X 含有 $\rho_{u,c}$,使 $Q(u) \in L$ 但 $c \notin L$, 由引理 4.2.7 知 X 的子群 $N_1 = \langle N, \rho_{u,c} \rangle$ 等于 TU(n, K, h, L_1) 或 TU(2, E, h_E, L_1) (当 $n = 2$, 对 K 的某个子体 $E \supset L$) 使 $L_1 \supsetneqq L$, 这与 L 的极大性相矛盾. 这证明了情况 1 不会出现.

情形 2 $n \geq 3$, 且可选 g_1、u_0 使 y_1 与 x_1 不共线.

在此情形下,N 含有元素 g_0 将一维子空间 $\langle x_1 \rangle$ 定驻不动,而将 y_1 移动到 $y_2 \notin \langle y_1 \rangle$, X 包含 $g_0^{-1}\tau_{x_1, y_1}g_0 = \tau_{cx_1, y_2}$, 其中 $cx_1 = x_1g_0$, 从而 X 包含 $g_1\tau_{cx_1, y_2}g_1^{-1} = \tau_{cu_0, y}$. 由 y_1、y_2 不共线知它们在 $(g_0^{-1})^*$ 下的象 u_0、y 也不共线. 于是可取 $w \in u_0^{\perp} \backslash y^{\perp}$, 且可选 $(y, w) = 1$. 对每个 $a \in K$, N 含有元素

$$t_{au_0, w}: x \mapsto x + (x, w)au_0 + (x, au_0)(w + Q(w)u_0),$$

它固定 u_0 且将 y 变到 $y + au_0$. 于是 X 包含

$$\tau_{cu_0, y}^{-1}t_{au_0, w}^{-1}\tau_{cu_0, y}t_{au_0, w} = \tau_{cu_0, au_0} = \tau_{\theta u_0, u_0},$$

其中 $\theta = \bar{a}c (a \in K)$ 跑遍 K. X 含有 SL(n, K) 的根子群 $T_{u_0, u_0} = \{\tau_{\theta u_0, u_0} | \theta \in K\}$ 及其在任意 $g \in N$ 下的共轭 $g^{-1}T_{u_0, u_0}g = T_{u, u}$, 其中 $u = u_0g$, $\langle u \rangle$ 取遍所有的奇异线. 对 V 的任意非平凡子空间 W,都存在奇异向量 $u \notin W$ 且 $u \notin W^{\perp}$, 从而 $T_{u,u} < X$ 不定驻 W. 这说明 X 所含的 SL(n, K) 的根子群生成的正规子群 X_0 在 V 上

不可约. 由定理 3.2.1 知 $X_0 = \mathrm{SL}(n, K)$ 或 $\mathrm{Sp}(n, K, f_1)$，对某个 f_1. 但 X_0 同时包含 $g_1^{-1}T_{u_0, u_0}g_1 = T_{x_1, y_1}$ 和 $g_0^{-1}T_{x_1, y_1}g_0 = T_{x_1, y_2}$，其中 y_1、y_2 不共线，故 X_0 不可能等于 $\mathrm{Sp}(n, K, f_1)$，从而只能 $X \trianglerighteq X_0 = \mathrm{SL}(n, K)$.

情形 3 $n = 2$，*且可选* g_1、u_0 *使* y_1 *与* x_1 *不共线.*

这一情况下的证明在文献[48]中可以找到. 下面只叙述主要的思路，而省去了一些比较困难的推证过程.

x_1、y_1 不共线且相互正交，组成二维空间 V 的正交基. 由 f 非退化知 x_1、y_1 非迷向. 特别，此时 f 不能是交错内积，必有 $J \neq 1$.

如果 K 是域，$N = \mathrm{SU}(2, K, f)$，$\mathrm{Tr}K = L = K_J$. 记 $\Lambda = \{\lambda \in K^* \mid \lambda\bar{\lambda} = 1\}$，则每个 $\lambda \in \Lambda$ 决定一个元素 $g(\lambda) \in N$ 将 $x_1 \mapsto \lambda x_1$，$y_1 \mapsto \lambda^{-1}y_1 = \bar{\lambda}y_1$. 对每个 $s \in K_J$，有 $\tau_{sx_1, y_1} = g_1^{-1}\tau_{su_0, u_0}g_1 \in X$，从而

$$g(\lambda)^{-1}\tau_{sx_1, y_1}g(\lambda) = \tau_{s\lambda x_1, \bar{\lambda}y_1} = \tau_{s\lambda^2 x_1, y_1} \in X.$$

注意，$\lambda^2 \in K_J$ 仅当 $\lambda^4 = \lambda^2\overline{\lambda^2} = 1$ 时才有可能，即 $\lambda^2 = \pm 1$. 对 $K = F_9$ 的情况，在文献[5]中已经定出了 $G = \mathrm{GL}(2, 9)$ 的全部子群，$N = \mathrm{SU}(2, 3^2) = \mathrm{SL}(2, 3)$ 在 $\mathrm{GL}(2, 9)$的所有的子群如定理 4.1.1 中(i)、(ii)、(vi)所列. 当 $K \neq F_9$ 时，总可选 $\lambda \in \Lambda$ 使 $\lambda^2 \notin K_J$，从而 $K = K_J \oplus K_J\lambda^2$. 此时每个 $c \in K$ 可写成 $c = a + b\lambda^2$ 的形式，其中 a、$b \in K_J$. 于是 $\tau_{cx_1, y_1} = \tau_{ax_1, y_1}\tau_{b\lambda^2 x_1, y_1} \in X$. 进而还有 $\tau_{au_0, u_0} = g_1\tau_{ax_1, y_1}g_1^{-1} \in X$，$X$ 包含 $\mathrm{SL}(2, K)$ 的两个根子群 $\{\tau_{ax_1, y_1} \mid a \in K\}$和 $\{\tau_{au_0, u_0} \mid a \in K\}$，且 x_1 与 u_0 不共线. 这两个根子群足以生成 $\mathrm{SL}(2, K) \leq X$.

以下设 K 是非交换体. 可选奇异向量 u_1、$v_1 \in V$ 使 $(u_1, v_1) = 1$，且 $y_1 = u_1 + \bar{\delta}v_1$，其中 $\delta \equiv Q(y_1) \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ K_J)$. x_1 含于 $y_1^{\perp} = \langle u_1 + \delta v_1 \rangle$，故 $x_1 = a_1(u_1 + \delta v_1)$ 对某个 $a_1 \in K^*$ 成立. 这与 K 是域的情形类似. 我们希望在 N 中选适当的拟对称之积

$g_0=S_{x_1,\lambda_1}S_{y_1,\lambda_2}$将$\tau_{sx_1,y_1}\in X(s\in L)$共轭到$\tau_{s\lambda_1x_1,\lambda_2y_1}=\tau_{\overline{\lambda_2}s\lambda_1x_1,y_1}\in X$，并希望所有这样的$\overline{\lambda_2}s\lambda_1$生成的加群等于$K$，这样就可以在$X$中找到SL(2, K)的两个根子群生成SL(2, K)，具体说来，我们对每个$b\in L$取群元素

$$g(\lambda)=\rho_{v_1,-b-(\delta+\overline{\delta})}\rho_{u_1,-(\delta+b)^{-1}-\overline{(\delta+b)^{-1}}}\rho_{v_1,-b}\in N,$$

它将$x_1\mapsto -a_1\lambda a_1^{-1}x_1$，$y_1\mapsto -\lambda^{-1}y_1$，其中$\lambda=\overline{(\delta+b)}(\delta+b)^{-1}$可以取遍$K^*$的乘法子群

$$\Lambda=\{\lambda\in K^*\,|\,\lambda\delta\overline{\lambda}\equiv\delta(\bmod L)\}.$$

$g(\lambda)$确实是两个拟对称S_{x_1,λ_1}、S_{y_1,λ_2}之积，其中$\lambda_2=-\lambda^{-1}$，而$\lambda_1=-a_1\lambda a_1^{-1}$. $g(\lambda)\in N$将平延$\tau_{sx_1,y_1}\in X(s\in L)$共轭到$\tau_{\alpha x_1,y_1}\in X$，其中$\alpha=\overline{\lambda^{-1}}sa_1\lambda a_1^{-1}=c\theta$，$c=\overline{\lambda^{-1}}s\lambda^{-1}$取遍$L$，而$\theta=\lambda a_1\lambda a_1^{-1}$.

进一步，有$g_1\tau_{c\theta x_1,y_1}g_1^{-1}=\tau_{c\theta u_0,u_0}\in X$.

以下的证明分两步：

第一步：证明总可选取$c\in L$和$\theta=\lambda a_1\lambda a_1^{-1}(\lambda\in\Lambda)$，使$c\theta$为非对称元.

第二步：证明集合$E=\{b\in K\,|\,\tau_{bu_0,u_0}\in X\}$等于$K$，从而$X$含有SL(2, K)的根子群，$X\geq$ SL(2, K).

实现这两个步骤的具体过程比较长，这里从略. 请参看文献[48].

§ 4.4 Ω(n, K, Q)的扩群

本节对$L=0$即$N=\Omega(n,K,Q)(n\geq 3)$的情形证明定理4.1.1. 定出N在$G=\mathrm{GL}(n,K)$中的扩群X.

$N=\Omega(n,K,Q)$由根元素

$$t_{u,w}:x\mapsto x+f(x,w)u-f(x,u)(w+Q(w)u)$$

生成,其中 $Q(u)=0=f(u, w)$, $\dim\langle u, w\rangle=2$. 每个短根元素 $t_{u,w}$ 可写为两个平延之积 $\tau_{u, w-Q(w)u}\tau_{w,-u}$.

如果 X 将奇异向量互变,则 $X \trianglerighteq N$. 若不然,则有 $g_1\in X$ 将某个奇异向量 u_0 变到非奇异向量 x_1.

情形 1　char $K\neq 2$.

取非奇异向量 $w\in u_0^{\perp}$, $\delta=Q(w)\neq 0$. 对任意 $s\in K^*$, N 包含短根元素 $t_{u_0, sw}=\tau_{u_0, sw-s^2\delta u_0}\tau_{w,-su_0}$, X 包含 $g(s)=g_1^{-1}t_{u_0, sw}g_1=\tau_{x_1, sy_1-s^2\delta y_2}\tau_{x_2,-sy_2}$. 其中 $x_1=u_0g_1$, $x_2=wg_1$, $y_1=wg_1^*$, $y_2=u_0g_1^*$, 满足 $Q(x_1)\neq 0$, $f(x_1, y_1)=f(x_1, y_2)=f(x_2, y_2)=0$, $f(x_2, y_1)=f(w, w)=2\delta$. 由于 $t_{u_0, w}=t_{u_0, w+au_0}$ 对所有 $a\in K$ 成立,我们可用适当的 $w+au_0$ 代替 w,从而用 x_2+ax_1 代替 x_2, 化成 $f(x_2, x_1)=0$ 的情形. 于是有 $x_1\in\langle x_2, y_1, y_2\rangle^{\perp}$. 由 $0\neq x_2\in y_2^{\perp}\backslash y_1^{\perp}$ 知 $\dim\langle y_1, y_2\rangle=2$, 可再取 $x_3\in x_1, y_1\rangle^{\perp}$, 使 $(x_3, y_2)=-1$, 并取 $\langle x_1, y_1, y_2\rangle^{\perp}$ 的一组基 $\{x_4, \cdots, x_n\}$, 则 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 组成 V 的一组基. 在这组基下将 G 写成矩阵群,则

$$T(s)=\tau_{x-1, sy_1-s^2\delta y_2}\tau_{x_2,-sy_2}\in X$$

的矩阵具有形式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & O \\ 2s\delta & 1 & 0 & O \\ s^2\delta & s & 1 & O \\ O & O & O & I \end{pmatrix}.$$

如果能在 X 中找到形如

$$\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & O \\ a & -1 & 0 & O \\ * & 0 & -1 & O \\ \vdots & O & O & I \end{pmatrix}.$$

的元素,则对任意 $s\in K$, X 包含

$$T_1(s) = T(s)^{-1}\Lambda^{-1}T(s)\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & O \\ -4s\delta & 1 & 0 & O \\ 2s^2\delta - sa & 0 & 1 & O \\ O & O & O & I \end{pmatrix},$$

从而包含

$$T_0(s) = T_1(s)^{-1}T_1(-s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & O \\ 8s\delta & 1 & 0 & O \\ 2sa & 0 & 1 & O \\ O & O & O & I \end{pmatrix}.$$

$\{T_0(s) \mid s \in K\}$ 是 $\mathrm{SL}(n, K)$ 的一个根子群. 由引理 4.2.6 即得 $X \geq \mathrm{SL}(n, K)$.

剩下的事情是在 X 中找出上述的 Λ 来. 为此,考虑非迷向线 $\langle x_1 \rangle$在 X 中的稳定子群 $X_{\langle x_1 \rangle}$,并定义映射

$$\varphi : X_{\langle x_1 \rangle} \to \mathrm{GL}(n-1, K),$$

使 $\varphi(g)$为从矩阵 $g \in X_{\langle x_1 \rangle}$ 中删去第一行和第一列所得到的子矩阵. 则 φ是群同态. X 中定驻向量 x_1(即第一行为$(1, 0, \cdots, 0)$)的全体元素组成 $X_{\langle x_1 \rangle}$的一个正规子群 X_{x_1}. 如能证明 X_{x_1}在 φ下的象 $\varphi(X_{x_1})$包含 $\Lambda_1 = \mathrm{diag}(-1, -1, I)$, 则 Λ_1 在 X 中的任一原象就是所需的 Λ. 我们有

$$\varphi(X_{\langle x_1 \rangle}) \geq X_1 = \langle \varphi(N_{x_1}), \varphi(T(s)) \mid s \in K \rangle.$$

其中 $\varphi(N_{x_1})$就是作用在 $x_1^{\perp}$ 上的 $\Omega(n-1, K, Q|_{x_1^{\perp}})$. 而 $\varphi(T(s))(s \in K)$ 组成 $\mathrm{SL}(n-1, K)$ 的一个根子群. 当 $n \geq 4$ 时, 由引理 4.2.6 知 $X_1 = \mathrm{SL}(n-1, K)$, 当然 X_1 包含 $\mathrm{diag}(-1, -1, I)$. 当 $n = 3$ 时,在绝大多数情形下,存在 $z \in N_{\langle x_1 \rangle}$ 不定驻 $\langle x_2 \rangle$,从而 $z_1 = \varphi(z)$ 的共轭作用将 $\varphi(X_{x_1})$所含的 $\mathrm{SL}(2, K)$的根子群 $T = \{\varphi(T(s)) \mid s \in K\}$ 变到另一个根子群 $\widetilde{T} = z_1^{-1}Tz_1 \neq T$, $\varphi(X_{x_1}) \geq \langle T, \widetilde{T} \rangle = \mathrm{SL}(2, K)$ 仍包含所需的 $\mathrm{diag}(-1, -1)$.

于是只剩下 $n=3$ 且上述 z 不存在的情形,即 $N_{\langle x_1\rangle}\leq N_{\langle x_2\rangle}$ 的情形. 这只有在 $|K|\leq 5$ 且 $Q(x_2)\neq 0$ 时才有可能. 此时 $x_1^{\perp}=\langle x_2\rangle\perp\langle y_2\rangle$ 且 $Q(y_2)\neq 0$. 当 $Q(x_2)Q(y_2)\in K^{*2}$ 时,已有 $\Lambda=\operatorname{diag}(1,-1,-1)\in N_{x_1}<X_{x_1}$. 剩下的情况, $Q(x_2)Q(y_2)\notin K^{*2}$, 且 $N_{\langle x_1\rangle}\leq N_{\langle x_2\rangle}$. 此时必有 $N=\Omega(3,F_3,Q)$ 及 $Q(x_2)=-Q(y_2)$, $\nu(x_1^{\perp})=1$. 如果 $Q(x_1)=-Q(x_2)$, $\tilde{u}=-2\delta x_1+x_2$ 是奇异向量,且被 $T(1)\in X$ 变到非奇异向量 x_2,而 $\nu(x_2^{\perp})=0$. 因此可用 $x_2=\tilde{u}T(1)$ 代替 $x_1=ug_1$,化成已解决的情形 $\nu(x_1^{\perp})=0$. 当 $Q(x_1)=Q(x_2)$ 时,可取 $g_0\in N$ 将 $x_1=ug_1$ 变到 x_2,再用 $T(1)\in X$ 将 x_2 变到 $\tilde{x}_1=2\delta x_1+x_2$, $Q(\tilde{x}_1)=-Q(x_1)$, 从而 $\nu(\tilde{x}_1)=0$. $\tilde{x}_1$ 是奇异向量 u 在 $g_1g_0T(1)\in X$ 下的象,可用来代替 x_1,化成已解决的情形 $\nu(x_1^{\perp})=0$. 这就在所有的情形下都证明了所需的 Λ 的存在性,从而完成了 $\operatorname{char}K\neq 2$ 情形下对定理 4.1.1 的证明.

情形 2　$\operatorname{char}K=2$.

$N=\Omega^{\pm}(4,2)<G=\mathrm{SL}(4,2)$ 的情形可通过同构 $\mathrm{SL}(4,2)\to A_8$ 来解决. 故以下可排除 $N=\Omega^{\pm}(4,2)$ 的情形.

假如有某个 $\Omega(n,K,Q,L)\leq X$, $L\neq 0$, 则 X 已在§4.3 中被定出. 故设 $\Omega(n,K,Q,L)\not\leq X$ 对任意 $L\neq 0$ 成立.

如果 $X\trianglerighteq N$, 则定理 4.1.1 已成立. 故设 X 不正规化 $N=\Omega(n,K,Q)$, 即 $X\not\leq \mathrm{GO}(n,K,Q)$, 存在 $g_0\in X\backslash\mathrm{GO}(n,K,Q)$. 我们由此推出 $X\geq\langle N,g_0^{-1}Ng_0\rangle\geq\Omega(n,K,Q,L_1)$, 对某个 $L_1\neq 0$, 得到与原假设矛盾,从而完成定理的证明. 由引理 4.2.7知,这只须在 X 中找到 $\mathrm{Sp}(n,K,f)$ 的一个辛平延 $\rho_{u,c}$,使 $Q(u)=0\neq c$ 即可.

先设 $X\leq\mathrm{GSp}(n,K,f)$. 并记 $X_0=X\cap\mathrm{Sp}(n,K,f)$, $N=\Omega(n,K,Q)$ 的根元素

$$t_{u,w}: x\mapsto x+f(x,w)u+f(x,u)(w+Q(w)u)$$

可写成 $t_{u,w}=\eta_{u,w}\rho_{u,Q(w)}$ 的形式,其中 $\eta_{u,w}: x\mapsto x+f(x,w)u+$

$f(x, u)w$ 和 $\rho_{u,Q(w)}: x \mapsto x + f(x, u)Q(w)u$ 是 $\mathrm{Sp}(n, K, f)$ 的元素. 当 $Q(w) = \Delta \neq 0$ 时, $\rho_{w,\Delta^{-1}} \in O(n, K, Q)$. 而当 $Q(w_1) = Q(w_2) = \Delta \neq 0$ 时, $\rho_{w_1,\Delta^{-1}}\rho_{w_2,\Delta^{-1}} \in \Omega(n, K, Q)$. 如果能够找到一个 $g_1 \in X_0$ 固定某个奇异向量 $u_1 \neq 0$, 而将某个 $w_1 \in u_1^{\perp}$ 变到 $w_1 g_1$, 使 $Q(w_1 g_1) \neq Q(w_1)$, 则 g_1 将 $t_{u_1,w_1} = \eta_{u_1,w_1}\rho_{u_1,Q(w_1)} \in N$ 共轭到 $g_1^{-1}t_{u_1,w_1}g_1 = \eta_{u_1,w_1g_1}\rho_{u_1,Q(w_1)} \in X$, 从而 $t_{u_1,w_1g_1}^{-1}g_1^{-1}t_{u_1,w_1}g_1 = \rho_{u_1,c} \in X$, 其中 $c = Q(w_1g_1) + Q(w_1) \neq 0$. 用引理 4.2.7 即可得 $X \geq \Omega(n, K, Q, L_1)$, $L_1 = K^2c \neq 0$, 恰如所需. 故以下只须证明上述的 g_1 存在即可.

取 $\tilde{g} \in X \backslash \mathrm{GO}(n, k, Q)$, 则 $\tilde{g}^{-1}N\tilde{g} \neq N$. 再取 $g_0 \in (\tilde{g}^{-1}N\tilde{g})\backslash N$, 则 $g_0 \in X_0 \backslash \mathrm{GO}(n, K, Q)$. 由引理 4.2.2 知 $\mathrm{GO}(n, K, Q)$ 是奇异线集合在 $\mathrm{GL}(n, K)$ 中的稳定子群. 故 $g_0 \notin \mathrm{GO}(n, K, Q)$ 将某个奇异向量 u_0 送到非奇异向量 $x_0 = u_0g_0$. 取 $w_0 \in u_0^{\perp}\backslash\langle u_0\rangle$, 并记 $y_0 = w_0g_0$. 则 g_0 将 $t_{u_0,w_0} = \eta_{u_0,w_0}\rho_{u_0,Q(w_0)} \in N$ 共轭到 $T_0 = g_0^{-1}t_{u_0,w_0}g_0 = \eta_{x_0,y_0}\rho_{x_0,Q(w_0)} \in X$. 取奇异向量 v_1 使 $f(v_1, x_0) = 1$, 并记 $a = f(v_1, y_0)$. 则 $y_0 + ax_0 \in v_1^{\perp}$. 由于 $t_{u_0,w_0} = t_{u_0,w_0+au_0}$, 可用 $w_0 + au_0$ 代替 w_0, 从而用 $y_0 + ax_0$ 代替 y_0, 化为 $y_0 \in v_1^{\perp}$ 的情形. 若 $Q(y_0) = 0$, 取奇异向量 $y_1 \in \langle v_1, x_0\rangle^{\perp}$ 使 $f(y_1, y_0) = 1$. 注意, $T_0 \in X_0$ 固定 y_0, 且 $v_1 \in y_0^{\perp}\backslash\langle y_0\rangle$. 若 $Q(v_1T_0) \neq 0 = Q(v_1)$, 则 $g_1 = T_0$ 恰如所需. 否则, $Q(v_1T_0) = 0$, 有 $z_1 \in N$ 将 $v_1T_0 \mapsto v_1$, $T_0z_1 \in X_0$ 固定奇异向量 v_1 且将 $y_1 \in v_1^{\perp}$ 送到 $y_1T_0z_1$, 使 $Q(y_1T_0z_1) = Q(y_1T_0) = Q(y_1 + x_0) = Q(x_0) \neq 0 = Q(y_1)$, $g_1 = T_0z_1$ 恰如所需. 剩下的情形是 $\Delta = Q(y_0) \neq 0$. 记 $x_1 = v_1T_0 = v_1 + Q(w_0)x_0 + y_0$, 则 $f(x_1, x_0) = f(v_1, x_0) = 1$, $f(x_1, y_0) = 0$. $\langle x_1, x_0\rangle^{\perp}$ 是非退化子空间, 且包含 y_0, 因此含有向量 y_2 使 $Q(y_2) = Q(y_0) = \Delta$ 且 $f(y_2, y_0) = b \neq 0$. 取 $T_1 = \rho_{y_0,\Delta^{-1}}\rho_{y_2,\Delta^{-1}} \in N$, 则 T_1 固定 $x_1 = v_1T_0$, 从而 $\tilde{g}_1 = T_0T_1T_0^{-1} \in X_0$ 固定奇异向量 v_1. 并且 $\tilde{g}_1$ 将 $y_0 \in v_1^{\perp}$ 送到 $y_0\tilde{g}_1 = y_0 + b\Delta^{-1}y_2 + b^2\Delta^{-1}x_0$, 使

$$\begin{aligned}Q(y_0\tilde{g}_1) &= Q(y_0 + b\Delta^{-1}y_2) + Q(b^2\Delta^{-1}x_0)\\ &= (Q(y_0) + b^2\Delta^{-1} + b^2\Delta^{-2}\Delta) + b^4\Delta^{-2}Q(x_0)\\ &= Q(y_0) + b^4\Delta^{-2}Q(x_0) \neq Q(y_0).\end{aligned}$$

$g_1 = \tilde{g}_1$ 恰如所需.

以下设 $X \not\leq \mathrm{GSp}(n, K, f)$. 我们证明此时 $X \geq \mathrm{SL}(n, K)$ 从而 $X \trianglerighteq \mathrm{SL}(n, K)$.

我们有 $n \geq 4$. 取 $g_1 \in X\backslash\mathrm{GSp}(n, K, f)$. 则由引理 4.2.1 (2)知,存在奇异向量 u,使 $u^{\perp} g_1 \neq (ug_1)^{\perp}$. 从而可选 $w \in u^{\perp}$ 使 $wg_1 \notin (ug_1)^{\perp}$, 即 $f(u, w) = 0 \neq f(ug_1, wg_1)$. 注意到 $u^{\perp}$可由非奇异向量张成,我们还可选上述的 w 非奇异. 记 $x_1 = ug_1$, $x_2 = wg_1$, 则 $f(x_1, x_2) \neq 0$, 且可用 $f(x_1, x_2)^{-1}w$ 代替 w,从而用 $f(x_1, x_2)^{-1}x_2$ 代替 x_2,化为 $f(x_1, x_2) = 1$ 的情形. N 包含短根元素 $t_{u, sw} = \tau_{u, sw+s^2\delta u}\tau_{w, su}$, $\forall s \in K^*$, 其中 $\delta = Q(w) \neq 0$. X 包含

$$T(s) = g_1^{-1}t_{u, sw}g_1 = \tau_{x_1, sy_1+s^2\delta y_2}\tau_{x_2, sy_2},$$

其中 $y_1 = wg_1^*$, $y_2 = ug_1^*$, $\dim\langle y_1, y_2\rangle = \dim\langle w, u\rangle = 2$. 且由 $\langle w, u\rangle \subseteq \langle w, u\rangle^{\perp}$ 知 $\langle y_1, y_2\rangle \subseteq \langle x_1, x_2\rangle^{\perp}$. 由 $f(x_1, x_2) = 1 \neq 0$ 知$\langle x_1, x_2\rangle$非退化, $\langle x_1, x_2\rangle \cap \langle y_1, y_2\rangle = 0$.

先设 $n \geq 6$, 从而 $\dim\langle x_1, x_2\rangle^{\perp} \geq 4$. 由 y_1 与 y_2 不共线知,存在 $g_0 \in 1_{\langle x_1, x_2\rangle} \times \Omega(\langle x_1, x_2\rangle^{\perp}) < N$ 定驻 y_2(当然也定驻 x_1、x_2),且将 $y_1 \mapsto y_1g_0 \neq y_1$. X 包含

$$g_0^{-1}T(s)g_0T(s)^{-1} = \tau_{x_1, sy_0}, \forall s \in K,$$

其中 $y_0 = y_1g_0 - y_1 \neq 0$. X 包含 $\mathrm{SL}(n, K)$的根子群 $\{\tau_{x_1, sy_0} | s \in K\}$. 应用引理 4.2.6 并考虑到 $X \not\leq \mathrm{GSp}(n, K, f)$, 可知 $X \geq \mathrm{SL}(n, K)$.

以下设 $n = 4$. 从而 $K \neq F_2$, $V = \langle x_1, x_2\rangle \perp \langle y_1, y_2\rangle$, $f(x_1, x_2) = 1$, $f(y_1, y_2) = c \neq 0$.

先设 $\nu\langle x_1, x_2\rangle = 1$, 在此情形下,我们不要求 $Q(w) \neq 0$, 而

允许 $\delta = Q(w)$ 取任意值. 我们希望化为 $Q(x_1) = Q(x_2) = 0$ 情形. 任选奇异向量 $\tilde{u} \in \langle x_1, x_2 \rangle$, 如果 $\tilde{u} \notin \langle x_1 \rangle$, 则 $f(\tilde{u}, x_1) \neq 0$. $\tilde{g}_1 = T(1) = \tau_{x_1, y_1+\delta y_2}\tau_{x_2, y_2} \in X$ 定驻$\langle x_1, x_2 \rangle$中所有的向量, 从而 $\tilde{g}_1$ 定驻$\tilde{u}$. 且$\tilde{g}_1$ 将 $y_2 \in \tilde{u}^{\perp}$ 送到 $y_2 + cx_1 \notin \tilde{u}^{\perp}$. 我们可在一开始就用$\tilde{g}_1$、$\tilde{u}$、$y_2$ 分别代替 g_1、u、w, 化为 $Q(x_1) = 0$ 的情形, 从而仍有 $\nu\langle x_1, x_2 \rangle = 1$. 于是设 $Q(x_1) = 0$. 注意 $Q(x_2 + Q(x_2)x_1) = 0$. 由 $t_{u,w} = t_{u, w+Q(x_2)u}$ 知, 可用 $w + Q(x_2)u$ 代替 w, 从而用 $x_2 + Q(x_2)x_1$ 代替 x_2, 化成 $Q(x_2) = 0$ 的情形. 对任意 $1 \neq \lambda \in K^*$, 有 $g_0 \in N$ 定驻 y_1、y_2, 且将 x_1、x_2 分别送到 $\lambda^{-2}x_1$、$\lambda^2 x_2$. 于是, $\forall s \in K$, X 包含

$$\begin{aligned} T_1(s) &= T(s)g_0^{-1}T(\lambda s)g_0 = T(s)\tau_{\lambda^{-2}x_1, \lambda s y_1 + \lambda^2 s^2 \delta y_2}\tau_{\lambda^2 x_2, \lambda s y_2} \\ &= (\tau_{x_1, sy_1+s^2\delta y_2}\tau_{x_2, sy_2})(\tau_{x_1, \lambda^{-1}sy_1+s^2\delta y_2}\tau_{\lambda^3 x_2, sy_2}) \\ &= \tau_{x_1, (\lambda^{-1}+1)sy_1}\tau_{(\lambda^3+1)x_2, sy_2}. \end{aligned}$$

若可选 $1 \neq \lambda \in K^*$, 使 $\lambda^3 = 1$, 则 $T_1(s) = \tau_{x_1, (\lambda^{-1}+1)sy_1} \in X(s \in K)$ 已组成 $\mathrm{SL}(n, K)$的一个根子群, 由引理 4.2.6 即得 $X \geq \mathrm{SL}(n, K)$. 若不然, X 包含

$$\begin{aligned} T_1(s)g_0^{-1}T_1(\lambda^2 s)g_0 &= T_1(s)\tau_{\lambda^{-2}x_1, (\lambda^{-1}+1)\lambda^2 sy_1}\tau_{(\lambda^3+1)\lambda^2 x_2, \lambda^2 sy_2} \\ &= (\tau_{x_1, (\lambda^{-1}+1)sy_1}\tau_{(\lambda^3+1)x_2, sy_2})(\tau_{x_1, (\lambda^{-1}+1)sy_1}\tau_{(\lambda^3+1)\lambda^4 x_2, sy_2}) \\ &= \tau_{x_0, sy_2}, \end{aligned}$$

其中 $x_0 = (\lambda^3 + 1)(\lambda + 1)^4 x_2 \neq 0$. X 包含 $\mathrm{SL}(n, K)$的根子群 $\{\tau_{x_0, sy_2} | s \in K\}$, 仍导致 $X \geq \mathrm{SL}(n, K)$.

剩下还需处理 $\nu\langle x_1, x_2 \rangle = 0$ 的情形. 此时 $\Omega\langle x_1, x_2 \rangle$ 是 K 的某个二次扩域 E 的乘法群 E^* 的子群. 我们已假设 $K \neq F_2$, $|K| \geq 4$, 可知 $|\Omega\langle x_1, x_2 \rangle| \geq 5$. 此时, 我们坚持要求 $\delta = Q(w) \neq 0$. 在此设法选三个元素 $z_i = A_i \times 1_{\langle y_1, y_2 \rangle} \in N(i = 1, 2, 3)$, $A_i \in \Omega\langle x_1, x_2 \rangle$ 及一组 $s_i \in K^*$, 使 $s_1 A_1 + s_2 A_2 + s_3 A_3 = 0 \neq$

$s_1^2A_1 + s_2^2A_2 + s_3^2A_3$，从而在 X 中找到平延

$$T_0 = \prod_{i=1}^{3}(z_i^{-1}T(s_i)z_i) = \tau_{\delta x_1 A,\ y_2},$$

其中 $A = s_1^2A_1 + s_2^2A_2 + s_3^2A_3 \neq 0$，从而是 E^* 中的可逆元，$\delta x_1 A \neq 0$. 上述 A_i、$s_i(i = 1, 2, 3)$ 可以这样得到：先任选四个不同的 $A_i \in \Omega\langle x_1, x_2\rangle$，$1 \leq i \leq 4$. 注意，$A_i$、$A_j$ 在 K 上线性相关仅当 $A_i = A_j$. 故所选的 $A_i(1 \leq i \leq 4)$ 在 K 上两两线性无关. 如果 $A_1 + A_2 + A_3 = 0$，$A_3 = A_1 + A_2$，则 $A_4 \neq A_1 + A_2$，$A_1 + A_2 + A_4 \neq 0$，用 A_4 代替 A_3 即可使 $A_1 + A_2 + A_3 \neq 0$. 由 $\dim_K E = 2$ 知 $A_i(i = 1, 2, 3)$ 在 K 上线性相关，存在不全为 0 的 $s_i(i = 1, 2, 3)$，使 $\sum_{i=1}^{3} A_i = 0$，且由 A_i 两两线性无关知 $s_i(i = 1, 2, 3)$ 都不为 0，由 $A_1 + A_2 + A_3 \neq 0$ 知 s_i 不全相等，$s_2 \neq s_1$ 或 $s_3 \neq s_1$ 成立. 若 $\sum_{i=1}^{3} s_i^2 A_i = 0$，则

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{3} s_i^2 A_i - s_1 \sum_{i=1}^{3} s_i A_i \\ &= s_2(s_2 - s_1)A_2 + s_3(s_3 - s_1)A_3, \end{aligned}$$

A_2 与 A_3 在 K-上线性无关，产生矛盾. 故 $\sum_{i=1}^{3} s_i^2 A_i \neq 0$. 这样就找到了满足所述条件的 A_i，$s_i(i = 1, 2, 3)$，于是可取 $z_i = A_i \times 1_{\langle y_1, y_2\rangle} \in N(i = 1, 2, 3)$ 而得到

$$\begin{aligned} T_0 &= \prod_{i=1}^{3}(z_i^{-1}T(s_i)z_i) = \prod_{i=1}^{3}\tau_{x_1 A_i,\ s_i y_1 + s_i^2 \delta y_2}\tau_{x_2 A_i,\ s_i y_2} \\ &= \tau_{x_1 A_0,\ y_1}\tau_{x_2 A_0,\ y_2}\tau_{\delta x_1 A,\ y_2} = \tau_{x_0,\ y_2}, \end{aligned}$$

其中 $A_0 = s_1A_1 + s_2A_2 + s_3A_3 = 0$，$x_0 = \delta x_1 A = \delta x_1(s_1^2 x_1 + s_2^2A_2 + s_3^2A_3 \neq 0$，$\tau_{x_0,\ y_2} \in X$ 是平延. 如果 $x_0 \in \langle x_1\rangle$，可再取 $z \in \Omega\langle x_1, x_2\rangle \times 1_{\langle y_1, y_2\rangle} \in N$，将 x_0 送到某个 $x_0 z \notin \langle x_1\rangle$，而

$z^{-1}\tau_{x_0, y_2}z = \tau_{x_0 z, y_2} \in X$. 由此可见我们总可找到一个平延$\tau_{x_0, y_2} \in X$使$x_0 \in \langle x_1, x_2\rangle \backslash \langle x_1\rangle$. 记住$x_1 = ug_1$, $y_2 = ug_1^*$, 于是$v = x_0 g_1^{-1} \notin \langle x_1 g_1^{-1}\rangle = \langle u\rangle$, $y_2(g_1^*)^{-1} = u$, $g_1\tau_{x_0, y_2}g^{-1} = \tau_{v, u} \in X$. 由$v \in u^{\perp} \backslash \langle u\rangle$, $\forall s \in K$存在$g_0 \in N$固定u且将$v \mapsto v + su$, $\tau_{v,u}^{-1}g_0^{-1}\tau_{v,u}g_0 = \tau_{su,u} = \rho_{u,s} \in \mathrm{Sp}(4, K, f)$. $\{\rho_{u,s} | s \in K\}$组成$\mathrm{Sp}(4, K, f)$的一个长根子群,同时也是$\mathrm{SL}(4, K)$的一个根子群. 由引理4.2.5知,这导致$X \geq \mathrm{SL}(4, K)$.

第 5 章

由含零矩阵得到的扩群

本书的下面几章处理 C_3、C_4、C_5 问题，定出 C_3、C_4 或 C_5 类子群的扩群. 我们的方法主要是矩阵“打洞”技巧. 这三个问题将分别在第 6 章至第 8 章具体解决. 而本章则是针对这三个问题的共同点，将它们归结为更一般的问题，即：

对环 R 及其子体 D，求 D 上的典型群 $N = \mathrm{SL}(n, D)$ 或 $\mathrm{U}'(n, D, \Delta, L)$ 在 $G = \mathrm{GL}(n, R)$ 中的扩群.

本章讨论的是：在这个更一般的问题中，如果已经在 N 的扩群 X 中找到了一个含有足够多的零分量的元素 g_1，如何设法在 $\langle N, g_1\rangle \leq X$ 中找出一个比 N 更大的典型群来. 这样我们就完成了解决 C_3、C_4、C_5 问题过程中的一个共同的重要步骤. 在以后的三章中剩下的工作就是找出这个含零矩阵 g_1，以及处理一些较困难的特殊情况.

§5.1 C_3、C_4、C_5 问题的一般化

为了便于统一处理，我们将 C_3、C_4、C_5 问题归结为更一般的矩阵群的问题. 为此，先选取适当的基，将群元素写成矩阵.

C_5 问题：对体 F 及其子体 K，要定出 $N = \mathrm{SL}(n, K)$ 或 $\mathrm{U}'(n, K, h, L)$ 在 $G = \mathrm{GL}(n, F)$ 中的扩群.

可以认为 $G \subset \mathrm{Mat}_n F$ 已经被写成 F 上的矩阵群，而 $N \leq G \cap \mathrm{Mat}_n K$ 是 K 上的矩阵群.

C_3 问题：设 F 是体 K 的子体，且 $\dim_F K = r < \infty$，要定出

$N = \mathrm{SL}(n, K)$ 或 $\mathrm{U}'(n, K, h, L)$ 在 $G = \mathrm{GL}(nr, F)$ 中的扩群.

取 $V = V(n, K)$ 在 K 上的一组基 $\mathscr{E}_1 = \{e_1, \cdots, e_n\}$，再取 K 作为 F 上 r 维左空间的一组基 $\mathscr{Z} = \{\zeta_1, \cdots, \zeta_r\}$（一般可选 $\zeta_1 = 1$）. 对任意 e_i、ζ_j，记 $e_{ij} = \zeta_j e_i$，则 $\mathscr{E} = \{e_{ij} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r\}$ 是 $V = V(nr, F)$ 的一组基.

K 作为 r 维左 F-空间可以在基 $\mathscr{Z}$ 下写成 F 上 r 维行向量空间 $\mathrm{Mat}_{1\times r}F$，每个 $\theta = \sum_{k=1}^{r} a_k \zeta_k \in K$（所有的 $a_k \in F$）写成行向量 $\vec{\theta} = (a_1, \cdots, a_r)$，$\vec{K} = \{\vec{\theta} \mid \theta \in K\}$ 就等于 $\mathrm{Mat}_{1\times r}F$. 如果 $v \in V = V(n, K)$ 在左 K-基 $\mathscr{E}_1$ 下的坐标为 $(\theta_1, \cdots, \theta_n) \in \mathrm{Mat}_{1\times n}K$，则 v 在左 F-基 $\mathscr{E}$ 下的坐标为 $(\vec{\theta}_1, \cdots, \vec{\theta}_n) \in \mathrm{Mat}_{1\times nr}F$.

在基 $\mathscr{E}$ 下可将 $\mathrm{GL}(V/F)$ 的元素写成 F 上的 nr 阶方阵，并且把 $\mathrm{GL}(nr, F)$ 中的方阵 g 写成分块形式 $g = (A_{ij})_{n\times n}$，所有的块 $A_{ij} \in \mathrm{Mat}_r F$. 每个 $\alpha \in K$ 在 K 上的右乘作用 $\alpha_R: \theta \mapsto \theta\alpha$ 是 K 上的左 F-线性变换，可在基 $\mathscr{Z}$ 下写成 $\mathrm{Mat}_r F$ 中的矩阵 $\alpha^{(r)}$，使 $\vec{\theta\alpha} = \vec{\theta}\,\alpha^{(r)}$. 映射 $\alpha \mapsto \alpha^{(r)}$ 将 K 嵌入 $\mathrm{Mat}_r F$，设嵌入象为 K_R. 在左 K-基 $\mathscr{E}_1$ 下可将 $\mathrm{GL}(n, K)$ 中的元素 g 写成 K 上的矩阵 $g = (\alpha_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{Mat}_n K$ 的形式. 再将每个矩阵元素 $\alpha_{ij} \in K$ 换成相应的 $\alpha_{ij}^{(r)} \in K_R \subset \mathrm{Mat}_r F$，就得到 g 在左 F-基 $\mathscr{E}$ 下的矩阵

$$g = (\alpha_{ij}^{(r)})_{n\times n} \in \mathrm{GL}(n, K_R) < \mathrm{GL}(nr, F).$$

这样，$g = (A_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{GL}(nr, F)$ 含于 $\mathrm{GL}(n, K)$ 当且仅当它的所有的块 A_{ij} 含于 K_R，C_3 问题就变成求 $N = \mathrm{SL}(n, K_R)$ 或 $\mathrm{U}'(n, K_R, \Delta, L)$ 在 $G = \mathrm{GL}(nr, F)$ 中的扩群.

C_4 问题：按 Aschbacher 的 C_4 类子群的定义的直接推广，是对域 F 上向量空间 $U = V(n, F)$ 和 $W = V(r, F)$ 的张量积 $V = W \otimes_F U$ 定出 $N = \mathrm{SL}(W) \otimes \mathrm{SL}(U)$ 或其子群 $\mathrm{U}'(W, f_2) \otimes \mathrm{U}'(U, f_1)$ 在 $G = \mathrm{GL}(V/F)$ 中的扩群. $V = W \otimes_F U$ 可以写成由矩阵组成的空间 $\mathrm{Mat}_{r\times n}F$，群 $N = \mathrm{SL}(W) \otimes \mathrm{SL}(U)$ 由 $\mathrm{Mat}_{r\times n}F$ 上形如

$$X \mapsto BXA(A \in \mathrm{SL}(n, F), B \in \mathrm{SL}(r, F))$$

的矩阵相抵变换组成.

C_4 类子群的更一般定义如下:设 K 是体,F 与 E 是 K 的子体,且在 K 中互为中心化子,且 K 作为左 F-空间的维数 $\dim_F K = d < \infty$. 取 $V = \mathrm{Mat}_{r\times n}K$ 看作 F 上左空间,则 $\dim_F V = nrd$. 设 Γ 是 V 上形如

$$X \mapsto BX^{\sigma}A(A \in \mathrm{GL}(n, K), B \in \mathrm{GL}(r, E), \sigma \in \mathrm{Gal}K/F)$$

的变换组成的群,则 $\Gamma < \mathrm{GL}(V/F)$. 设 N_1 等于 $\mathrm{SL}(n, K)$ 或 $\mathrm{U}'(n, K, H_1)$, N_2 等于 $\mathrm{SL}(r, E)$ 或 $\mathrm{U}'(r, E, H_2)$,

$$N = \{X \mapsto BXA \mid A \in N_1, B \in N_2\} \le \Gamma.$$

我们希望定出 N 在 $\mathrm{GL}(V/F)$ 中的全部扩群.

现在设法选取 nrd 维左 F 空间 V 的适当的基,在这组基下将 $\mathrm{GL}(V/F)$ 写成矩阵群 $\mathrm{GL}(nrd, F)$,使群 Γ(从而 N)具有好的形式. 为此,先取 K 的左 F-基 $\mathscr{Z} = \{\zeta_l \mid 1 \le l \le d\}$ (一般可取 $\zeta_1 = 1$). 对每个 $1 \le i \le n$, $1 \le j \le r$, $1 \le l \le d$, 记 $e_{ijk} = \zeta_l E_{ji}$, 即 $e_{ijk} \in V$ 是这样的矩阵,它的第(j, i)分量为 ζ_k,而其余分量都是 0. 将所有的 e_{ijk}按字典式顺序排列起来就得到 V 的一组左 F-基 $\mathscr{E}$. 这里,“字典式排列顺序”是指:e_{ijk}排在 $e_{i'j'k'}$的前面 $\Longleftrightarrow i < i'$, 或 $i = i'$ 且 $j < j'$, 或 $i = i'$ 且 $j = j'$ 且 $k<k'$.

与 C_3 问题中类似,可在基 $\mathscr{Z}$ 下将每个 $\theta \in K$ 写成行向量 $\vec{\theta} \in \mathrm{Mat}_{1\times d}F$, 从而 K 被写成 $\vec{K} = \{\vec{\theta} \mid \theta \in K\} = \mathrm{Mat}_{1\times d}F$. 每个 $\alpha \in K$ 在 K 上引起一个右乘变换 $\alpha_R : \theta \mapsto \theta\alpha$ 和一个左乘变换 $\alpha_L : \theta \mapsto \alpha\theta$. 所有的 $\alpha_R(\alpha \in K)$ 都是 K 上的左 F-线性变换. 当 $\alpha \in E$ 时,α_L 也是左 F-线性变换. 每个 $\sigma \in \mathrm{Gal}K/F$ 也是 K 的左 F-线性变换. K 上这些左 F-线性变换都可以在基 $\mathscr{Z}$ 下分别写成 F 上 d 阶方阵 $\alpha_R^{(d)}$、$\alpha_L^{(d)}$、$\sigma^{(d)}$, 它们在 K 上的作用可以通过用这些相应的矩阵去右乘每个 $\vec{\theta} \in \vec{K}$ 来实现. 这样, $K_R = \{\alpha_R^{(d)} \mid \alpha \in K\}$ 和

$E_L=\{\alpha_L^{(d)}\mid\alpha\in E\}$ 都被嵌入 Mat_dF 成为子体. 映射 $\alpha\mapsto\alpha_R^{(d)}$ 是 K 到 K_R 的同构,而 $\alpha\mapsto\alpha_L^{(d)}$ 是 E 到 E_L 的反同构. 而 $\sigma\mapsto\sigma^{(d)}$ 将 $\mathrm{Gal}K/F$ 嵌入 $\mathrm{GL}(d,F)$成为子群且正规化 K_R 和 E_L.

每个 $v=(\theta_{ij})_{r\times n}\in V$ (所有的 $\theta_{ij}\in K$)在基 $\mathscr{E}$ 下可写成 F 上 nrd 维行向量(即 v 在这组基下的坐标)($\vec{\theta}_{11}$, …, $\vec{\theta}_{r1}$, $\vec{\theta}_{12}$, …, $\vec{\theta}_{r2}$, …, $\vec{\theta}_{1n}$, …, $\vec{\theta}_{rn}$), 从而 V 写成 $\mathrm{Mat}_{1\times nrd}F$. $\sigma\in\mathrm{Gal}K/F$ 在 V 上的作用就是将 v 中每个$\vec{\theta}_{ij}$变到$\vec{\theta}_{ij}\sigma^{(d)}$,从而 σ 在基 $\mathscr{E}$ 下的矩阵就是与"纯量"$\sigma^{(d)}$对应的"纯量阵" $\sigma^{(nrd)}=I^{(nr)}\otimes\sigma^{(d)}$. 每一对矩阵 $A\in\mathrm{GL}(n,K)$ 和 $B\in\mathrm{GL}(r,E)$ 所诱导出的 $V=\mathrm{Mat}_{r\times n}K$ 的相抵变换 $A_R\otimes B_L: v\mapsto BvA$ 在基 $\mathscr{E}$ 下的矩阵具有张量积形式 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=(\alpha_{ij}\boldsymbol{B})_{n\times n}$, 其中 $\boldsymbol{A}=(\alpha_{ij})_{n\times n}\in\mathrm{GL}(n,K_R)$ 为在 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 中将每个 $a_{ij}\in K$ 换成相应的 $\alpha_{ij}=(a_{ij})_R^{(d)}\in K_R$ 而得到,而 $\boldsymbol{B}=(\beta_{ji})_{r\times r}\in\mathrm{GL}(r,E_L)$ 由 $B=(b_{ij})_{r\times r}$ 在 E 上的转置矩阵 $\boldsymbol{B}^T=(b_{ji})_{r\times r}$ 中将每个 $b_{ji}\in E$ 换成相应的 $\beta_{ji}=(b_{ji})_L^{(d)}\in E_L$ 而得到. 这样,所有这样的相抵变换 $A_R\otimes B_L$ 组成的子群 M 就被写成了矩阵群

$$M=\mathrm{GL}(n,K_R)\otimes\mathrm{GL}(r,E_L),$$

N 是它的子群. 而群 Γ 的矩阵形式为

$$\Gamma=(\mathrm{GL}(n,K_R)\otimes\mathrm{GL}(r,E_L))(\mathrm{Gal}K/F).$$

以上 C_5、C_4、C_3 问题可以总结和推广为下面更具一般性的问题:

设 $R=\mathrm{Mat}_rF$ 是体 F 上全方阵环,D 是 R 的子体. 求 $N=\mathrm{SL}(n,D)$ 或 $\mathrm{U}'(n,D,\Delta,L)$ 在 $G=\mathrm{GL}(n,R)$ 中的全部扩群.

(注:当然也可考虑更一般的情况,假定 R 是一般的含 1 环. 但从本书解决 C_3、C_4、C_5 问题的需要,假定 $R=\mathrm{Mat}_rF$ 也就足够了,这样可以避免对 R 的性质作更多的讨论.)

在这个一般性问题中,取 $r=1$ 就变成 C_5 问题. 取 D 使

$\mathrm{Mat}_{1\times r}F$ 是1维右 D 空间就变成 C_3 问题. 对 r 的某个因子 $d<r$, 取 $\mathrm{Mat}_d F$ 的子体 K 使 $\mathrm{Mat}_{1\times d}F$ 是1维右 K-空间, $D=I^{(r/d)}\otimes K$, 就变成比 C_4 问题更难的问题: 定出 $N_0=\mathrm{SL}(n, K)\otimes I^{(r)}$ (在 $\mathrm{Mat}_d F$ 上取张量积)或其子群在 $\mathrm{GL}(nr, F)$中的扩群.

$N\leq \mathrm{SL}(n, D)$ 在 $G=\mathrm{GL}(n, R)$ 中有一些显然的扩群 X. 首先, 介于 $\mathrm{SL}(n, R)$与 $\mathrm{GL}(n, R)$之间的任一子群 X 显然是所求的扩群之一, 这可以说是 N 的"最大的"扩群. 反过来, 考虑 $\mathrm{SL}(n, D)$在 $\mathrm{GL}(n, R)$中的正规化子 $\mathscr{N}$, 则介于 N 与 $\mathscr{N}$ 之间的群 X 可以认为是"最小的"扩群. 最大的扩群可以认为都是已知的. 要定出所有的扩群 X, 只须先搞清楚"最小的"扩群到底是哪些, 再搞清楚"非最小的"扩群 X(即 X 不正规化 N 的情形)到底是哪些. 我们很容易想出一个尽可能大的子群 $\Gamma<\mathrm{GL}(n, R)$, 使它正规化 $\mathrm{SL}(n, D)$, 但要证明它就是 N 的正规化子却并不容易. 因此, 我们采取的方案是: 先想出一个这样的 Γ, 再定出所有不含于 Γ 的扩群.

设 $N_R(D)$是乘法群 D^* 在 R^* 中的正规化子. 将每个 $\delta\in N_R(D)\subset \mathrm{Mat}_r F$ 与"纯量阵" $I^{(n)}\otimes\delta=\mathrm{diag}(\delta, \cdots, \delta)\in \mathrm{GL}(n, R)$ 等同起来, 在这个意义上可以认为 $N_R(D)<\mathrm{GL}(n, R)$. 显然 $N_R(D)$正规化 $\mathrm{GL}(n, D)$, 从而 $\Gamma=\mathrm{GL}(n, D)\cdot N_R(D)$ 正规化 $\mathrm{GL}(n, D)$并进而正规化 $\mathrm{SL}(n, D)$. 这个 Γ 就是我们所想到的正规化 $\mathrm{SL}(n, D)$的尽可能大的群. 事实上它就是 $\mathrm{SL}(n, D)$在 $\mathrm{GL}(n, R)$中的正规化子. 但我们并不预先假定这一点, 也不先设法证明这一点. 我们只需要知道它正规化 $\mathrm{SL}(n, D)$(而这是显然的), 搞清楚它的构造, 并定出所有不含于它的扩群. 在定出所有不含于 Γ 的扩群 X 后, 很容易就看出 Γ 是 $\mathrm{SL}(n, D)$在 $\mathrm{GL}(n, R)$中的正规化子.

我们来看在 C_3、C_4、C_5 问题中 $N_R(D)$和 Γ 各是什么. 除了正规化子 $N_R(D)$以外, 我们还需要用到 D^* 在 R^* 中的中心化子 $C_R(D)$. 当然 $C_R(D)\leq N_R(D)$.

在 C_5 问题中, $R=F$ 自身就是体. 如果子体 D 含于 F 的中心

(特别当 F 是域时是如此),则

$$N_F(D) = C_R(D) = F^*,$$

$$\Gamma = \mathrm{GL}(n, D) \cdot F^*.$$

在 C_3 问题中,每个 $\theta \in D \subset \mathrm{Mat}_r F$ 与它的第一行 $\overrightarrow{\theta}$ 之间的对应是 r 维左 F-空间 D 到 $\mathrm{Mat}_{1\times r}F$ 的同构. 每个 $a \in F$ 对应于唯一的 $\theta(a) \in D$, 使 $\overrightarrow{\theta(a)} = (a, 0, \cdots, 0)$, 映射 $a \mapsto \theta(a)$ 是体 F 到 D 中的单同态. 将每个 $a \in F$ 等同于 $\theta(a)$,可认为 F 是 D 的子体. 每个 $\sigma \in \mathrm{Gal}D/F$ 在 $\mathrm{Mat}_{1\times r}F$ 上诱导出一个 F-线性变换 $\overrightarrow{\theta} \mapsto \overrightarrow{\theta^\sigma}$, 从而对应于一个矩阵 $P \in \mathrm{GL}(r, F)$, 使 $\overrightarrow{\theta^\sigma} = \overrightarrow{\theta} P$, 且 $\theta^\sigma = P^{-1}\theta P$. 将这个 P 与 σ 等同起来,即可认为 $(\mathrm{Gal}D/F) < \mathrm{GL}(r, D) = R^*$.

我们有

$$N_R(D) = D^* \rtimes \mathrm{Gal}D/F, \quad C_R(D) = Z(D)^*,$$

$$\Gamma = \mathrm{GL}(n, D) \rtimes \mathrm{Gal}K/F.$$

在 C_4 问题中, $D^* = I^{(r/d)} \otimes K_R^*$,

$$N_R(D) = (K^* \cdot \mathrm{GL}(r/d, E_L))(\mathrm{Gal}K/F),$$

$$C_R(D) = I^{(n)} \otimes \mathrm{GL}(r/d, E_L),$$

$$\Gamma = (\mathrm{GL}(n, K_R) \otimes \mathrm{GL}(r/d, E_L))(\mathrm{Gal}K/F).$$

注意,这个 Γ 与前面在叙述 C_4 问题中定义的 Γ 是一致的.

这样,对我们所关心的 C_3、C_4、C_5 问题,$N_R(D)$和 Γ 的结构都是清楚的. 对 C_3、C_5 问题,求满足条件 $N \leq X \leq \Gamma$ 的扩群 X 基本上就是 C_8 问题,引用第 4 章中关于 C_8 问题的定理,就可以知道所有这样的扩群 X. 对 C_4 问题,Γ 比 N 大得很多,但我们并不是要求 $N \leq \mathrm{SL}(n, D)$ 的扩群,而是求

$$N_0 = N_1 \otimes N_2 \leq \mathrm{SL}(n, K_R) \otimes \mathrm{SL}(r/d, E_L)$$

在 $\mathrm{GL}(nr, F)$中的扩群,N_0 与 Γ 之间就相差不多了,它们之间的

群仍可以认为是已知的.

因此,以下只须考虑 $N \leq \mathrm{SL}(n, D)$ 在 $\mathrm{GL}(n, R)$ 中这样的扩群 X, X 不含于 Γ. 从这样的 X 中可取出元素 $g_1 = (a_{ij})_{n\times n} \notin \Gamma$. 在本章中要证明:假如能够选 g_1 使它的特定位置的分量为 0,那么就能在 $\langle N, g_1\rangle \leq X$ 中找到幺幂元素 $T \notin \Gamma$, 使 $T - I$ 的几乎所有的元素都是 0,进而能够在 $\langle N, T\rangle \leq X$ 中找到比 N 更大的典型群 $\mathscr{N}$ 的根子群,并证明 $X \geq \mathscr{N}$.

在本章以下各节中,除非另外声明,我们总作如下假设:R 是体 F 上的全方阵环 $\mathrm{Mat}_r F$, $r\geq 1$; D 是 R 的子体,从而 D 的乘法群 $D^* < R^* = \mathrm{GL}(r, F)$; $N_R(D)$ 是 D^* 在 R^* 中的正规化子; $\Gamma = \mathrm{GL}(n, D)\cdot N_R(D)$, 因而 Γ 正规化 $\mathrm{GL}(n, D)$. 在涉及到 D 上的酉群时,假定 $J: a \mapsto \bar{a}$ 是 D 的对合,$U(n, D, \Delta, L)$是关于 J 的酉群,其中 Δ 具有第1章所说的标准形式, $\nu = \nu_L(\Delta)$ 是这个酉群的 Witt 指数,且 ≥ 1 (在大多数情况下我们假定 $\nu \geq 2$).

在此假设 R 是全方阵环,是因为在处理 C_3、C_4、C_5 问题时只遇到 $R = \mathrm{Mat}_r F$ 的情况. 不过,本章的引理 5.2.1、引理 5.5.1 及其证明对更一般的含 1 环 R 也是成立的.

我们涉及到两个环 F 和 $R = \mathrm{Mat}_r F$, R 上的 $m \times k$ 矩阵 A 同时也是 F 上 $mr \times kr$ 矩阵. 为了区别起见,我们记 $A_{(m\times k)}$ (或 $A_{(m)}$)来表示 A 是 R 上的 $m \times k$ (或 $m \times m$)矩阵,而记 $A^{(m\times k)}$ (或 $A^{(m)}$)来表示 A 是 F 上的 $m \times k$ (或 $m \times m$)矩阵. R 上的矩阵 A 在 R 上的转置记作 A^T,而它在 F 上的转置记作 A'. 如果不作另外的说明,记 $A = (A_{ij})_{m\times k} \in \mathrm{Mat}_{m\times k} R$ 时总认为 A 的块 $A_{ij} \in R$, A 第 i 个 R-行是指子矩阵$(A_{i1}, \cdots, A_{ik})$(R-列的意义类似),而称 A 的第i 行(或第 j 列)则是指它作为 F 上矩阵的第 i 行(或第 j 列).

每个 $\theta \in D$ 是 F 上 $r \times r$ 矩阵,将它的第一行记作 $\vec{\theta}$. 则 θ 由 $\vec{\theta}$ 唯一决定. D 中满足条件 $\vec{\theta} = (a, 0, \cdots, 0)$ 的元素 θ 对应于唯一的 $a \in F$, 可以与 a 等同起来,这样就将 D 的一个子体嵌入 F.

当 $r=1$ 时,整个 D 被嵌入 F 作为子体. 当 $r\geq 2$ 时,如果对每个 $a\in F$ 都存在(并且唯一) $\theta\in D$ 使 $\vec{\theta}=(a, 0, \cdots, 0)$,则在这个意义下我们把 F 看成 D 的子体.

§5.2 线性群 SL(n, D)与含零矩阵生成的扩群

本节讨论 $N=\mathrm{SL}(n, D)$ 在 $\mathrm{GL}(n, R)$中的扩群 X. 由下面的引理 5.2.1 可以看出,含有足够多零元素的 $g_1\in \mathrm{GL}(n, R)\backslash\Gamma$ 与 N 生成的扩群具有特别的重要性.

对任一个含 1 环 S,我们定义 $\mathrm{SL}(n, S)$为由所有的 $T_{ij}(c)$ $(i\neq j, c\in S)$ 生成的群. 这里 $T_{ij}(c)=I+cE_{ij}$, cE_{ij} 是 S 上第 (i, j)-分量为 c 其余分量为 0 的 n 阶方阵. 为了叙述方便,我们也允许 $i=j$, 即定义 $T_{ii}(c)=I+cE_{ii}$.

引理 5.2.1 设 R 是含 1 环,D 是 R 的子环,且包含 R 的单位元 1_R, $N_R(D)$是 D^* 在 R^* 中的正规化子. 设 $n\geq 3$, $N=\mathrm{SL}(n, D)$, $\Gamma=\mathrm{GL}(n, D)\cdot N_R(D)$. 设 $g_1=(a_{ij})_{n\times n}\in \mathrm{GL}(n, R)\backslash\Gamma$, 且 $a_{1j}=0$ 对 $j\geq 2$ 成立, $Y=\langle N, g_1Ng_1^{-1}\rangle$. 则有 R 的子环 $S\supsetneqq D$ 使 $Y\geq \mathrm{SL}(n, S)$.

证明 (5.2.1.1) 记 $S=\{c\in R\,|\,T_{n1}(c)\in Y\}$. 则 S 是 D 的扩环,且 $Y\geq \mathrm{SL}(n, S)$.

若 $T_{kl}(c)\in Y$ 对某一对 $k\neq l$ 成立,考虑 $T_{kl}(c)^{\pm 1}=T_{kl}(\pm c)\in Y$ 在所有的 $P_{ij}\in \mathrm{SL}(n, D)$ 下的共轭,知 $T_{ij}(\pm c)\in Y$ 对所有的 $i\neq j$ 成立. 这证明 $c\in S\Longleftrightarrow T_{ij}(c)\in Y$, $\forall i\neq j$. 对任意的 b、$c\in S$, 有

$$T_{n1}(b)(T_{n1}(c))^{\pm 1}=T_{n1}(b\pm c)\in Y$$

及

$$T_{n1}(bc)=T_{n2}(b)T_{21}(c)T_{n2}(-b)T_{21}(-c)\in Y,$$

即 $b\pm c$, $bc\in S$, S 是 R 的子环,并且 $Y\geq\langle T_{ij}(c)\,|\,c\in S\rangle=\mathrm{SL}(n, S)$. 由 $Y\geq \mathrm{SL}(n, D)$ 知 $S\supseteq D$.

剩下只需证明 $S \neq D$，即 Y 含有某个 $T_{n1}(c)$，$c \notin D$.

(5.2.1.2) 定义嵌入映射

$$\varphi: \mathrm{SL}(n-1, R) \to \mathrm{SL}(n, R),\ P \mapsto \mathrm{diag}(1, P).$$

如果存在 $T = I + a_2E_{21} + \cdots + a_nE_{n1} \in \mathrm{SL}(n, R) \backslash \mathrm{SL}(n, D)$ 使 $T\varphi(\mathrm{SL}(n-1, D))T^{-1} \leq Y$，则存在 $T_{n1}(c) \in Y_0 = \langle \varphi(\mathrm{SL}(n-1, D)), T\varphi(\mathrm{SL}(n-1, D))T^{-1} \rangle \leq Y$ 使 $c \notin D$.

由 $T \notin \mathrm{SL}(n, D)$ 知有某个 $a_k \notin D$，$k \geq 2$. 如果 $2 \leq k \leq n-1$，取 $T_{nk}(1) \in \varphi(\mathrm{SL}(n-1, D))$，则

$$T_{n1}(a_k) = T_{nk}(1)TT_{nk}(-1)T^{-1} \in Y,$$

恰如所需. 如果 $a_n \notin D$，则

$$T_{21}(a_n) = T_{2n}(1)TT_{2n}(-1)T^{-1} \in Y_0,$$

再用 $T_{21}(a_n)$ 代替 T 即可.

(5.2.1.3) 如果有 $s \in D$ 和 $i, j \geq 2$，使 $a_{ij}sa_{11}^{-1} \notin D$，则 $S \neq D$.

对满足所述条件的 s 和 i、j，有

$$T = g_1T_{j1}(s)g_1^{-1} = I + a_2E_{21} + \cdots + a_nE_{n1} \in Y,$$

其中 $a_i = a_{ij}sa_{11}^{-1} \notin D$. 由(5.2.1.2)得 $S \neq D$.

(5.2.1.4) 引理结论成立.

只需考虑不满足(5.2.1.3)所述条件的情形，即 $a_{ij}sa_{11}^{-1} \in D$ 对所有的 i、$j \geq 2$ 和 $s \in D$ 成立.

将 g_1 写成分块形式

$$g_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

使 $A_{22} \in \mathrm{GL}(n-1, R)$，$A_{21} \in \mathrm{Mat}_{(n-1)\times 1}R$. 则以上假设也就是说 $A_{22}sa_{11}^{-1} \in \mathrm{Mat}_{n-1}D$. 特别取 $s = 1$，得 $A_{22}a_{11}^{-1} \in \mathrm{Mat}_{n-1}D$.

对每个 $P \in \mathrm{SL}(n-1, D)$，取 $z = \varphi(P) = \mathrm{diag}(1, P) \in$

SL(n, D)，则

$$g_2 = g_1 z g_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & O \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \in Y, \text{其中 } B_{22} = A_{22} P A_{22}^{-1}.$$

如果可选 P 使 $B_{22} \notin \mathrm{Mat}_{n-1}D$，用 g_2 代替 g_1，即可用(5.2.1.3)得出所需的结论.

以下设对所有的 P 都有 $B_{22} \in \mathrm{Mat}_{n-1}D$. 由于 P^{-1} 也含于 $\mathrm{SL}(n-1, D)$，$B_{22}^{-1} = A_{22}P^{-1}A_{22}^{-1} \in \mathrm{Mat}_{n-1}D$，可见 $B_{22} \in \mathrm{SL}(n-1, D)$. 这说明 A_{22} 正规化 SL(n, D)，于是 g_1 的准对角部分 $g_0 = \mathrm{diag}(a_{11}, A_{22})$ 正规化 $\varphi(\mathrm{SL}(n-1, D)) = \{\mathrm{diag}(1, P) \mid P \in \mathrm{SL}(n-1, D)\}$. 注意，$T = g_1 g_0^{-1}$ 具有形式 $I + a_2 E_{21} + \cdots + a_n E_{n1}$，且

$$T\varphi(\mathrm{SL}(n-1, D))T^{-1} = g_1 \varphi(\mathrm{SL}(n-1, D)) g_1^{-1} \leq Y.$$

如果 $T \notin \mathrm{SL}(n, D)$，则由(5.2.1.2)得出所需结论.

以下设 $T = g_1 g_0^{-1} \in \mathrm{SL}(n, D)$，用 $T^{-1}g_1 \in Y \setminus \Gamma$ 代替 g_1，可在不改变 Y 的前提下化为 $g_1 = g_0 = \mathrm{diag}(a_{11}, A_{22})$. 记 $A = A_{22}a_{11}^{-1} \in \mathrm{Mat}_{n-1}D$，$z = \mathrm{diag}(1, A)$. 则 $g_1 = z a_{11}$.

如果 A^{-1} 也含于 $\mathrm{Mat}_{n-1}D$（当 D 是体时必然如此），则 $A \in \mathrm{GL}(n-1, D)$，$z \in \mathrm{GL}(n, D)$. 对任意 $s \in D$，由 $A_{22} s a_{11}^{-1} \in \mathrm{Mat}_{n-1}D$，得 $A^{-1}A_{22} s a_{11}^{-1} = (a_{11} s a_{11}^{-1}) I \in \mathrm{Mat}_{n-1}D$，即 $a_{11} s a_{11}^{-1} \in D$. 这就是说 $a_{11} D a_{11}^{-1} = D$，a_{11} 正规化 D，含于 $N_R(D)$. 但这导致 $g_1 = z a_{11} \in \mathrm{GL}(n, D) \cdot N_R(D) = \Gamma$，产生矛盾.

唯一剩下的情况是 $A^{-1} = (b_{ij})_{2 \leq i, j \leq n} \notin \mathrm{Mat}_{n-1}D$. 这只有在 D 不是体时才有可能. 设 $b_{kl} \notin D$ 对某一对 k、$l \geq 2$ 成立. 注意 $g_1^{-1} = (z a_{11})^{-1} = a_{11}^{-1} z^{-1} = a_{11}^{-1} \mathrm{diag}(1, A^{-1})$. 取 $T_{1i}(1) \in N$，则 $g_3 = g_1 T_{1k}(1) g_1^{-1} = z T_{1k}(1) z^{-1} = I + b_2 E_{12} + \cdots + b_n E_{1n} \in Y$，其中 $b_l = b_{kl} \notin D$. 用 SL(n, D)中的置换阵 P_{1n} 作共轭，可得

$$\begin{aligned} g_4 &= P_{1n}^{-1} g_3 P_{1n} \\ &= I + b_n E_{n1} + b_2 E_{n2} + \cdots + b_{n-1} E_{n, n-1} \in Y \setminus \mathrm{Mat}_n D. \end{aligned}$$

如果有某个 $j \leq n-1$ 使 $b_j \notin D$，用(5.2.1.3)即可. 否则，$z_1 = I + b_2E_{n2} + \cdots + b_{n-1}E_{n,n-1} \in \mathrm{SL}(n, D)$，而 $b_n \notin D$，可用 $T = g_4z_1^{-1} = T_{n1}(b_n)$ 代替 g_1，由(5.2.1.2)得所需结论. ▌

§5.3　全方阵环的子环与子模

由于有了引理 5.2.1，只要能在 $N = \mathrm{SL}(n, D)$ 的扩群 X 中找到引理所述的含零矩阵 g_1，由引理就有一个 $\mathrm{SL}(n, S) \leq X$. 为了定出 X，当然需要搞清楚 S 的构造. 可以看到，在 C_3、C_4、C_5 问题中，S 通常是 F 的某个扩体 E 上的全方阵环 Mat_mE. 在此情形下有如下引理：

引理 5.3.1　如果 $S = \mathrm{Mat}_mE$，则 $\mathrm{SL}(n, S) = \mathrm{SL}(nm, E)$.

证明　记 $X = \mathrm{SL}(n, S)$. 已经知道 X 包含 $\mathrm{SL}(nm, E)$的形如 $T_{ij}(sE_{kl})(i \neq j,\ s \in E^*)$ 的平延. 还须证明 X 包含形如 $T_{ii}(sE_{kl})(k \neq l,\ s \in E^*)$ 的平延. $T_{ii}(sE_{kl})$是准对角阵，第 i 个对角块为 $T_{kl}(s) \in \mathrm{GL}(m, E)$，其余对角块都是单位阵. 为此，任取 $1 \leq j \leq n$ 使 $j \neq i$，取 $g_1 = T_{ij}(sE_{kk}) \in X$，$g_2 = T_{ji}(E_{kl}) \in X$，则 $g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1} = T_{ii}(sE_{kl}) \in X$. 形如 $T_{ij}(sE_{kl})$($i \neq j$ 或 $k \neq l$，而 $s \in E^*$) 的所有的平延都含于 X 并且生成 $\mathrm{SL}(nm, E)$，故 $\mathrm{SL}(nm, E) \leq X$. 显然 $X \leq \mathrm{SL}(nm, E)$. 于是 $X = \mathrm{SL}(nm, E)$. ▌

下面针对 C_3、C_4、C_5 问题的不同情况，定出 S 的可能的构造.

对 C_5 问题有如下引理：

引理 5.3.2　设 $K \subset F$ 是体，并且将 F 看作左 K-空间时 $\dim_KF = r < \infty$. 设 S 是 K 在 F 中的扩环，则 S 是体.

证明　$\forall 0 \neq \theta \in S$，$F$ 中 $r+1$ 个元素 $\theta^i(0 \leq i \leq r)$ 在 K 上线性相关，存在不全为零的 $a_i \in K(0 \leq i \leq r)$，使 $a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + \cdots + a_r\theta^r = 0$. 取最小的 t 使 $a_t \neq 0$，则

$$a_t\theta^{-1} + a_{t+1} + a_{t+2}\theta + \cdots + a_r\theta^{r-t-1} = 0,$$

$$\theta^{-1} = - a_t^{-1}(a_{t+1} + a_{t+2}\theta + \cdots + a_r\theta^{r-t-1}) \in S.$$

这说明 S 中的非零元在 S 中有逆元，S 是体. ▌

对 C_3 问题有如下引理：

引理 5.3.3 设 F 是体，K 是 $R = \mathrm{Mat}_r F$ 的子体，且使 $\mathrm{Mat}_{1\times r}F$ 是 1 维右 K-空间. S 是 R 的子环，且真包含 K. 则存在 $P \in \mathrm{GL}(r, F)$ 将环 S 共轭到 $PSP^{-1} = \mathrm{Mat}_d E$，$d \geq 2$ 是 r 的某个因子，E 是 $\mathrm{Mat}_{r/d}F$ 的某个子体，且 $\mathrm{Mat}_{1\times r/d}F$ 是 1 维右 E-空间.

证明 $W = \mathrm{Mat}_{1\times r}F$ 是不可约右 K-模，而 S 真包含 K，故 W 是不可约右 S-模. 由引理 2.5.6(Weddernburn 定理的矩阵形式)即得所需结论. $d \geq 2$ 是因为 S 真包含 K. ▌

在 C_4 问题中，$D = I^{(r)} \otimes K_R$. 但不是要定出 $\mathrm{SL}(n, D) = \mathrm{SL}(n, K_R) \otimes I$ 的扩群，而是要定出 $\mathrm{SL}(n, K_R) \otimes \mathrm{SL}(r, E_L)$ 的扩群. 因此 $S = \{A \in R \mid T_{n1}(A) \in X\}$ 还满足条件：对任意的 $A \in S$ 和 $P \in \mathrm{SL}(r, E)$，有

$$T_{n1}(PAP^{-1}) = (I \otimes P)T_{n1}(A)(I \otimes P)^{-1} \in X,$$

从而 $PAP^{-1} \in S$. 也就是说：S 被 $\mathrm{SL}(r, E_L)$ 正规化. 由于 $\mathrm{SL}(n, K_R)$ 包含所有的 $T_{n1}(I \otimes \alpha)(\alpha \in K_R)$，$S$ 包含 $I^{(r)} \otimes K_R$. 当 $n \geq 3$ 时，引理 5.2.1 已经指出 S 是环，因此我们需要定出 $R = \mathrm{Mat}_r F$ 中被 $\mathrm{SL}(r, E_L)$ 正规化的子环 $S \supseteq I^{(r)} \otimes K_R$ 可能的构造. 对 F 是域的情况，在研究 C_4 类子群 $N_1 \otimes N_2 \leq \mathrm{GL}(n, F) \otimes \mathrm{GL}(r, F)$ 的过程中，还需要计算 $\mathrm{SL}(\nu, F) \otimes N_2$ 在 $\mathrm{GL}(\nu r, F)$ 中的扩群，从而需要定出 $R = \mathrm{Mat}_r F$ 中被 N_2 正规化的子环 $S \supseteq FI^{(r)}$ 的可能的构造，其中 ν 是 N_1 的 Witt 指数，N_2 是 F 上的辛群、酉群或正交群.

首先，利用§2.5 叙述的关于不可约子环的 Wedderburn 定理及§2.6 关于正规化非纯量可约子集的子群的结果，很容易对域 F 定出被 F 上的典型群正规化的子环的构造如下：

引理 5.3.4 设 F 是域，$r \geq 2$，$G = \mathrm{SL}(r, F)$、$\mathrm{Sp}(r, F)$、$\mathrm{SU}(r, F, H)(\nu(H) \geq 1)$，或 $\mathrm{char}F \neq 2$ 且 $G = O(r, F, H)$ 或

$\Omega(r, F, H)$. 设 S 是 $FI^{(r)}$ 在 $R = \mathrm{Mat}_r F$ 中的真扩环且被 G 正规化. 则 $S = \mathrm{Mat}_r F$，但下列情形除外：

(i) $G = \mathrm{SL}(2, 2) = \mathrm{Sp}(2, 2)$，$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \middle| a, b \in F_2 \right\} \cong F_4$ 是 $F = F_2$ 的二次扩域.

(ii) G 在 $\mathrm{Mat}_{1\times r} F$ 上可约或非本原，即：$G \leq O^+(2, 3)$，$G = \mathrm{SU}(2, 2^2)$，$G \leq O(2, F, f)(F = F_3, F_5$ 或 $\nu(f) = 1)$ 或 $G \leq O(3, 3)$.

(iii) $G = \Omega(4, F, f)(\nu(f) = 2)$，$S$ 在 $\mathrm{GL}(4, F)$ 中与 $I^{(2)} \otimes \mathrm{Mat}_2 F$ 共轭.

(iv) $G \leq O(2, F, H)(\nu(H) = 0)$，$S$ 是由 $\mathrm{SO}(2, F, H)$ 生成的 F 的二次扩域.

(v) $G = \Omega(4, F, H)(\nu(H) = 0)$，$S$ 是 F 上的广义四元数体.

证明　由于 S 包含 FI，$W = \mathrm{Mat}_{1\times r} F$ 的 FS-子模也就是右 S-子模.

先设 S 在 W 上可约，由于典型群 G 正规化非纯量可约子集 S，与定理 2.6.1 的证明同样可知下面三种情况之一成立：

(1) G 在 W 上可约. 此时例外情况(ii)中的 $G \leq O^+(2, 3)$ 成立.

(2) W 是非齐次 S-模，G 在 W 上的作用非本原. 此时例外情况(ii)中的其余情形成立.

(3) W 是齐次 S-模. 用适当的 $P \in \mathrm{GL}(r, F)$ 作共轭之后，得到 $\tilde{S} = PSP^{-1} = I^{(m)} \otimes S_1$，$\tilde{G} \leq \mathrm{GL}(m, K) \otimes \Lambda$，其中 K 是 S_1 在 $\mathrm{Mat}_d F$ 中的中心化子(是体)，Λ 是 S_1 在 $\mathrm{GL}(d, F)$ 中的正规化子，$d = r/m$. 由于 S 非纯量且可约，$2 \leq d < r$. 这仅在例外情况(iii)下才有可能.

现在设 S 在 W 上不可约. 由引理 2.5.6 知 S 在 R 中的中心化子是体(且包含 F)，且存在 $P \in \mathrm{GL}(r, F)$，将 S 共轭到 $\tilde{S} =$

$PSP^{-1} = \mathrm{Mat}_m K$，其中 K 是 $\mathrm{Mat}_d F$ 的子体 $(d = n/m)$，且使 $\mathrm{Mat}_{1\times d}F$ 是 1 维右 K-空间. K 在 $\mathrm{Mat}_d F$ 中的中心化子 K_L 是 K 的对偶体，$\tilde{K} = I^{(m)} \otimes K_L$ 就是 $\tilde{S}$ 在 $\mathrm{Mat}_r F$ 中的中心化子. $\tilde{G} = PGP^{-1}$ 正规化 $\tilde{S}$ 从而正规化 $\tilde{K}$. 因而含于 $\tilde{K}$ 在 $\mathrm{GL}(r, F)$ 中的正规化子 $\mathrm{GL}(m, K) \rtimes \mathrm{Gal}K/F$.

如果 $K = F$，$d = 1$，则 $\tilde{S} = R$ 从而 $S = R$，如所欲证.

设 $d \geq 2$. $\tilde{G}$ 定驻 W 上的 m 维 K_L-空间结构，这只有在例外情况(i)、(iv)或(v)下才可能成立. ▌

上面的引理 5.3.4 已经大体上足够在第 7 章中研究 $N_1 \otimes N_2$ 的扩群时应用了. 但是它还没有对 $d = r/m \geq 2$ 的情况定出 $R = \mathrm{Mat}_r F$ 中被 $\mathrm{SL}(m, E_L)$ 正规化的子环 $S \supseteq I^{(m)} \otimes K_R$ 的可能的构造. 而且当 $n = 2$ 时，集合 $S = \{A \in R \mid T_{21}(A) \in X\}$ 不一定是环. 但此时 S 一定是加群. 故有必要研究被 $\mathrm{GL}(r, F)$ 的某个子群 G 正规化的加群 S 的可能的构造. G 通过共轭作用于 R 上. 在这个意义上可以将 R 看作是 G 作用下的模，而我们就是要确定它的所有的可能的子模 S. 这比 S 是环的情况要困难得多. 我们先在下面的引理 5.3.5 中作较为一般的讨论，然后将所得的结论应用于本书要处理的情况.

引理 5.3.5 设 $r \geq 2$，R_1 是含 1 环，E 是 R_1 的子体，K 是 E 在 R_1 中的中心化子，且 E、K 生成的环等于 R_1. 设 S 是 $\mathrm{Mat}_r R_1$ 的加法子群，且被 $N = \mathrm{SL}(r, E)$ 正规化. 当 $r = 2$ 且 $E = F_2$ 时还假定 S 是左 K-空间或右 K-空间. 则下列结论之一成立：

(i) $S = QI^{(r)}$，Q 是 K 的加法子群.

(ii) 存在 R_1 的非零加法子群 L，使

$$S \supseteq \{A = (a_{ij})_{r\times r} \mid a_{ij} \in L, (\forall i \neq j),$$

$$a_{ii} \in ELE, (\forall i), \mathrm{Tr}A \in Q\},$$

其中 Q 是 R_1 的加法子群，且包含所有的 $as - sa (a \in E, s \in L)$，$ELE$ 是 L 张成的双 E-空间. 且当 $r \geq 3$，或当 E 是特征 $\neq 2$ 的域，

或当 E 非交换且 $\dim_{Z(E)}E < \infty$ 时,L 自身就是 E 上的双空间(即 $L = ELE$). 当 E 是特征 2 的域时,L 是 E^2 上的双空间.

(iii) $E = F_2$ (从而 $R_1 = K$) 且 $r = 2$. $S = KI \oplus KJ$ 或 $S = (KI \oplus KJ)H$, 其中

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

设 R_1 是单环,且 $L \neq 0$ 是双 E-空间又是双 K-空间,则 $L = R_1$.

如果 R_1 是单环,S 是环且真包含 $KI^{(r)}$,并且以下条件之一成立: (a)$r \geq 3$; (b)E 是域;(c)E 非交换且 $\dim_{Z(E)}E < \infty$. 则除引理结论(iii)所述情形外, $S = \mathrm{Mat}_r R_1$.

证明 对任意 $t \neq l$, 定义集合

$$L = \{s \in R_1 \mid sE_{tl} \in S\},$$

$$L_1 = \{s \in R_1 \mid \text{存在 } (a_{ij})_{r\times r} \in S \text{ 使 } a_{tl} = s\}.$$

则易见 L 与 L_1 都是加群,且 $L \subseteq L_1$. 考虑 $N = \mathrm{SL}(r, E)$ 中的置换阵在 S 上的共轭作用可知 L 与 L_1 都与 t、l 的选取无关.

(5.3.5.1) 设 $r \geq 3$ 或 $E \neq F_2$, 则 $L = L_1$.

任取 $s \in L_1$, 我们证明 $s \in L$. 为此,只须证明 $sE_{ij} \in S$ 对某一对 $i \neq j$ 成立即可.

由 L_1 的定义知,存在 $A_0 = (a_{ij})_{r\times r} \in S$, 使 $a_{12} = s$. 取

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 1 & 1 & O \\ & O & \ddots & I \end{pmatrix}^{-1} A_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 1 & 1 & O \\ & O & \ddots & I \end{pmatrix} - A_0$$

$$= \begin{pmatrix} s & 0 & O \\ * & -s & \vdots \\ \vdots & O & O \end{pmatrix} \in S.$$

如果 $r \geq 3$, 则进一步有:

$$A_2 = T_{31}(1)A_1T_{31}(1)^{-1} - A_1 = a_{13}E_{21} + sE_{31} \in S,$$

$$T_{23}(1)A_2T_{23}(1)^{-1} - A_2 = sE_{21} \in S.$$

如所欲证.

如果 $r = 2$ 但 $\mathrm{char}E \neq 2$，则

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} - A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix} = sE_{21} \in S,$$

仍达到目的.

现在只剩下 $r = 2$ 且 $\mathrm{char}E = 2$ 的情形. 但 $E \neq F_2$.

先证：由 $A_0 = \begin{pmatrix} * & s \\ * & * \end{pmatrix} \in S$ 可得到 $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & s \\ c & 0 \end{pmatrix}$，对某个 c. 且当 $a_{21} = 0$ 时，$c = 0$，$B_0 = sE_{12}$，$s \in L$.

注意，E 的中心 $Z(E) = E \cap K$ 含于 R_1 的中心. 如果 $Z(E) \neq F_2$，存在 $1 \neq \lambda \in Z(E)^*$，于是

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} - A_0 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (\lambda^2 + 1)s \\ * & 0 \end{pmatrix} \in S, \end{aligned}$$

再取 $\Lambda = \mathrm{diag}((\lambda + 1), (\lambda + 1)^{-1})$ 对 A_1 作共轭，得到的 $B_0 = \Lambda^{-1}A_1\Lambda \in S$，即具有所需形式.

设 $Z(E) = F_2 \neq E$. 则 E 非交换，存在 E^* 的换位子群中的元素 $c \neq 1$. 取

$$A_1 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} - A_0 = \begin{pmatrix} * & (c + 1)s \\ * & 0 \end{pmatrix} \in S,$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}^{-1} - A_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (c + 1)s(c^{-1} + 1) \\ * & 0 \end{pmatrix} \in S, \end{aligned}$$

再用 $\Lambda = \mathrm{diag}(c+1, c(c+1)^{-1}) \in \mathrm{SL}(2, E)$ 对 A_2 作共轭，得到 $B_0 = \Lambda^{-1}A_2\Lambda \in S$，具有所需形式.

容易验证：当 $a_{21} = 0$ 时，由上述方法得到的 $B_0 = sE_{12}$. 因此，只要能选取 $\widetilde{A}_0 = (a_{ij})_{2\times 2} \in S$ 使 $a_{12} = s$ 且 $a_{21} = 0$，即有 $s \in L$.

我们从 B_0 出发，构造一个所需的$\widetilde{A}_0$. 为此，取

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} B_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - B_0 = \begin{pmatrix} s & 0 \\ s & s \end{pmatrix} \in S,$$

再用置换阵 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in N$ 对 B_1 作共轭，得到的

$$\widetilde{A}_0 = P^{-1}B_1P = \begin{pmatrix} s & s \\ 0 & s \end{pmatrix} \in S,$$

即符合要求.

(5.3.5.2) *在引理所述的条件下，L 是 E 或 E^2 上的双空间.*

对任意 $s \in L$ 和 $\lambda \in E^*$，取 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda^{-1}, I^{(r-2)}) \in N$，$A_1 = \Lambda(sE_{1r})\Lambda^{-1} \in S$，$A_2 = \Lambda^{-1}(sE_{r1})\Lambda \in S$. 则当 $r \geq 3$ 时，由 $A_1 = (\lambda s)E_{1r} \in S$ 及 $A_2 = (s\lambda)E_{r1} \in S$，得 λs, $s\lambda \in L$，L 是双 E-空间. 当 $r = 2$ 但 E 是域时，E 含于 R_1 的中心，从而中心化 L，由 $A_1 = (\lambda^2 s)E_{12} \in S$ 知 $\lambda^2 s \in L$，即 L 在 E 的平方元集合 $E^2 = \{\lambda^2 \mid \lambda \in E\}$ 的乘法下不变. 当 $\mathrm{char}\, E \neq 2$ 时，每个 $\lambda \in E^*$ 可写成平方元的代数和

$$\lambda = ((\lambda+1)/2)^2 - (\lambda/2)^2 - (1/2)^2,$$

从而 $\lambda L = L$，即 L 是 E-空间，当然也是双 E-空间. 当 $\mathrm{char} E = 2$ 时 E^2 是域. 如果 $E^2 = E$，即 E 是完全域，则 L 是 E-空间. 否则，只能说 L 是 E^2 上的向量空间.

现在设 $r = 2$，E 非交换，且在中心 $Z(E)$ 上的维数是有限的. 由推论 1.7.3 知，E^* 的换位子群 C 生成的加群等于 E. 任取 $s \in L$，$c \in C$，则 $\Lambda_1 = \mathrm{diag}(c, 1) \in N$ 和 $\Lambda_2 = \mathrm{diag}(1, c^{-1}) \in N$ 的

共轭作用将 $sE_{12}\in S$ 分别送到 $\Lambda_1(sE_{12})\Lambda_1^{-1}=(cs)E_{12}\in S$ 和 $\Lambda_2(b_1E_{12})\Lambda_2^{-1}=(sc)E_{12}\in S$. 这说明 L 在 C 的左乘和右乘作用下都不变,从而在 C 所生成的加群 E 的左乘和右乘作用下不变. 即 L 是 E 上的双空间.

(5.3.5.3) **如果引理的结论(i)、(iii)都不成立,则 $L=L_1\neq 0$.**

当 $r\geq 3$ 或 $E\neq F_2$ 时,在(5.3.5.1)中已证明 $L=L_1$. 只要证明 $L_1\neq 0$ 即可. 若不然,则 $L_1=0$, 也就是说 S 中所有的矩阵都是对角阵. 如果 $S\subseteq KI$, 显然引理结论(i)成立. 既然我们假定了(i)不成立,必可选 $A_0=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_r)\in S$, 且 $A_0\notin KI$. 对每个 $i\geq 2$, $s\in E^*$, 有

$$A_1=T_{1i}(s)A_0T_{1i}(s)^{-1}-A_0=bE_{1i}\in S,$$

$b=sa_i-a_1s\in L$. 只要能选取 i 和 s 使 $b\neq 0$ 即得 $L\neq 0$. 若不然,则对所有的 i 和 s 都有 $b=0$. 取 $s=1$ 得 $a_i=a_1$, $\forall i$. 进而 $sa_1=a_1s$ 对所有的 $s\in E^*$ 成立,a_1 含于 E 的中心化子 K. 但这样则有 $A_0=a_1I\in KI$, 这与 A_0 的取法相矛盾. 这就证明了 $L_1\neq 0$.

以下设 $r=2$ 且 $E=F_2$. 此时 E 与 K 生成的环 R_1 等于 K,是特征 2 的体. 且按引理假定,S 是左 K-空间或右 K-空间. 只要能证明 $L\neq 0$, 即存在 $0\neq s\in K$, 使 $sE_{12}\in S$, 则对任意 $\alpha\in K$ 有 $(\alpha s^{-1}I)(sE_{12})=\alpha E_{12}\in S$ 或 $(sE_{12})(s^{-1}\alpha)=\alpha E_{12}\in S$, 从而 $\alpha\in L$, 即 $L=K$ 从而 $L_1=L=K\neq 0$. 因此,只须证明 $L\neq 0$ 即可.

由于(i)不成立,必可选 $A_0=(a_{ij})_{2\times 2}\in S$, 使 $A_0\notin KI$. 在此考虑

$$A_1=T_{21}(1)A_0T_{21}(1)-A_0=a_{12}I+b_1E_{21}\in S,$$

其中
$$b_1=a_{11}+a_{12}+a_{22};$$

$$A_2=T_{12}(1)A_0T_{12}(1)-A_0=a_{21}I+b_2E_{12}\in S,$$

其中
$$b_2=a_{11}+a_{21}+a_{22}.$$

先设可选 A_0 使 $b_2 \neq 0$. 如果 $a_{21}=0$，则由 $A_2=b_2E_{12}\in S$ 已有 $0\neq b_2\in L$，$L\neq 0$. 若不然，设 $a_{21}\neq 0$. 用 A_2 代替 A_0 可化为 $a_{12}\neq 0$ 且 $a_{11}=a_{22}$ 的情形. 由这样的 A_0 得到的 $b_1=a_{12}\neq 0$，$A_1=a_{12}(I+E_{21})$. 由于假定 S 是 K 上的左空间或右空间，用 K 乘以 A_2 可知 $a(I+E_{21})\in S$ 对所有的 $a\in K$ 成立. 这又导致

$$T_{12}(1)a(I+E_{21})T_{12}(1)=a(E_{12}+E_{21})\in S,$$

其中 $E_{12}+E_{21}$ 就是引理结论(iii)所说的 H. 而引理结论(iii)所述的 $J=H+E_{22}$，且 $JH=I+E_{21}\in S$. S 已经包含 $S_1=(KI+KJ)H$. 如果 $S=S_1$，则(iii)成立，这与(5.3.5.3)的假设相矛盾. 故 S 还应包含 $B_0=(b_{ij})_{2\times 2}\notin S_1$. 不妨用 $B_0-b_{11}(I+E_{21})-b_{12}H\in S$ 代替 B_0，化为 $b_{11}=b_{12}=0$ 的情形. 当然 $B_0\neq 0$. 如果 $b_{22}=0$，则 $B_0=b_{21}E_{21}$，b_{21}是 L 中的非零元，$L\neq 0$. 否则，$b_{22}\neq 0$，$T_{21}(1)B_0T_{21}(1)-B_0=b_{22}E_{21}\in L$，$L$ 含有非零元 b_{22}，仍有 $L\neq 0$.

如果可选 A_0 使 $b_1\neq 0$，则用 $A_1\in S$ 代替 A_0，可使 $b_2\neq 0$，正是刚才已处理了的情形.

以下设对所有的 $A_0\in S\backslash KI$ 都有 $b_1=b_2=0$，即 $a_{11}+a_{12}+a_{22}=a_{11}+a_{21}+a_{22}=0$. 于是 $a_{12}=a_{21}=a_{11}+a_{22}$. 如果 $a_{12}=0$，则 $A_0=a_{11}I\in KI$，产生矛盾. 故 $a_{12}\neq 0$，$A_1=a_{12}I\in K^*I$. 用 K 乘以 A_1，可知 $S\supset KI$. 于是不妨在一开始用 $A_0-a_{11}I\in S$ 代替 A_0，化为 $a_{11}=0$ 的情形. 现在 $a_{12}=a_{21}=a_{22}\neq 0$，$A_0=a_{12}J$，其中 $J=E_{12}+E_{21}+E_{22}$ 如引理结论(iii)所定义. S 包含 $S_0=KI+KA_0=KI+KJ$. 如果 $S=S_0$，则引理结论(iii)成立，与我们的假设相矛盾. 故 S 包含 $B_0\notin S_0$. 用 B_0 代替 A_0 必然导致 $b_1\neq 0$ 或 $b_2\neq 0$，属于已解决的情形.

(5.3.5.4) *如果引理的结论*(i)、(iii)*都不成立，则结论*(ii)*成立*.

由 L_1 的定义知，所有的 $A=(a_{ij})_{r\times r}\in S$ 的非对角元 $a_{ij}(i\neq j)$ 都含于 $L_1=L$. 反过来，如果矩阵 $B=(b_{ij})_{r\times r}\in \mathrm{Mat}_rR_1$ 的对

角元全都为 0,非对角元全都含于 L,则 $B=\sum_{i\neq j}b_{ij}E_{ij}\in S$. 特别,可取所有的 $b_{ij}=a_{ij}\in L$, 得到 A 的非对角部分 $B\in S$, 从而 A 的对角部分 $A_1=\mathrm{diag}(a_{11},\cdots,a_{rr})=A-B$ 也含于 S.

剩下的事情是讨论 $A\in S$ 的对角部分应满足的条件.

对任意 $s\in L$ 和任意 $i\neq j$ (当然 $1\leq i, j\leq r$), 有 $sE_{ij}\in S$. 对任意 $\alpha\in E$, 取 $P=T_{ji}(\alpha)\in \mathrm{SL}(r,E)$, 得

$$\Delta=P(sE_{ij})P^{-1}-sE_{ij}-(\alpha s\alpha)E_{ji}$$

$$=(\alpha s)E_{jj}-(s\alpha)E_{ii}\in S.$$

所有这样的 Δ 生成的加群 Λ 含于 S,

$$\Lambda=\{A=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_r)\,|\,a_i\in ELE,\ \mathrm{Tr}A\in Q_0\},$$

其中 Q_0 是所有的 $as-sa(a\in E, s\in L)$ 生成的加群. 设 $Q=\{\mathrm{Tr}A\,|\,A=(a_{ij})_{r\times r}\in S,\ a_{ij}\in ELE\}$. 显然 Q 是加群. 只须证明: 如果 $A=(a_{ij})_{r\times r}$ 满足条件 $a_{ij}\in L$ (当 $i\neq j$) 及 $a_{ii}\in ELE(\forall i)$, 且 $\mathrm{Tr}A=q\in Q$, 则 $A\in S$. 由 Q 的定义知,存在 $B=(b_{ij})_{r\times r}\in S$,使所有的 $b_{ij}\in L(i\neq j)$, $b_{ii}\in ELE$, $\mathrm{Tr}B=q$. 于是 $A-B$ 的非对角元含于 L,对角元含于 ELE,且 $\mathrm{Tr}(A-B)=0\in Q_0$, 故 $A-B\in S$, 从而 $A=B+(A-B)\in S$.

以下证明 R_1 是单环的情形下引理的结论.

(5.3.5.5) 如果 R_1 是单环,L 是非零双 K-空间,并且是双 E-空间,则 $L=R_1$.

L 在 K 和 E 的左乘和右乘作用下都不变,从而在 K 和 E 生成的环 R_1 的左乘和右乘作用下不变. 即 L 是 R_1 的双边理想,再由 $L\neq 0$ 及 R_1 是单环即得 $L=R_1$.

(5.3.5.6) 设 R_1 是单环,S 是环且真包含 $KI^{(r)}$,并且以下条件之一成立:

(a) $r\geq 3$; (b) E 是域; (c) E 非交换且 $\dim_{Z(E)}E<\infty$.

则除引理结论(iii)所述情形外, $S=\mathrm{Mat}_r R_1$.

由(5.3.5.3)知:除引理结论(iii)所述情形外, $L\neq 0$. 由 S 是

环且包含 $KI^{(r)}$ 知，S 在 $KI^{(r)}$ 的左乘和右乘下不变，由此可知 L 是双 K-空间. 由(5.3.5.2)知在条件(a)或(c)下 L 是双 E-空间. 当 E 是域时，$E \subseteq K$，L 是双 K-空间也是双 E-空间. 于是由(5.3.5.4)知 $L = R_1$.

对任意 $1 \leq i, j \leq r, i \neq j$ 以及 $s \in R_1 = L$，由 L 的定义知 S 包含 sE_{ij}，且由 S 是环知，S 还包含 $(sE_{ij})E_{ji} = sE_{ii}$. 所有这些 sE_{ij}，sE_{ii} 生成加群 $\mathrm{Mat}_r R_1 \subseteq S$. 从而 $S = \mathrm{Mat}_r R_1$. ▍

将引理 5.3.5 应用于我们感兴趣的情况，则得到如下引理：

引理 5.3.6 设 K 是体，E、F 是 K 的子体，$\dim_F K = d < \infty$，F 是 E 在 K 中的中心化子，且 E 与 F 在 K 中生成的子体等于 K. 取 K 的左 F-基将 K_R、E_L 写成 $\mathrm{Mat}_d F$ 的子体. 设 S 是 $\mathrm{Mat}_{rd} F$ 的子环，真包含 $I^{(r)} \otimes K_R$，且 S 被 $\mathrm{SL}(r, E_L)$ 正规化. 设以下条件之一成立：(a) $r \geq 3$；(b) E 非交换且 $\dim_{Z(E)} E < \infty$；(c) E 是域. 则 $S = \mathrm{Mat}_{rd} F$，仅在如下情形例外：

$$E = F_2, \quad r = 2, \quad S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a+b \end{bmatrix} \middle| a, b \in K \right\}.$$

证明 如所熟知，全方阵环 $R_1 = \mathrm{Mat}_d F$ 是单环. 为了应用引理 5.3.5 得出所需结论，只需证明：(1) K_R 是 E_L 在 R_1 中的中心化子；(2) E_L 和 K_R 生成的环等于 R_1.

记 W 是 K 的加法群，$R = \mathrm{End}_Z W$ 是 W 作为加群的自同态环. 则 $R_1 = \mathrm{End}_F W$ 是 F_L 在 R 中的中心化子，而 E_L 在 R_1 中的中心化子，也就是 E_L 与 F_L 生成的体 K_1 在 R 中的中心化子. 由 F、E 生成 K 知，F_L、E_L 生成 K_L. 故 E_L 在 R_1 中的中心化子等于 K_L 在 R 中的中心化子 K_R. 即(1)成立.

设 K_R 与 E_L 在 R_1 中生成的子环为 R_0. $W = \mathrm{Mat}_{1\times d} F$ 是不可约右 K_R-模，当然也是不可约右 R_0-模. $\mathrm{End}_{R_0} W$ 等于 K_R 与 E_L 在加群自同态环 $R = \mathrm{End}_Z W$ 中的中心化子的交. K_R 在 R 中的中心化子为 K_L，由 E 在 K 中的中心化子等于 F 可知，E_L 在 K_L 中的中心化子等于 F_L. 即 $\mathrm{End}_{R_0} W = F_L$. 于是由 Wedderburn 定理(见本

书引理 2.5.4)即得 $R_0 = \mathrm{Mat}_d F = R_1$. (2)成立.

于是可由引理 5.3.5 得到所述的结论. ▌

引理 5.3.7 设 K 是体,自然数 $r \geq 2$, $N = \mathrm{GL}(r, K)$ 或 $\mathrm{SL}(r, K)$. 当 $r = 2$ 时只考虑 K 是域的情形. 设 S 是 $R = \mathrm{Mat}_r K$ 的加法子群,且被 N 正规化. 则 S 具有下列形式之一:

(i) $S = UI^{(r)}$, U 是 K 的中心 $Z(K)$的加法子群.

(ii) $S = \mathrm{Mat}_r K$.

(iii) $S = \mathrm{Tr}^{-1}(Q) = \{A \in \mathrm{Mat}_r K \mid \mathrm{Tr} A \in Q\} \supseteq \mathrm{Tr}^{-1}(0) = \mathrm{sl}(r, K)$, Q 是 K 的加法真子群且包含所有的 $ab - ba$(a、$b \in K$).

(iv) $r = 2$, $K = F$ 是特征 2 的非完全域,

$$N = \mathrm{SL}(2, K),\ S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \middle| b、c \in L \right\},$$

L 是 K 在 K^2 上的非零真子空间.

(v) $r = 2$, $K = F = F_2$,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \middle| a, b \in F_2 \right\} = F_4;\ 或\ S = F_4 H,$$

其中 $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

证明 本引理的 K 相当于引理 5.3.5 的 E 及 R_1,而 $Z(K)$相当于引理 5.3.5 中的 K. 设(i)和(v)不成立,则引理 5.3.5 的结论(ii)成立. 于是 $L = \{s \in K \mid sE_{12} \in S\} \neq 0$. L 在 K 上生成的双 K-空间 $KLK = K$. 设 Q_0 是所有的 $as - sa$($a \in K$, $s \in L$) 生成的加群. 则 S 包含 K 上所有这样的对角阵 Λ,它们的迹 $\mathrm{Tr}\Lambda \in Q_0$. 特别,$S$ 包含 K 上迹为 0 的所有的对角阵.

如果 $L = K$, 由引理 5.3.5 结论(ii)知, $S = \mathrm{Tr}^{-1}(Q)$ 对 K 的某个加法子群 Q 成立,且 Q 包含所有的 $ab - ba$, $\forall a$、$b \in K$. 当 $Q = K$ 时 $S = \mathrm{Mat}_r F$, (ii)成立,而当 $Q \neq K$ 时(iii)成立.

$L \neq K$ 的唯一情形是：$r = 2$，K 是特征 2 的非完全域(因而是无限域)，L 是 K^2 上的向量空间. 此时迹为 0 的对角阵也是所有的纯量阵 $aI^{(2)}$，它们都含于 S. 对任一 $A = (a_{ij})_{2\times 2} \in S$，取 $1 \neq \lambda \in K^*$，$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda^{-1}) \in N$，$\Lambda_1 = \mathrm{diag}(\lambda + 1, (\lambda + 1)^{-1}) \in N$，则

$$A_1 = \Lambda_1^{-1}(\Lambda A \Lambda^{-1} - A)\Lambda_1 = a_{12}E_{12} + \tilde{a}_{21}E_{21} \in S$$

对某个 $\tilde{a}_{21} \in K$. 由此得

$$T_{21}(1)A_1T_{21}(1) - A_1 - a_{12}I = a_{12}E_{21} \in S,\ a_{12} \in L.$$

如果 S 包含一个 $A_0 = (a_{ij})_{2\times 2}$ 使 $\mathrm{Tr}A_0 = a_{11} + a_{22} = a \neq 0$，则对任意的 $\lambda \in K$，S 包含

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - A_0 = \begin{pmatrix} * & \lambda a + \lambda^2 a_{21} \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

由引理 5.3.5 知 $\lambda a + \lambda^2 a_{21} \in L$. 但 $a_{21} \in L$，从而 $\lambda^2 a_{21} \in L$. 于是 $(\lambda a + \lambda^2 a_{21}) - \lambda^2 a_{21} = \lambda a \in K$. 当 λ 取遍 K 时 λa 也取遍 K. 这就证明了 $L = K$. 从而(iii)或(ii)成立. 因此，如果 $L \neq K$，则 $\mathrm{Tr}A = 0$ 即 $a_{11} = a_{22}$ 对所有的 $A = (a_{ij})_{2\times 2} \in S$ 成立. 这正是引理的结论(iv)所述的情形. ▌

前面定出了全方阵环 $R = \mathrm{Mat}_r K$ 在线性群的共轭作用下不变的加法子群. 我们还需要定出在线性群的相合作用下不变的加法子群.

我们采用如下的记号：设体 K 上有对合 $J: a \mapsto \bar{a}$，$\varepsilon \in Z(K)^*$ 满足条件 $\varepsilon\bar{\varepsilon} = 1$，记 $M^{J,\varepsilon}(r, K) = \{A \in \mathrm{Mat}_r K \mid \bar{A}' = \varepsilon A\}$，即 $\mathrm{Mat}_r K$ 中所有的 ε-Hermite 方阵的集合，在 $J = 1$ 时也记为 $M^\varepsilon(r, K)$. $M_{J,\varepsilon}(r, F) = \{A + \varepsilon\bar{A}' \mid A \in \mathrm{Mat}_r K\}$，即 $\mathrm{Mat}_r K$ 中所有的迹式 ε-Hermite 方阵的集合. 如果 L 是 $K_{J,\varepsilon}$ 与 $K^{J,\varepsilon}$ 之间的加法子群，且满足条件 $aL\bar{a} = L$，$\forall a \in K^*$，则记 $M_L^{J,\varepsilon}(r, K) = \{A = (a_{ij})_{r\times r} \in M^{J,\varepsilon}(r, K) \mid a_{ii} \in L,\ \forall i\}$，也简记为 $M_L^\varepsilon(r, K)$ 或 M_L

(r, K). 特别当 $L=K^{J,\varepsilon}$或 $K_{J,\varepsilon}$ 时，$M_L(r, F)$ 就分别是 $M^{J,\varepsilon}(r, K)$和 $M_{J,\varepsilon}(r, K)$.

显然，$\mathrm{Mat}_r K$ 以及所有的 $M_L^\varepsilon(r, K)$都是在相合作用 $A \mapsto PA\overline{P}'$ 下不变的加法子群.

引理 5.3.8　设 K 是体，且带有对合 $J: a \mapsto \overline{a}$，自然数 $r \geq 2$. 当 $r=2$ 时，只考虑 K 是域且 $J=1$ 的情形. 设 $N=\mathrm{GL}(r, K)$ 或 $\mathrm{SL}(r, K)$，$M \neq 0$ 是 $\mathrm{Mat}_r K$ 的加法子群，且在 N 的相合作用下不变，即：$\forall A \in M, P \in N$，有 $PA\overline{P}' \in M$ 成立. 则 M 具有下列形式之一：

(i) $M = \mathrm{Mat}_r K$.

(ii) $M = M_L^\varepsilon(r, K)$，对某个 ε 和 L.

(iii) $r=2$, $K \neq F_2$, $M=UH$, $H=E_{12}-E_{21}$，U 是 K 的加法真子群.

(iv) $K \neq F_2$, $N=\mathrm{SL}(2, K)$, $M=M^+(2, K) \oplus QE_{12}$，$Q$ 是 K 的加法子群，且 $0 \neq Q \neq K$.

(v) $r=2$, $K=F_2$, $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \middle| a, b \in F_2\right\} \cong F_4$

或
$$M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ a+b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in F_2\right\}.$$

证明　当 $r=2$ 时，$N \geq \mathrm{SL}(2, K)=\mathrm{Sp}(2, K, H)$，其中 $H=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 对每个 $g \in \mathrm{SL}(2, K)$ 有 $gHg'=H$，从而 $(gH)^{-1}=g'H^{-1}$. 记 $S=MH^{-1}=\{AH^{-1} \mid A \in M\}$，则 $gSg^{-1}=gM(gH)^{-1}=(gMg')H^{-1}=MH^{-1}=S$ 对每个 $g \in \mathrm{SL}(2, K)$ 成立. S 已在引理 5.3.7 中定出，由此即可知道 $M=SH$ 的可能的构造. 当 S 为引理 5.3.7 的类型(i)～(v)时，$M=SH$ 分别为本引理的类型(iii)、(i)、(iv)、(ii)、(v). 当 $N=\mathrm{GL}(2, K)$ 再选择其中在 $\mathrm{diag}(\lambda, 1)(\forall \lambda \in K^*)$ 相合下不变的 MH. 由于任一非零的 aE_{12}可被适当的 $\mathrm{diag}(\lambda, 1)$ 相合到任意 $bE_{12} \in KE_{12}$，可知类型

(iv)对 $N=\mathrm{GL}(2, K)$ 的情形不会出现.

以下只须讨论 $r\geq 3$ 的情形.

下面分两种情形讨论 M 的构造.

情况1 $J=1$，且 $M\subseteq M_0(r, K)$，即 M 中的矩阵都是交错方阵.

任取 $0\neq A_0\in M$，用适当的 $PA_0P'\in M$ 代替 A_0，可设 $A_0=\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \cdots\right)$. 对任意 $s\in K$，有

$$A_1=T_{31}(s)A_0T_{13}(s)-A_0=sE_{32}-sE_{23}\in M.$$

用 $\mathrm{SL}(r, K)$中的置换阵对 A_1 作相合，知 M 包含所有的 $sE_{ij}-sE_{ji}$，$\forall s\in K^*$ $(i\neq j)$. M 包含从而等于这些矩阵生成的加群 $M=M_0(r, K)$.

情况2 M 包含非交错方阵 A_0.

经过相合后，可设 $A_0=(a_{ij})_{r\times r}\in M$ 的第一行 $(a_{11}, \cdots, a_{1r})=(a, 0, \cdots, 0)$，其中 $a\neq 0$.

对任意 s、$s_1\in K^*$，有

$$A_1=T_{21}(s)A_0T_{12}(\bar{s})-A_0=\begin{pmatrix}0 & a\bar{s} & O\\ sa & * & O\\ O & \vdots & O\end{pmatrix}\in M,$$

$$\begin{aligned}A_2&=T_{31}(\overline{s_1})A_1T_{13}(s_1)-A_1\\&=(sas_1)E_{23}+(\overline{s_1}a\,\bar{s})E_{32}\in M.\end{aligned}$$

A_2 依赖于 s、s_1 的选取，记为 $A_2(s, s_1)$. 对任意的 $b\in K^*$，矩阵

$$\begin{aligned}A_3&=A_2(\bar{b}, a^{-1})-A_2(a^{-1}, \bar{b})\\&=((\bar{b}aa^{-1})E_{23}+(\overline{a^{-1}}ab)E_{32})\\&\quad-((a^{-1}a\bar{b})E_{23}+(ba\overline{a^{-1}})E_{32})\\&=b_0E_{32}\in M,\end{aligned}$$

其中 $b_0 = \overline{a}^{-1}ab - ba\overline{a}^{-1}$.

如果能选 $b \in K^*$ 使 $b_0 \neq 0$，则对任意的 $c \in K$ 和 $i = 1、2$，有

$$T_{i3}(cb_0^{-1})(b_0E_{32})T_{3i}(\overline{cb_0^{-1}}) - b_0E_{32} = cE_{i2} \in M.$$

用 N 对 cE_{12}、cE_{22}作相合，可知 M 包含所有的 $cE_{ij}(1 \leq i, j \leq r)$，从而 $M = \mathrm{Mat}_r K$.

现在设 $b_0 = \overline{a}^{-1}ab - ba\,\overline{a}^{-1} = 0$ 对所有的 $b \in K^*$ 成立. 取 $b = 1$ 可知 $\overline{a}^{-1}a$ 与 $a\overline{a}^{-1}$ 取同一个值 $\overline{\varepsilon} \in K^*$，且 $\varepsilon\overline{\varepsilon} = 1$. 再由 $b_0 = \overline{\varepsilon}b - b\,\overline{\varepsilon} = 0$ 对所有 $b \in K^*$ 成立，知$\overline{\varepsilon}$是 K^* 的中心元，从而 ε 是中心元. 由 $\overline{a}^{-1}a = \overline{\varepsilon}$ 得 $\overline{a} = \varepsilon a$，即 a 是 ε-对称元. 从而 $B_1 = A_2(b, a^{-1}) = bE_{23} + \varepsilon\,\overline{b}E_{32} \in M$ 是 ε-Hermite 方阵. 且

$$B_0 = T_{23}(1)B_1T_{32}(1) - B_1 = (b + \varepsilon\,\overline{b})E_{22} \in M.$$

经相合后，可知 M 包含所有的 $bE_{ij} + \varepsilon\,\overline{b}E_{ji}$ 及 $(b + \varepsilon\,\overline{b})E_{ii}(b \in K^*, i \neq j)$. 这导致 M 包含所有的迹式 ε-Hermite 方阵，即

$$M \supseteq M_{J,\varepsilon}(r, K).$$

先设 M 中的方阵都是 ε-Hermite 阵，即 $M \subseteq M^{J,\varepsilon}(r, K)$. 记 L 为 M 中所有元素的所有对角元的集合，则 $K_{J,\varepsilon} \subseteq L \subseteq K^{J,\varepsilon}$. 对任意的 $a \in L$，存在 $A_0 = (a_{ij})_{r\times r} \in M$，使某个对角元 $a_{ii} = a$. 用适当的置换阵对 A 作相合后可使 $a_{11} = a$. 取 $B \in \mathrm{Mat}_r K$ 的所有的非对角元都与 A 相同，而 B 的所有的对角元都为 0，则 B 是迹式 ε-Hermite 方阵，含于 M. 不妨用 $A_0 - B \in M$ 代替 A，化为 A_0 是对角阵 $\mathrm{diag}(a, a_{22}, \cdots)$ 的情形. 对任意 $\lambda \in K^*$，

$$\begin{aligned} A_1 &= T_{21}(\lambda)A_0T_{12}^*(\overline{\lambda}) - A_0 - ((\lambda a)E_{21} + (\overline{\lambda}a)E_{12}) \\ &= (\lambda a\,\overline{\lambda})E_{22}. \end{aligned}$$

这说明 $\lambda a\,\overline{\lambda} \in L$，从而 $\lambda L\,\overline{\lambda} \subseteq L$. 特别取 $\lambda = 1$，可知 $aE_{22} \in M$. 再用置换阵作相合，可知 $aE_{ii} \in L$ 对所有的 i 成立. 这就证明了 $M = M_L(r, K)$.

再设 M 含有非 ε-Hermite 方阵 $A_0 = (a_{ij})_{r\times r}$. 我们证明此时 $M = \mathrm{Mat}_r K$.

如果可选 A_0 使 $a_{ji} \neq \varepsilon\overline{a_{ij}}$ 对某一对 $i \neq j$ 成立,用置换阵作相合之后,不妨设 $a_{13} \neq \varepsilon\overline{a_{31}}$. 从 A_0 减去 M 中适当的迹式 ε-Hermite 方阵之后,可设 $a_{ij} = 0$, $\forall i > j$, 即 A_0 是上三角阵. 特别 $a_{31} = 0$, 而 $a_{13} = a \neq 0$. 对任意 $s \in K^*$, 有

$$A_1 = T_{21}(1)A_0T_{12}(1) - A_0 = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & 0 & O \\ a_{11} & * & a & \cdots \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \in M,$$

$$A_2 = T_{13}(\overline{a^{-1}s})A_1T_{31}(a^{-1}s) - A_1 = sE_{21} \in M,$$

$$T_{21}(1)(sE_{21})T_{12}(1) - sE_{21} = sE_{22} \in M.$$

用置换阵对 sE_{21}、$sE_{22} \in M$ 作相合,可知所有的 $sE_{ij} \in M$ $(1 \leq i, j \leq r)$, 从而 $M = \mathrm{Mat}_r K$.

在剩下的情形里,所有的 $a_{ji} = \varepsilon\overline{a_{ij}}(i \neq j)$, 但某个对角元 $a_{ii} \neq \varepsilon\overline{a_{ii}}$, 经相合后不妨设 $a_{11} \neq \varepsilon\overline{a_{11}}$. 于是

$$B = T_{21}(1)A_0T_{12}(1) - A_0 = (b_{ij})_{r\times r} \in M,$$

其元素 $b_{21} = b_{12} = a_{11} \neq \varepsilon\overline{b_{21}}$, 化为已解决的情形. ▌

下面对 F 是域的情形讨论 $\mathrm{Mat}_r F$ 中在辛群或正交群的共轭作用下不变的加法子群的可能的类型.

引理 5.3.9 设 F 是域, $r = 2\nu$ 是偶数, $N = \mathrm{Sp}(r, F, H)$, $H = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$. 设 $R = \mathrm{Mat}_r F$, S 是 R 的加法子群,真包含 $FI^{(r)}$,且被 N 正规化. 则下列结论之一成立:

(i) $S = \mathrm{Mat}_r F$, 或当 $\mathrm{char}F$ 整除 r 时 $S = \mathrm{sl}(r, F)$,

(ii) $S = MH^{-1}$, 其中 $M = M_L^{\varepsilon}(r, F)$, $\varepsilon = \pm 1$. 当 $\mathrm{char}F \neq 2$ 时, $L = F$(当 $\varepsilon = +1$), 或 $L = 0$(当 $\varepsilon = -1$). 而当 $\mathrm{char}F = 2$ 时, L 是 F 的 F^2-子空间.

(iii) $S = M^+(r, F)H^{-1} \oplus U\mathrm{diag}(I^{(\nu)}, O)$, U 是 F 的非零加

法子群.

(iv) char F 整除 ν, $S = \{AH^{-1} | A = (A_{ij})_{2\times 2} \in M_0(r, F)$, $A_{ij} \in \mathrm{Mat}_\nu F$, 且 $\mathrm{Tr}A_{11} = \mathrm{Tr}A_{22} = 0\}$.

(v) $N = \mathrm{Sp}(2, 2) = \mathrm{SL}(2, 2)$,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \middle| a, b \in F_2 \right\} = F_4.$$

证明 记 $M = SH = \{AH | A \in S\}$. 则 $gMg' = gSHg' = gSg^{-1}H = SH = M$. 可见 M 是 R 的加法子群,且在 N 的相合下不变. 由 $S \supsetneqq FI$ 还有 $M \supsetneqq FH$. 只要定出 M 的可能的构造,则 $S = MH^{-1}$ 的构造也就知道了.

$r=2$ 时 $N=\mathrm{SL}(2, F)$, S 已在引理 5.3.7 中定出了. 以下设 $\nu \geq 2$, $r \geq 4$.

将每个 $A \in R = \mathrm{Mat}_{2\nu}F$ 写成分块形式 $A = (A_{ij})_{2\times 2}$, 使每一块 $A_{ij} \in \mathrm{Mat}_\nu F$. 对每个 $B \in \mathrm{Mat}_\nu F$ 和任一对 $1 \leq k, l \leq 2$, 记 $E_{kl}(B)$ 为这样的矩阵 $(A_{ij})_{2\times 2} \in R$, 它的块 $A_{kl} = B$, 而其余的块 $A_{ij} = 0$. 当 $i \neq j$ 时还记 $T_{ij}(B) = I + E_{ij}(B)$. 对每一对 $1 \leq i, j \leq 2$, 记 $M_{ij} = \{B \in \mathrm{Mat}_\nu F | E_{ij}(B) \in M\}$. 则易见 M_{ij}是加法子群. 考虑 $H \in N$ 在 M 上的相合作用,可知 $M_{11} = M_{22}$, $M_{12} = M_{21}$. 考虑所有的 $\mathrm{diag}(P, P'^{-1}) \in N(P \in \mathrm{GL}(\nu, F))$ 的相合作用,还可知 M_{11}在 $\mathrm{GL}(\nu, F)$的相合作用下不变,而 M_{12}被 $\mathrm{GL}(\nu, F)$正规化. 这样的 M_{ij}的构造已经分别在引理 5.3.8 和 5.3.7 中定出了.

(5.3.9.1) *必有* $M_{11} \neq 0$.

由 $M \supsetneqq FH$ 可取 $A_0 = (A_{ij})_{2\times 2} \in M \backslash FH$. 如果 $A_{12} = A_{21} = A_{22} = 0$, 则 $A_0 = E_{11}(A_{11})$ 已是 M_{11}中的非零矩阵. 若不然,对任意对称方阵 $C \in M^+(\nu, F)$, 由 $T_{21}(C) \in N$, 得

$$A_1 = \begin{pmatrix} I & C \\ O & I \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} I & O \\ C & I \end{pmatrix} - A_0 = \begin{pmatrix} B & CA_{22} \\ A_{22}C & O \end{pmatrix} \in M,$$

其中 $B = CA_{21} + A_{12}C + CA_{22}C$.

如果 $A_{22}\neq 0$，设 A_{22}的第 i 行不为零，取 $C=E_{ii}$，则 $CA_{22}\neq 0$，$A_1\notin FH$. 用 A_1 代替 A_0 即化为 $A_{22}=0$ 的情形.

故不妨设 $A_{22}=0$，于是 $A_1=\mathrm{diag}(B,\ O)$，$B=CA_{21}+A_{12}C\in M_{11}$. 只要能选 C 使 $B\neq 0$，即得 $M_{11}\neq 0$. 若不然，设对所有的 C 都有 $B=0$，取 $C=I$ 得 $A_{21}=-A_{12}$. 于是 $B=-CA_{12}+A_{12}C=0$ 对所有的 C 成立. 即 A_{12}与所有的对称方阵交换. 取 $C=E_{ii}(\forall i)$ 知 A_{21}只能是对角阵 $\mathrm{diag}(a_1,\ \cdots,\ a_\nu)$. 对每个 $i\geq 2$，取 $C=E_{1i}+E_{i1}$ 知 $a_1=a_i$，即 $A_{12}=aI$ 纯量阵，其中 $a=a_1$. 此时 $E_{12}(A_{12})+E_{21}(A_{21})=aH\in FH\subset M$，$A_0-aH=\mathrm{diag}(A_{11},\ O)\in M$. 由 $A_0\notin FH$ 知 $A_{11}\neq 0$，M_{11} 包含非零矩阵 A_{11}.

(5.3.9.2) 集合 M_{11}只有两种可能的类型:

(a) $M_{11}=\mathrm{Mat}_\nu F$.

(b) $M_{11}=M_L^\varepsilon(\nu,\ F)$，对某个 $\varepsilon=\pm 1$ 和 L.

M_{11}是 $\mathrm{Mat}_\nu F$ 的非零加法子群，且在 $\mathrm{GL}(\nu,\ F)$的相合作用下不变. 由引理 5.3.8 知 M_{11}具有下列形式之一:

(a) $M_{11}=\mathrm{Mat}_\nu F$.

(b) $M_{11}=M_L^\varepsilon(\nu,\ F)$，对某个 $\varepsilon=\pm 1$ 和 L.

(c) $\nu=2$，$F\neq F_2$，$M_{11}=UH_0$，$H_0=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，$U$ 是 F 的加法真子群.

(d) $\nu=2$，$F=F_2$，M_{11} 等于

$$K_1=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ b & a+b\end{pmatrix}\middle|\, a,\ b\in F_2\right\}$$

$$\text{或 } K_2=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ a+b & a\end{pmatrix}\middle|\, a,\ b\in F_2\right\}.$$

只要能证明 M_{11}不可能具有形式(c)或(d)即可.

对每个 $A_0=(A_{ij})_{2\times 2}\in M$ 和对称方阵 $C\in M^+(\nu,\ F)$，有

$$A_1=T_{12}(I)A_0T_{21}(I)-A_0\in M,$$

$$A_2 = T_{12}(C)A_1T_{21}(C) - A_1 = \mathrm{diag}(B, O) \in M,$$

其中 $B = CA_{22} + A_{22}C \in M_{11}$. 特别对每个 $B_0 \in M_{11} = M_{22}$，取 $A_0 = \mathrm{diag}(O, B_0)$ 可知 $B = CB_0 + B_0C \in M_{11}$.

如果 M_{11}属于类型(c)，任取 $B_0 = cH_0 \in M_{11}$，$0 \neq c \in U$，对每个 $s \in F$ 取对称方阵 $C = sE_{11}$，得到 $B = sH_0 \in M_{11}$. 由 $s \in F^*$ 的任意性得 $M_{11} \supseteq FH_0 \supsetneqq UH_0$，产生矛盾.

如果 M_{11}是类型(d)中的 K_1，取 $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in K_1$，再取对称方阵 $C = \mathrm{diag}(1, 0)$，得到 $B = CB_0 + B_0C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin K_1$，产生矛盾.

为了证明 M_{11}不能是类型(d)的 K_2，也为了(5.3.9.3)的需要，先证明一个断言：如果存在 $A_0 \in M$，使它的块 $A_{22} = (a_{ij})_{\nu\times\nu}$ 中 $a_{ji} = 0 \neq a_{ij}$ 对某一对 $i \neq j$ 成立，则必然 $M_{11} = \mathrm{Mat}_\nu F$. 在此情形下，取对称方阵 $C = sE_{ii}(\forall s \in F^*)$，得到 $B = CA_{22} + A_{22}C = (b_{ij})_{\nu\times\nu} \in M_{11}$，其中 $b_{ij} = sa_{ij}$ 可取遍 F^*，而 B 的第 j 行为零. 上述类型(b)、(c)、(d)都不包含这样的 B，剩下的唯一的可能性是(a)，即 $M_{11} = \mathrm{Mat}_\nu F$.

现在设 M_{11}属于类型(d)中的 K_2，则 M_{11}含有下三角矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 由刚才证明的断言知，这导致 $M_{11} = \mathrm{Mat}_\nu F$，产生矛盾.

(5.3.9.3) 记 $\Delta = E_{12}(I^{(\nu)}) \in \mathrm{Mat}_{2\nu}F$. 如果 $M_{11} = M_L^\varepsilon(\nu, F)$，则当 $\varepsilon = -1$ 且 $\mathrm{char}F \neq 2$ 时 $M \subseteq M^-(r, F)$；当 $\varepsilon = 1$ 时，$M \subseteq M^+(r, F) \oplus F\Delta$，且仅当 $L = F$ (即 $M_{11} = M^+(\nu, F)$) 时才有可能 $M \cap F\Delta \neq 0$.

当 $\varepsilon = -1$ 且 $\mathrm{char}F \neq 2$ 时，记 $M^\varepsilon = M^-(r, F)$. 当 $\varepsilon = +1$ 时记 $M^\varepsilon = M^+(r, F) \oplus F\Delta$. 需要证明 $M \subseteq M^\varepsilon$.

若不然，设 M 含有 $A_0 = (A_{ij})_{2\times 2} \notin M^\varepsilon$.

如果 $A_{22} = (a_{ij})_{\nu\times\nu}$ 不是 ε-对称方阵，这时用适当的 $\mathrm{diag}(P'^{-1}, P) \in N$ 对 A_0 作相合，从而用 $P \in \mathrm{GL}(\nu, F)$ 对 A_{22}作

相合,可化为 $a_{21} \neq \varepsilon a_{12}$ 的情形.再将 A_{22}减去 M_{11}中适当的迹式 ε-对称方阵,可使 $a_{21} = 0 \neq a_{12}$. 由前面证明的断言知,这导致 $M_{11} = \mathrm{Mat}_\nu F$,产生矛盾.如果 A_0 的块 A_{11}不是ε-对称方阵,用 $H \in N$ 作相合得到的 $HA_0H' \in M$ 的第(2, 2)块等于 $A_{11} \notin M^\varepsilon(\nu, F)$,仍有矛盾.故 $A_{ii} \in M^\varepsilon(\nu, F)$, $\forall i = 1, 2$. 但 $A_0 \notin M^\varepsilon$,当 $\varepsilon = -1$ 时这迫使 $A_{21} \neq -A'_{12}$. 而当 $\varepsilon = +1$ 时 $A_{12} - A'_{21} \notin FI^{(\nu)}$. 对任意对称方阵 $C \in M^+(\nu, F)$,考察 $A_1 = T_{12}(C)A_0T_{21}(C) - A_0 = (B_{ij})_{2\times 2} \in M$ 的块 $B_{11} = CA_{21} + A_{12}C + CA_{22}C = B_0 + CD_0$,其中 $B_0 = A_{12}C + \varepsilon(A_{12}C)' + CA_{22}C'$ 是ε-对称方阵,而 $D_0 = A_{21} - \varepsilon A'_{12} \neq 0$. B_{11}应该是ε-对称方阵,否则,导致 $M_{11} = \mathrm{Mat}_\nu F$. 于是 CD_0 是ε-对称方阵.令 C 取遍 $E_{ii}(1 \leq i \leq \nu)$,可知 D_0 应是对角阵.但是当 $\varepsilon = -1$,且 $\mathrm{char}F \neq 2$ 时,对角阵 $D_0 \neq 0$ 不可能是ε-对称方阵(即交错方阵),产生矛盾.当 $\varepsilon = +1$ 时,再令 C 取遍 $E_{1i} + E_{i1}(i \geq 2)$ 可知 D_0 是纯量阵,含于 FI,仍有矛盾.这就证明了 $M \subseteq M^\varepsilon$.

设 $M_{11} = M_L^+(\nu, F)$ 且 $M \cap F\Delta \neq 0$. 即存在 $a\Delta \in M$, $a \in F^*$. 则对任意的 $s \in F^*$,有

$$T_{12}(sI)(a\Delta)T_{21}(sI) - a\Delta = \mathrm{diag}((sa)I, O) \in M,$$

$$(sa)I \in M_{11},$$

其中 $sa \in L$ 可取遍 F^*.这迫使 $L = F$, $M_{11} = M^+(\nu, F)$.

(5.3.9.4) 引理的结论成立.

对每个 $B \in M_{11}$ 和对称方阵 $C \in M^+(\nu, F)$,有 $CBC \in M_{11}$. 取 $A_0 = \mathrm{diag}(O, B) \in M$, $\widetilde{A}_0 = \mathrm{diag}(CBC, O) \in M$. 则

$$\begin{aligned} A(B, C) &= T_{12}(C)A_0T_{21}(C) - A_0 - \widetilde{A}_0 \\ &= E_{12}(CB) + E_{21}(BC) \in M. \end{aligned}$$

先设 $M_{11} = \mathrm{Mat}_\nu F$. 对任意的 $s \in F$,取 $B = sE_{12} \in M_{11}$, $C = E_{11} \in M^+(\nu, F)$,则 $CB = sE_{12}$, $BC = 0$, $A(B, C) = E_{12}(sE_{12}) \in$

M, $sE_{12} \in M_{12}$. $M_{12} \not\subseteq FI$ 是加群,并且被 $\mathrm{GL}(\nu, F)$正规化. 由引理 5.3.7 知, $M_{12} = M_{21}$ 等于 $\mathrm{sl}(\nu, F)$ 或 $\mathrm{Mat}_\nu F$. 当 $M_{12} = \mathrm{Mat}_\nu F$ 时 $M = \mathrm{Mat}_r F \doteq S$, 引理结论(i)成立. 当 $M_{12} = \mathrm{sl}(\nu, F)$ 时,取 $B = sE_{11} \in M_{11}$ 及$C = I$可得$A(B, C) = E_{12}(sE_{11}) + E_{21}(sE_{11}) \in M$,它与所有的 $E_{12}(A)$、$E_{21}(A) \in M(A \in \mathrm{sl}(\nu, F))$ 一起生成的加群包含了所有的形如 $E_{12}(A_1) + E_{21}(A_2)(\mathrm{Tr}A_1 = \mathrm{Tr}A_2)$ 的矩阵,从而 S 包含 $\mathrm{diag}(A_1, -A_2)$. 这说明 $S = \mathrm{sl}(r, F)$, 仍是引理结论(i)所述的类型.

现设 $M_{11} \neq \mathrm{Mat}_\nu F$, 按照(5.3.9.2), $M_{11} = M_L^\varepsilon(\nu, F)$ 对某个 $\varepsilon = \pm 1$ 和 L 成立. 按照(5.3.9.3), $M \subseteq M^\varepsilon$, $M^- = M^-(r, F)$ (当 $\mathrm{char}F \neq 2$), $M^+ = M^+(r, F) \oplus F\Delta$.

记 $K_{12} = \{B \in \mathrm{Mat}_\nu F \mid E_{12}(B) + \varepsilon E_{21}(B') \in M\}$. 易见 K_{12}是加群且被 $\mathrm{GL}(\nu, F)$ 正规化. 如果能证明 $K_{12} = \mathrm{Mat}_\nu F$, 则 $M \supseteq M_L^\varepsilon(r, F)$, 引理结论(ii)或(iii)成立.

对每个 $B \in M_L^\varepsilon(\nu, F) \subseteq M_{11}$ 和对称方阵 $C \in M^+(\nu, F)$, 由 $A(B, C) = E_{12}(CB) + E_{21}(BC) \in M$ 及 $(BC)' = \varepsilon CB$ 知 $CB \in K_{12}$. 对任意的 $1 \leq i, j \leq \nu$ 和 $a \in F$, 取 $B = aE_{ij} + (\varepsilon a)E_{ji}$, $C = E_{ii}$, 则 $CB = aE_{ij} \in K_{12}$. 如果 $L \neq 0$, 再取 $B_1 = sE_{ii} (s \in L)$ 得 $CB_1 = (as)E_{ii} \in K_{12}$, as 取遍 F. 所有这些 aE_{ij}、$(as)E_{ii}$ 生成加群 $\mathrm{Mat}_\nu F = K_{12}$. 这导致引理结论(ii)或(iii)成立. 在 $L = 0$ 的情形, $\varepsilon = -1$, 仍取 B 如上,再取 $C_1 = E_{jj} + E_{ji}$, 则 $C_1 B = a(E_{jj} - E_{ii}) \in K_{12}$. 所有的 aE_{ij}和 $a(E_{jj} - E_{ii})$ 生成 $\mathrm{sl}(\nu, F) \subseteq K_{12}$. 由于 $\varepsilon = -1$, M 包含所有的 $aH = E_{12}(aI) - E_{21}(aI)(a \in F)$, 可见 K_{12}包含 FI. 特别当 $\mathrm{char}F$ 不整除 ν 时, $K_{12} = \mathrm{sl}(\nu, F) \oplus FI = \mathrm{Mat}_\nu F$. 仍导致引理的结论(ii)或(iii)成立. $K_{12} = \mathrm{sl}(\nu, F)$ 仅在 $\mathrm{char}F$ 整除 ν 时才有可能,此时引理的结论(iv)成立. ▌

下面的引理讨论 $\mathrm{Mat}_r F$ 中在正交群共轭下不变的 F-子空间的类型.

引理 5.3.10 设 F 是域,且 $\mathrm{char}F \neq 2$, $r \geq 2$, $N = O(r, F, H)$, 其中 $H = \mathrm{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_r) \in \mathrm{GL}(r, F)$. 但排除 N 可约或非

本原的情形. 设 S 是 $R = \mathrm{Mat}_r F$ 的 F-子空间，真包含 FI，且被 N 正规化. 则 S 具有下列类型之一：

(i) $S = \mathrm{Mat}_r F$，或当 $\mathrm{char} F$ 整除 r 时，$S = \mathrm{sl}(r, F)$.

(ii) $S = M^+(r, F)H^{-1}$，或当 $\mathrm{char} F$ 整除 r 时，$S = M^+(r, F)H^{-1} \cap \mathrm{sl}(r, F)$.

(iii) $S = M^-(r, F)H^{-1} \oplus FI$，当 $r = 2$ 且 $\nu(H) = 0$ 时，这样的 S 是 FI 的二次扩域.

证明 记 $M = SH$. 则 M 真包含 FH. 且 M 在 N 的相合作用下不变. 只要定出 M 的类型即可.

注意，所排除的可约或非本原的情形为：

(a) $r = 2, 3$ 且 $F = F_3$；(b) $r = 2$ 且 $\nu(H) = 1$.

(5.3.10.1) S 和 M 一定含有非对角阵. 如果 S 含有非纯量的对角阵 B_0，则 M 含有非对角的对称方阵.

由于 S 真包含 FI，S 一定包含非纯量阵 A_0. 如果 S 不含非对角阵，则 A_0 是对角阵. 我们证明这导致 M 包含非对角的对称方阵.

由于假定 $A_0 = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_r)$ 不是纯量阵，其中必有某个 $a_j \neq a_1$，$j \geq 2$. 不妨用 $A_0 - a_1 I \in S$ 代替 A_0，化为 $a_1 = 0 \neq a_j$ 的情形. 任取 $g = (g_{ij})_{r\times r} \in N$. 则 $B_0 = gA_0g^{-1} \in S$. 注意 $B_0H = g(A_0H)g' \in M$. A_0H 是对角阵，因而是对称方阵，与之相合的 B_0H 也应是对称方阵. 如果可选 g 使 B_0 不是对角阵，则达到目的. 设 B_0 仍是对角阵，$B_0 = \mathrm{diag}(b_1, \cdots, b_r)$. 比较等式 $gA_0 = B_0g$ 两端的第一行得 $(0, \cdots, g_{1j}a_j, \cdots) = (b_1g_{11}, \cdots, b_1g_{1j}, \cdots)$. 除例外情形 $F = F_3$ 且 $r \leq 3$ 外，总可选 g 使 g_{11} 与 g_{1j} 都不为 0，从而由 $0 = b_1g_{11}$ 得到 $b_1 = 0$，再由 $g_{1j}a_j = b_1g_{1j} = 0$ 得到 $a_j = 0$，产生矛盾. 可见，总可选出 g 使 $B_0 \in S$ 不是对角阵，B_0H 是 M 中的非对角的对称方阵.

这也证明了 S 一定包含非对角阵，从而 $M = SH$ 包含非对角阵.

(5.3.10.2) 任取 $A = (a_{ij})_{r\times r} \in M$，则 $s(a_{ij}E_{ij} + a_{ji}E_{ji}) \in$

M, $\forall i \neq j$, $s \in F$, 且 A 的对角部分 $\mathrm{diag}(a_{11}, \cdots, a_{rr}) \in M$.

对每个 $1 \leq i \leq r$, 记 $\Sigma_i = I - 2E_{ii} \in N$, 它就是标准基向量 e_i 引起的反射. 对每个 $A_0 = (a_{ij})_{r\times r} \in M$ 和任一对 $i \neq j$, 有 $A_1 = \Sigma_i A_0 \Sigma_i - A_0 \in M$, $A_2 = \dfrac{1}{4}(\Sigma_j A_1 \Sigma_j - A_1) = a_{ij}E_{ij} + a_{ji}E_{ji} \in M$. 从而 sA_2 对所有的 $s \in F$ 成立. 由 $A \in M$ 减去所有的 $a_{ij}E_{ij} + a_{ji}E_{ji} \in M(1 \leq i < j \leq r)$, 即得 $\mathrm{diag}(a_{11}, \cdots, a_{rr}) \in M$.

(5.3.10.3) *存在 $\varepsilon \in \{1, -1, 0\} \subseteq F$, 使 M 包含所有的 $s(E_{ij} + \varepsilon E_{ji})$, $s \in F$, $i \neq j$.*

由(5.3.10.1), M 含有非对角阵 $A_0 = (a_{ij})_{r\times r}$, 某个非对角元 $a_{kl} \neq 0(k \neq l)$. 由(5.3.10.2)知

$$M \supseteq \{s(a_{kl}E_{kl} + a_{lk}E_{lk}) \mid s \in F\}$$
$$= \{s(E_{kl} + \varepsilon E_{lk}) \mid s \in F\},$$

其中 $\varepsilon = a_{kl}^{-1}a_{lk}$.

对任意 $1 \leq i, j \leq r$, $i \neq j$, 记 $\Delta_{ij} = E_{ij} + \varepsilon E_{ji}$. 前面已证明 $\Delta_{kl} \in M$. 在此基础上,我们证明所有的 $\Delta_{ij} \in M$.

当 $r \geq 3$ 时,对每个 $1 \leq j \leq r$, $j \neq k$, 存在 $g = (g_{ij})_{r\times r} \in N$ 定驻 $\mathrm{Mat}_{1\times r}F$ 的自然基 e_k, 且 $e_l g$(即 g 的第 l 行)中 e_j 的系数 $g_{lj} \neq 0$. 于是 $g'\Delta_{kl}g \in M$ 的第(k, j)-元等于 $g_{lj} \neq 0$, 而它的第(j, k)-元等于 εg_{lj}. 由(5.3.10.2)知 M 包含所有的 $s\Delta_{kj}(s \in F)$. 类似地,对任意 $1 \leq i \leq r$, $i \neq l$, 选 $\tilde{g} = (\tilde{g}_{ij})_{r\times r} \in N$ 定驻 e_l 且 $\tilde{g}_{ki} \neq 0$, 则 $g'\Delta_{kl}g \in M$ 的第(l,i)-元和第(i, l)-元分别是 $\varepsilon\tilde{g}_{ki}$ 和 $\tilde{g}_{ki}$, $M \supseteq \{s(\varepsilon\tilde{g}_{ki}E_{li} + \tilde{g}_{ki}E_{il}) \mid s \in F\} = \{s\Delta_{il} \mid s \in F\}$. 用 Δ_{il}代替 Δ_{kl}, 由前面的结论又推出 $s\Delta_{ij} \in M$ $(\forall i \neq j, s \in F)$. 如果 $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, 已达到目的. 设 $\varepsilon \neq \pm 1$, 由 M 包含 $\Delta_{kl} = E_{kl} + \varepsilon E_{lk}$ 及 $\Delta_{lk} = \varepsilon E_{kl} + E_{lk}$, 知 M 包含 $\varepsilon\Delta_{lk} - \Delta_{kl} = (\varepsilon^2 - 1)E_{kl}$, $\varepsilon^2 - 1 \neq 0$. 从而 $E_{kl} = E_{kl} + 0E_{lk} \in M$. 不妨在一开始就用 $E_{kl} \in M$ 代替 Δ_{kl}, 化为 $\varepsilon = 0$ 的情形.

还需考虑 $r = 2$ 的情形,此时已有 $\Delta_{12} = E_{12} + \varepsilon E_{21} \in M$. 如

果 $\varepsilon=\pm 1$，即 $\varepsilon=\varepsilon^{-1}$，则 $\Delta_{21}=E_{21}+\varepsilon E_{12}=\varepsilon\Delta_{12}\in M$. 已得到所需结论. 设 $\varepsilon\neq\pm 1$，于是 $\varepsilon^2\neq 1$. 由于 $F\neq F_3$，可选 $g=(g_{ij})_{2\times 2}\in N$ 使 g_{12}, g_{21}都不为0. 于是 $B=g\Delta_{12}g'=(b_{ij})_{2\times 2}\in M$，其中 $b_{12}=\varepsilon g_{12}g_{21}+g_{11}g_{22}$，$b_{21}=\varepsilon g_{11}g_{22}+g_{12}g_{21}$. 由(5.3.10.2)有 $\tilde{\Delta}_{12}=b_{12}E_{12}+b_{21}E_{21}\in M$. 从而 $\varepsilon\tilde{\Delta}_{12}-b_{21}\Delta_{12}=cE_{12}\in M$，其中 $c=\varepsilon b_{12}-b_{21}=(\varepsilon^2-1)g_{12}g_{21}\neq 0$. 这就得到 $E_{12}\in M$. 用 E_{12} 代替 Δ_{12}，可化为 $\varepsilon=0$ 的情形. 此时 $b_{21}=g_{12}g_{21}\neq 0$，$\tilde{\Delta}_{12}-b_{12}E_{12}=b_{21}E_{21}\in M$，$E_{21}\in M$. 仍然达到目的.

(5.3.10.4) 引理的结论成立.

由(5.3.10.3)，M 包含所有的 $s\Delta_{ij}(s\in F,\ i\neq j)$，其中 $\Delta_{ij}=E_{ij}+\varepsilon E_{ji}$，$\varepsilon=1$，$-1$ 或 0. 从而 $S=MH^{-1}$ 包含所有的 $(\delta_i\delta_j)\Delta_{ij}H^{-1}=\delta_iE_{ij}+\varepsilon\delta_jE_{ji}$，$i\neq j$.

先设 $\varepsilon=1$ 或 0. 当 $F\neq F_3$ 时，对每个 $1\leq i\leq r-1$，存在

$$g_i=\operatorname{diag}\left(I^{(i-1)},\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},I^{(r-i-1)}\right)\in N,$$

使 a、b、c、d 都不为 0. 于是 $B_i=g_i\Delta_{i,i+1}g'_i\in M$ 的对角部分 $D_i=\lambda E_{ii}+\mu E_{i+1,i+1}\in M$，其中 $\lambda=(1+\varepsilon)ab$ 与 $\mu=(1+\varepsilon)cd$ 都不为 0. $B_iH^{-1}=g_i(\Delta_{i,i+1}H^{-1})g_i^{-1}\in MH^{-1}=S$，且由 $\Delta_{i,i+1}H^{-1}$ 的对角元全为 0 知 B_iH^{-1} 的迹为 0，从而它的对角部分 $D_iH^{-1}=\lambda\delta_i^{-1}E_{ii}+\mu\delta_{i+1}^{-1}E_{i+1,i+1}\in S$ 的迹为 0，$\mu\delta_{i+1}^{-1}=-\lambda\delta_i^{-1}=s_0\in F^*$. S 包含 $s_0(E_{ii}-E_{i+1,i+1})$ 从而包含 $\Lambda_i=E_{ii}-E_{i+1,i+1}$. 所有的 $\Lambda_i(1\leq i\leq r-1)$ 在 F 上生成的子空间含于 S，它由迹为 0 的全体对角阵组成. 如果 $\varepsilon=0$，迹为 0 的所有的对角阵与所有的 $E_{ij}\in S(i\neq j)$ 共同生成的 F-子空间等于 $\mathrm{sl}(r,F)\subseteq S$，$S=\mathrm{sl}(r,F)$ 或 Mat_rF. 由于 S 包含单位阵 I，而 $\mathrm{Tr}I=r1_F$. 当 $\mathrm{char}F$ 不能整除 r 时，$r1_F\neq 0$，S 不能等于 $\mathrm{sl}(r,F)$. 因此 $S=\mathrm{sl}(r,F)$ 只能在 $\mathrm{char}F$ 整除 r 时成立. 当 $\varepsilon=1$ 时，$S\supseteq\mathrm{sl}(r,F)\cap M^+(r,F)H^{-1}$，其中等号仅当 $\mathrm{char}F$ 整除 r 时才有可能成立. 当等号不

成立时,如果 $S \subseteq M^{+}(r, F)H^{-1}$,则 $S = M^{+}(r, F)H^{-1}$. 否则,M 包含非对称阵 $A = (a_{ij})_{r\times r}$,其中 $a_{ij} \neq a_{ji}$ 对某一对 $i \neq j$ 成立. 由(5.3.10.2)知 $\widetilde{\Delta}_{ij} = a_{ij}E_{ij} + a_{ji}E_{ji} \in M$,从而 $\widetilde{\Delta}_{ij} - a_{ji}\Delta_{ij} = cE_{ij} \in M$,其中 $c = a_{ij} - a_{ji} \neq 0$. 前面已证明,这导致 $S = \mathrm{Mat}_r F$ 或 $\mathrm{sl}(r, F)$.

当 $F = F_3$ 时,按引理要求有 $r \geq 4$. 对每个 $1 \leq k \leq r-1$,存在

$$g_k = \mathrm{diag}(I^{(m)}, A^{(p)}, I^{(r-m-p)}) \in N,$$

其中 $p = 3$ 或 4, $m + 1 \leq k \leq m + p$,

$$A = (a_{ij})_{p\times p} \in O(p, F_3, \mathrm{diag}(\delta_{m+1}, \cdots, \delta_{m+p}))$$

的第一列元素 $a_{i1}(1 \leq i \leq p)$ 全不为 0. 对每个 $2 \leq l \leq p$,用 g_k 对 $\Delta_{m+1,m+l} = E_{m+1,m+l} + \varepsilon E_{m+l,m+1}$ 作相合,得 $B_k(l) = g_k\Delta_{m+1,m+l}g'_k \in M$,且 $B_k(l)$ 的对角部分 $D_k(l) = \mathrm{diag}(O^{(m)}, \Lambda(l), O^{(r-m-p)}) \in M$,其中 $\Lambda(l) = \mathrm{diag}(\lambda_1(l), \cdots, \lambda_p(l))$, $\lambda_j(l) = (1+\varepsilon)a_{j1}a_{jl}$. 由 $\mathrm{Tr}(\Delta_{m+1,m+l}H^{-1}) = 0$ 知 $D_k(l)H^{-1} = g_k(\Delta_{m+1,m+l}H^{-1})$, g_k^{-1} 的迹为 0,即 $\mathrm{Tr}\Lambda(l) = 0$. 由 A 的列 $(a_{1l}, \cdots, a_{kl})'(2 \leq l \leq p)$ 线性无关及 $a_{i1} \neq 0(\forall 1 \leq i \leq p)$ 推知:$D(l)(2 \leq l \leq p)$ 线性无关. 张成 M 的 $p-1$ 维子空间 $\left\{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i E_{m+i} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p}\lambda_i\delta_{m+i}^{-1} = 0\right\}$,其中包含 $\delta_k^{-1}E_{kk} - \delta_{k+1}^{-1}E_{k+1,k+1}$. 仍导致所需的结论.

以下设 $\varepsilon = -1$,则所有的 $\Delta_{ij} = E_{ij} - E_{ji} \in M(i \neq j)$ 在 F 上生成 $M^{-}(r, F) \subseteq M$,于是 $S \supseteq M^{-}(r, F)H^{-1} \oplus FI$. 如果等号成立,则引理结论(iii)成立. 否则,M 含有 $A = (a_{ij})_{r\times r} \notin M^{-}(r, F) \oplus FH$. 如果 A 的非对角部分不是交错方阵,$a_{ji} \neq -a_{ij}$ 对某一对 $i \neq j$ 成立,则 $a_{ij}E_{ij} + a_{ji}E_{ij} \in M$ 可与 $\Delta_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$ 在 F 上作线性组合得到 $E_{ij} \in M$,化为 $\varepsilon = 0$ 的情形. 否则,A 的非对角部分是交错方阵,对角部分 $\Lambda = \mathrm{diag}(a_{11}, \cdots, a_{rr}) \in M \backslash FH$. 由(5.3.10.1)知,这导致 M 含有非对角的对称方阵,它的非对角部分当然不是交错方阵,这是已解决的情形. ▌

引理 5.3.1 对 $S = \mathrm{Mat}_r F$ 是出了 $\mathrm{SL}(n, S)$. 下面将对 $S = M_L^{J,\varepsilon}(r, F)$ 定出 $\langle T_{21}(C), T_{12}(C) \mid C \in S\rangle \leq \mathrm{SL}(2r, F)$.

引理 5.3.11　设 F 是体，且带有对合 $J: a \mapsto \bar{a}$, $r \geq 2$, $\varepsilon = \pm 1$, $S = M_L^{J,\varepsilon}(r, F)\Lambda^{-1}$, 其中 $\Lambda \in \mathrm{GL}(r, F)$ 且 $\overline{\Lambda}' = \omega\Lambda$, $\omega = \pm 1$. 记 $R = \mathrm{Mat}_r F$, $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \Lambda$, 设

$$X = \langle T_{21}(C), T_{12}(C) \mid C \in S\rangle \leq \mathrm{SL}(2, R),$$

则当 $L \neq 0$ 时, $X = \mathrm{TU}(2r, F, \Delta, L) \leq \mathrm{TU}(2r, F, H)$, 其中 $H = \Delta - \varepsilon\overline{\Delta}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon\omega & 0 \end{pmatrix} \otimes \Lambda$; 而当 $L = 0$ 且 $r \geq 3$ 时 $X = \Omega(2r, F, \Delta)$.

证明　设 $\mathscr{E} = \{e_1, \cdots, e_{2r}\}$ 是 $V = \mathrm{Mat}_{1\times 2r}F$ 的自然基, V 上定义了 $h(x,y) = x\Delta\bar{y}'$, $Q(x) = h(x, x)$ 及内积 $f = h - \varepsilon\bar{h}$. 则 $U_0 = \langle e_1, \cdots, e_r\rangle$ 和 $V_0 = \langle e_{r+1}, \cdots, e_{2r}\rangle$ 是 V 的一对极大全奇异子空间.

当 $L \neq 0$ 时, $X \leq \mathrm{TU}(2r, F, \Delta, L) = \mathrm{TU}(V, h, L)$. X 的子群 $\{T_{21}(C) \mid C \in S\}$ 包含了 $\mathrm{TU}(V, h, L)$ 的形如 $T_u = \{\rho_{u,s} \mid s \in L\}$ $(0 \neq u \in U_0)$ 的所有的长根子群, 而 $\{T_{12}(C) \mid C \in S\}$ 包含了所有形如 T_v $(0 \neq v \in V_0)$ 的长根子群. 对任意奇异向量 $x = u + v \in V$ $(u \in U_0, v \in V_0)$ 有 $(u, v) \in L$. 当 $(u, v) \neq 0$ 时, 由引理3.3.2(1)立即得到 $T_x < X$. 当 u、v 都不为 0, 且 $(u, v) = 0$ 时, 取 $v_1 \in V_0$ 使 $0 \neq (u, v_1) \in L$, 则 $T_{u+v_1} < X$, 再由 $(u + v_1, -v_1 + v) = -(u, v_1) \neq 0$ 及 $x = (u + v_1) + (-v_1 + v)$ 知 $T_x < X$. 这证明了 X 包含 $\mathrm{TU}(2r, F, \Delta, L)$ 的所有的长根子群, 从而 $X = \mathrm{TU}(2r, F, \Delta, L)$.

现在设 $L = 0$, 则 $X \leq \Omega(2r, F, \Delta) = \Omega(V, Q)$. X 包含 $\Omega(V, Q)$ 的形如 $T_{u,v}$($\langle u, v\rangle$ 含于 U_0 或含于 V_0)的全体长根子群. 按照第 3 章 §3.4 的记号, 对每个 $0 \neq u \in U_0$, 有 $V_X(u) \supseteq U_0$, 而对 $0 \neq v \in V_0$, 有 $V_X(v) \supseteq V_0$. 当 $r \geq 3$ 时, 对每个 $0 \neq u \in U_0$

和 $0\neq v\in V_0\cap u^{\perp}$，可取 $u_1\in U_0$, $v_1\in V_0$ 使 $(u_1, v_1)=1$ 且 $\langle u_1, v_1\rangle\perp\langle u, v\rangle$. 正交二平延 $t_{v,v_1}\in X$ 定驻 u，从而定驻 $V_X(u)$，因而将 $u_1\in V_X(u)$ 送到 $u_1+v\in V_X(u)$，于是 $v=(u_1+v)-u_1\in V_X(u)$. 这说明 $V_X(u)$包含从而等于 $U_0\oplus(V_0\cap u^{\perp})=u^{\perp}$. 同理，$V_X(v)=v^{\perp}$ 对每个 $0\neq v\in V_0$ 成立. 特别对上面的互不正交的 u_1、v_1 也都有 $V_X(u_1)=u_1^{\perp}$ 和 $V_X(v_1)=v_1^{\perp}$ 成立. 由引理3.4.4立即得到 $X=\Omega(2r, F, \Delta)$. ▌

§ 5.4　SL(n, D)的元素在 GL(n, R)下的共轭

记住我们的假设：$R=\mathrm{Mat}_rF$ 是体上全方阵环，D 是 R 的子体，$N_R(D)$是 D^* 在乘法群 R^* 中的正规化子，$\Gamma=\mathrm{GL}(n, D)\cdot N_R(D)$.

由引理 5.2.1，要定出 $N=\mathrm{SL}(n, D)$ 在 $\mathrm{GL}(n, R)$中的扩群 X，关键是在 X 中找到含有足够多的零元素的矩阵 $g_1\notin\Gamma$. 为了找到这样的 g_1，我们的作法是：先任选 $g_0\in X\backslash\Gamma$，再选择适当的 $T_0\in N$，使 $T_1=g_0T_0g_0^{-1}\in X$ 含有比 g_0 更多的零元素. 如果 $T_1\notin\Gamma$，就可用 T_1 代替 g_0. 重复这个过程，就可以找出所需的 g_1. 但问题在于：如果 $T_1=g_0T_0g_0^{-1}\in\Gamma$，就不能用 T_1 代替 g_0，这时怎样找出所需的 g_1 呢？本节讨论的就是这种情形. 我们设法在一开始就选择这样的 T_0，使 $T_1=g_0T_0g_0^{-1}\in\Gamma\Longrightarrow T_1\in\mathrm{GL}(n, D)\Longrightarrow T_1\in N\Longrightarrow T_1$ 与 T_0 在 N 中也共轭，即存在 $z\in N$ 使 $T_0=zT_1z^{-1}=(zg_0)T_0(zg_0)^{-1}\Longrightarrow zg_0\in X\backslash\Gamma$ 含有足够多零元素，可以充当 g_1.

我们首先选中 SL(n, D)的平延来作 T_0.

引理 5.4.1　设 $n\geq 2$, $N=\mathrm{SL}(n, D)$, $g_0\in\mathrm{GL}(n, R)\backslash\Gamma$, $Y=\langle N, g_0Ng_0^{-1}\rangle$. 设 $N=\mathrm{SL}(n, D)$ 中有平延 T_0，使 $T_1=g_0T_0g_0^{-1}\in\mathrm{GL}(n, D)$. 则存在 z_1、$z\in N$ 使矩阵 $g_1=zg_0z_1\doteq(a_{ij})_{n\times n}$ 的分量 $a_{1j}=0$, $\forall 2\leq j\leq n$. 当 $n\geq 3$ 时，存在 R 的子环

$S \supsetneqq D$ 使 $Y \geq \mathrm{SL}(n, S)$.

证明　有 $z_1 \in N$ 使 $T_0 = z_1 T_{n1}(s) z_1^{-1}$ 对某个 $s \in D^*$ 成立. 且由 $(T_0 - I)^2 = 0$ 及 $\mathrm{rank}_F(T_0 - I) = r\mathrm{rank}_D(T_0 - I) = r$ 得：$(T_1 - I)^2 = 0$, $\mathrm{rank}_F(T_1 - I) = r$, 从而 $\mathrm{rank}_D(T_1 - I) = 1$. 这说明 T_1 也是 N 中的平延,有 $z \in N$ 使 $zT_1z^{-1} = T_{n1}(c)$, 对某个 $c \in D^*$. 取 $g_1 = zg_0z_1 = (a_{ij})_{n\times n}$, 则 $g_1 T_{n1}(s) g_1^{-1} = T_{n1}(c)$. 从而 $g_1(T_{n1}(s) - I) = (T_{n1}(c) - I)g_1$, 即 $g_1 s E_{n1} = cE_{n1}g_1$. 最后这个等式左端的矩阵的第 n 行等于 $(a_{nn}s, 0, \cdots, 0)$, 而右端的第 n 行等于 $(ca_{11}, ca_{12}, \cdots, ca_{1n})$, 对二者作比较,可得 $a_{1j} = 0$ 对 $2 \leq j \leq n$ 成立. 显然 $g_1 \notin \Gamma$, 且 $Y = \langle N, g_1 N g_1^{-1}\rangle$. 当 $n \geq 3$ 时,由引理 5.2.1 即得 $Y \geq \mathrm{SL}(n, S)$, 对 R 的某个子环 $S \supsetneqq D$. ▌

在引理 5.4.1 的基础上,可以证明:只要在 $N = \mathrm{SL}(n, D)$ 的扩群 X 中找出含有至少一个零元素的矩阵 $g_0 \notin \Gamma$, 就可找到引理 5.2.1 所说的 g_1,从而得到一个 $\mathrm{SL}(n, S) \leq X$, $S \supsetneqq D$.

引理 5.4.2　设 $N = \mathrm{SL}(n, D)$, $n \geq 3$, 矩阵 $g_0 = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{GL}(n, R) \backslash \Gamma$ 有某个元素 $a_{kl} = 0$. 设 $Y = \langle N, g_0 N g_0^{-1}\rangle$. 则存在 R 的某个子环 $S \supsetneqq D$, 使 $Y \geq \mathrm{SL}(n, S)$.

证明　用 $P_{1k} g_0 P_{ln}$ 代替 g_0,不会改变 Y,可以化为 $a_{1n} = 0$ 的情形. 取 $T_1 = g_0 T_{n1}(1) g_0^{-1} = I + g_0 E_{n1} g_0^{-1} = (b_{ij})_{n\times n} \in Y$. 由于 $a_{1n} = 0$,$g_0 E_{n1}$ 的第一行为零,从而 $g_0 E_{n1} g_0^{-1}$ 的第一行为零,T_1 的第一行 $(b_{11}, \cdots, b_{1n}) = (1, 0, \cdots, 0)$. 如果 $T_1 \notin \Gamma$, 则由引理 5.2.1知,Y 的子群$\langle N, T_1\rangle$包含所需的 $\mathrm{SL}(n, S)$. 否则, $T_1 \in \Gamma$, 且由 $b_{11} = 1 \in D^*$ 知, $T_1 \in \mathrm{GL}(n, D)$. 由引理 5.4.1 知有 z、$z_1 \in N$, 使 $g_1 = z_1 g_0 z = (c_{ij})_{n\times n}$ 的元素 $c_{1j} = 0$, $\forall 2 \leq j \leq n$. 显然, $g_1 \notin \Gamma$ 且 $Y \geq \langle N, g_1 N g_1^{-1}\rangle$,再用引理 5.2.1 即得. ▌

引理 5.4.1 要求 $T_1 = g_0 T_0 g_0^{-1} \in \mathrm{GL}(n, D)$. 但实际应用时具有的条件常常只是 $T_1 \in \Gamma$. 因此,需要研究什么时候 $T_1 \in \Gamma \Longrightarrow T_1 \in \mathrm{GL}(n, D)$.

引理 5.4.3　设 $n \geq 3$, $N = \mathrm{SL}(n, D)$, $g_0 \in \mathrm{GL}(n, R) \backslash \Gamma$,

T_0 是 $N = \mathrm{SL}(n, D)$ 中的平延. 如果 $T_1 = g_0 T_0 g_0^{-1} \in \Gamma$, 则 $T_1 \in \mathrm{GL}(n, D)$, 仅当以下情形时例外: $T_1 = \sigma I^{(n)}$, 其中 $\sigma \in C_R(D)$, 且满足 $(\sigma - 1)^2 = 0$ 及 $\mathrm{rank}_F(\sigma - 1) = r/n$.

证明 $T_1 \in \Gamma = \mathrm{GL}(n, D) \cdot N_R(D)$ 具有形式 $T_1 = A\sigma = (a_{ij}\sigma)_{n\times n}$, 其中 $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{GL}(n, D)$, $\sigma \in N_R(D) < \mathrm{GL}(r, F)$. 这时可取适当的 $z \in N$, 用 $zg_0 \in \mathrm{GL}(n, R)\backslash\Gamma$ 代替 g_0,从而用 $zT_1z^{-1} = zA({}^{\sigma}z)^{-1}\sigma$ 代替 T_1,用 $zA({}^{\sigma}z)^{-1}$ 代替 A,化为所需要的情形,而不影响论证的正确性,这里 ${}^{\sigma}z = \sigma z \sigma^{-1} \in N$.

先设 A 不是对角阵,即有某个 $a_{ij} \neq 0 (i \neq j)$. 用 A 在 $\mathrm{SL}(n, D)$中适当的置换阵 z 下的共轭 $zAz^{-1} = zA({}^{\sigma}z)^{-1}$ 代替 A,可化为 $a_{12} \neq 0$ 的情形. 进一步,取 $z_1 = \mathrm{diag}(a_{12}^{-1}, 1, a_{12}, 1, \cdots) \in N$, 用 $z_1A({}^{\sigma}z_1)^{-1}$ 代替 A 可化为 $a_{12} = 1$ 的情形. 取 $z \in N$, 使 $({}^{\sigma}z)^{-1} = I - a_{11}E_{21} - a_{13}E_{23} - \cdots - a_{1n}E_{2n}$, 则可化为 $a_{1j} = 0 (j \neq 2)$ 的情形. 故设 $a_{12} = 1$, 而其余的 $a_{1j} = 0 (j \neq 2)$. 此时 $\mathrm{rank}_F(T_1 - I) \geq \mathrm{rank}_F(a_{12}\sigma) + \mathrm{rank}_F(a_{33}\sigma - I) = r + \mathrm{rank}_F(a_{33}\sigma - I)$. 但由 $\mathrm{rank}_F(T_0 - I) = r$ 知, $\mathrm{rank}_F(T_1 - I) = r$, 所以 $a_{33}\sigma - I = 0$, $\sigma = a_{33}^{-1} \in D^*$, $T_1 \in \mathrm{GL}(n, D)$, 如所欲证.

现在设 $A = \mathrm{diag}(a_{11}, \cdots, a_{nn})$ 是对角阵. 如果 A 不是 D 上的纯量阵,即有某个 $a_{ii} \neq a_{11} (i \geq 2)$. 取 $z = T_{1i}(1) \in N$, 则 $zA({}^{\sigma}z)^{-1} = T_{1i}(1)AT_{1i}(-1) = A + (a_{ii} - a_{11})E_{1i}$ 不是对角阵,用它代替 A,可化 A 为非对角阵的情形.

剩下的情形是 A 为纯量阵 $aI (a \in D^*)$, $T_1 = a\sigma I \in N_R(D)$, 不妨用 $a\sigma$ 代替 σ,即可设 $a = 1$, $T_1 = \sigma I$. 此时由 $(T_1 - I)^2 = 0$ 得到 $(\sigma - 1)^2 = 0$, 由 $\mathrm{rank}_F(T_1 - I) = n \cdot \mathrm{rank}_F(\sigma - 1) = r$ 得到 $\mathrm{rank}_F(\sigma - 1) = r/n$. 若 $\sigma \notin C_R(D)$, $\sigma s \sigma^{-1} \neq s$ 对某个 $s \in D^*$ 成立. 取 $z = T_{12}(s) \in \mathrm{SL}(n, D)$, 则 $T_2 = zT_1z^{-1} = T_{12}(s_1)\sigma$, 其中 $s_1 = s - \sigma s \sigma^{-1} \in D^*$. 用 T_2 代替 T_1,化为 $A = T_{12}(s_1)$ 不是对角阵的情形. 由前面的讨论结果知,这导致 $\sigma \in D^*$, 但体 D 的元素 σ 要满足 $(\sigma - 1)^2 = 0$ 仅当 $\sigma - 1 = 0$, $\sigma = 1$, 于是 $\mathrm{rank}_F(\sigma -$

$1) = 0$ 不可能等于 $r/n \neq 0$，产生矛盾. 这迫使 $\sigma \in C_R(D)$. ▌

下面的推论指出了什么时候可以避免引理 5.4.3 中的例外情形.

推论 5.4.4　在引理 5.4.3 的假设下，如果下面三种情形之一成立，则 $T_1 \in \mathrm{GL}(n, D)$，从而引理 5.4.1 所说的 g_1 存在.

(i) $n > r$; (ii) $C_R(D)$ 是体的乘法群的子群；(iii) C_3 问题或 C_5 问题的假设成立.

证明　只要证明引理 5.4.3 的例外情形不出现.

(i) 当 $n > r$ 时，r/n 不是整数，$\mathrm{rank}_F(\sigma - 1) = r/n$ 当然不可能成立.

(ii) 当 $C_R(D)$ 是体的乘法群时，对 $\sigma \in C_R(D)$，$(\sigma - 1)^2 = 0 \Longrightarrow \sigma = 1 \Longrightarrow T_1 = I = T_0$，产生矛盾.

(iii) 在 C_5 问题中，R 本身就是体，$C_R(D)$ 是体 R 的乘法群的子群. 在 C_3 问题中，$C_R(D) = Z(D)^*$ 是体 D 的中心 $Z(D)$ 的乘法群. 由(ii)知结论成立. ▌

为了找出引理 5.4.2 所说的含零矩阵，我们还需要考虑 N 的某些其他形式的元素 T_0 的共轭 T_1.

引理 5.4.5　设 $g_0 \in \mathrm{GL}(n, R)\backslash\Gamma$，$T_0 \in N = \mathrm{SL}(n, D)$ 是非单位幺幂矩阵(即 $T_0 - I$ 是非零的幂零矩阵)，且 $T_1 = g_0 T_0 g_0^{-1} \in \mathrm{GL}(n, D)$. 则存在 z、$z_1 \in N$，使 $\tilde{g}_0 = z_1 g_0 z$ 的第$(1, n)$元素等于 0.

证明　设 $d = \mathrm{rank}_D(T_0 - I)$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}_D(T_1 - I) &= \mathrm{rank}_F(T_1 - I)/r \\ &= \mathrm{rank}_F(T_0 - I)/r = d.\end{aligned}$$

并且由 $T_0 - I$ 幂零得知 $T_1 - I$ 幂零. 故存在 z、$z_1 \in N$，使 $\tilde{T}_0 = z^{-1} T_0 z = (t_{ij})_{n\times n}$ 与 $\tilde{T}_1 = z_1 T_1 z_1^{-1} = (s_{ij})_{n\times n}$ 都是下三角幺幂阵，即 $t_{ij} = s_{ij} = 0$，$\forall 1 \leq i < j \leq n$，$t_{ii} = s_{ii} = 1$，$\forall 1 \leq i \leq n$. 且可要求 $t_{21} = s_{21} = 1$. 记 $\tilde{g}_0 = z_1 g_0 z = (a_{ij})_{n\times n}$，则 $\tilde{g}_0 \tilde{T}_0 \tilde{g}_0^{-1} = \tilde{T}_1$. 比

较等式 $\tilde{g}_0(\tilde{T}_0 - I) = (\tilde{T}_1 - I)\tilde{g}_0$ 两端的第(2, n)元素，可知 $a_{1n} = 0$，如所欲证. ▌

为了便于应用引理 5.4.5，对非单位幺幂矩阵 T_0 仍应讨论 $T_1 = g_0 T_0 g_0^{-1} \in \Gamma \Longrightarrow T_1 \in \mathrm{GL}(n, D)$ 的条件.

引理 5.4.6 设 $g_0 \in \mathrm{GL}(n, R)\backslash\Gamma$, $0 \neq S \in \mathrm{Mat}_n D$ 是幂零矩阵. 对 F^* 的中心 $Z(F)^*$ 的任一元素 α，记 $T(\alpha) = I + \alpha S$, $g(\alpha) = g_0 T(\alpha) g_0^{-1}$. 如果存在 F^* 的中心元 $\alpha \neq 1$，使 $g(1)$、$g(\alpha)$ 都含于 Γ，则下列两个情形之一成立：

(i) $g(1)$、$g(\alpha) \in \mathrm{GL}(n, D)$，从而引理 5.4.5 所说的带有零分量的 $\tilde{g}_0 = z g_0 z_1$ 存在，其中 z、$z_1 \in N$.

(ii) $g(1) = \sigma I$ 对 $C_R(D)$ 中的某个幺幂元 σ 成立，这仅在 C_4 问题中才有可能.

证明 由 $g(1) \in \Gamma$ 可记 $g(1) = P\sigma$，使 $P = (p_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{GL}(n, D)$, $\sigma \in N_R(D)$. 且由 $T(\alpha) = I + \alpha(T(1) - I)$ 知

$$g(\alpha) = I + \alpha(g(1) - I) = (1-\alpha)I + \alpha P\sigma = P_1\sigma_1 \in \Gamma,$$

其中 $P_1 = (q_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{GL}(n, D)$, $\sigma_1 \in N_R(D)$. 如果 P 不是对角阵，$p_{ij} \neq 0$ 对某一对 $i \neq j$ 成立. 比较 $P_1\sigma_1 = (1-\alpha)I + \alpha P\sigma$ 两端的(i, j)分量，得 $q_{ij}\sigma_1 = \alpha p_{ij}\sigma$, $c = \sigma\sigma_1^{-1} = p_{ij}^{-1}\alpha^{-1}q_{ij} \in D$，从而 $\sigma_1 = c^{-1}\sigma$. 此时可用 P_1c^{-1}、σ 分别代替 P_1、σ_1，化为 $\sigma_1 = \sigma$ 的情形. 再比较 $P_1\sigma = (1-\alpha)I + \alpha P\sigma$ 的第(1, 1)分量，得

$$q_{11}\sigma = (1-\alpha) + \alpha p_{11}\sigma,\ \sigma^{-1} = (1-\alpha)^{-1}(q_{11} - \alpha p_{11}) \in D,$$

从而 $\sigma \in D^*$, $g(1) \in \mathrm{GL}(n, D)$，且 $g(\lambda) = I + \lambda(g(1) - I) \in \mathrm{GL}(n, D)$ 对所有的 $\lambda \in Z(F)^*$ 成立，引理结论(i)成立. 现在设 P 是对角阵，对所有的 $i \neq j$ 有 $p_{ij} = 0$. 如果 $p_{ii} \neq p_{11}$ 对某个 $i \neq 1$ 成立，则由 $q_{11}\sigma_1 = (1-\alpha) + p_{11}\sigma$ 及 $q_{ii}\sigma_1 = (1-\alpha) + p_{ii}\sigma$ 两式相减，得 $(q_{11} - q_{ii})\sigma_1 = (p_{11} - p_{ii})\sigma$, $\sigma\sigma_1^{-1} = (p_{11} - p_{ii})^{-1}(q_{11} - q_{ii}) \in F^*$，与前面同样可化为 $\sigma_1 = sg$ 的情形，并得到 $\sigma \in F^*$, $g(\lambda) \in \mathrm{GL}(n, K)$, $\forall \lambda \in Z(F)^*$. 结论(i)成立. 在剩下的情形

里，$P = p_{11}I$ 是 $\mathrm{GL}(n, D)$ 中的纯量阵，用 $p_{11}\sigma \in N_R(D)$ 代替 σ，可设 $P = I$，$g(1) = \sigma I$. 由 $T(1)$ 幺幂知 $g(1)$ 幺幂，从而 $\sigma - 1$ 幂零. 如果 $\sigma \notin C_R(D)$，$\sigma s \sigma^{-1} \neq s$ 对某个 $s \in D$ 成立. 则

$$T_{12}(s)(\sigma I)T_{12}(s)^{-1} = T_{12}(s_1)\sigma,$$

其中 $s_1 = s - \sigma s \sigma^{-1} \neq 0$. 用 $\tilde{g}_0 = T_{12}(s)g_0 \in \mathrm{GL}(n, R)\backslash\Gamma$ 代替 g_0，可化为 $g(1) = T_{12}(s_1)\sigma$ 的情形，其中 $T_{12}(s_1)$ 不是对角阵. 由前面的讨论结果知，应有 $\sigma \in D^*$. 对体 D 中的非零元 σ，$\sigma - 1$ 幂零仅当 $\sigma = 1$，即 $g(1) = I$，与 $g(1)$ 共轭的 $T(1) = I + S$ 也只能是单位阵 I，与原假设 $S \neq 0$ 相矛盾. 故 $\sigma \in C_R(D)$. 在 C_3、C_5 问题中，$C_R(D)$ 都是体的乘法群的子群，$\sigma - 1$ 幂零仅当 $\sigma = 1$，这导致矛盾. 故 $g(1) = \sigma I$ 仅在 C_4 问题中才有可能. 结论(ii)成立. ▌

§5.5　酉群 $\mathrm{U}'(n, D, \Delta, L)$ 与含零矩阵生成的扩群

子体 $D \subset R = \mathrm{Mat}_r F$ 及群 $\Gamma = \mathrm{GL}(n, D) \cdot N_R(D)$ 仍如前设. 本节讨论 $N = \mathrm{U}'(n, D, \Delta, L)$ 在 $\mathrm{GL}(n, R)$ 中的扩群. 与 §5.2 中对 $N = \mathrm{SL}(n, D)$ 的扩群的讨论类似，含足够多零元素的矩阵 $g_1 \in \mathrm{GL}(n, R)\backslash\Gamma$ 与 N 生成的扩群具有特别的重要性.

本节仍用 A' 表示 D 上矩阵 A 在 D 上的转置.

引理 5.5.1　设 $N = \mathrm{U}'(n, D, \Delta, L) \leq \mathrm{U}(n, D, H)$ 是关于 D 的对合 $J: a \mapsto \bar{a}$ 的酉群，其中

$$\Delta = \begin{bmatrix} O & I_{(\nu)} & O \\ O & O & O \\ O & O & \Delta_0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_n D$$

具有标准形，且 Witt 指数为 $\nu \geq 2$，$H = \Delta + \rho\bar{\Delta}' \in \mathrm{GL}(n, D)$ 是可逆的单项矩阵，$\rho = \pm 1$. 当 $N = \Omega(4, D, \Delta)$ 时，要求 $FI \subset D$ 且 $\dim_F D = r$；当 $N = \Omega(n, F_2, \Delta)$ 时要求 $\nu \geq 3$. 设 $g_1 = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{GL}(n, R)\backslash\Gamma$，且满足条件：当 $L \neq 0$ 时，所有的 $a_{1j} =$

$0(j \geq 2)$；当 $L = 0$ 时，或者所有的 $a_{1j} = a_{2j} = 0\ (j \geq 3)$，或者所有的 $a_{1j} = a_{i,\nu+1} = 0(j \neq 1, i \neq \nu + 1)$. 设

$$Y = \langle N, g_1 N g_1^{-1} \rangle,$$

且 $Y \cap \mathrm{GL}(n, D) \leq G = \mathrm{GU}(n, D, \Delta, L)$. 则

(1) 在 Y 中可找到形如 $I + aE_{\nu+1,1} + bE_{\nu+1,2} + cE_{\nu+2,1}$ 及形如 $T = I + cE_{21} + aE_{\nu+1,1} + \rho bE_{\nu+1,\nu+2}$ 的元素，使 b、$c \notin D$，且 $b = c$ 或 $b + c \in L$ 成立.

(2) 除例外情形 $N = \mathrm{Sp}(4, 2)$ 且 $a = a^2 \notin D$ 外，总可使(1)中的 $a = 0$. 在此例外情形下可使 $b = c = a$.

(3) 由 $I + aE_{\nu+1,1} + bE_{\nu+1,2} + cE_{\nu+2,1} \in Y$ 可推出 $T_{\nu+1,1}(\lambda c + b\bar{\lambda}) \in Y$, $\forall \lambda \in D^*$；当 $N = \mathrm{TU}(n, D, \Delta, L)$ $(\rho = -1, 1 \in L)$ 时，还可推出 $T_{\nu+1,1}(bc + a) \in Y$.

(注：可以验证，除 $N = \Omega(4, D, \Delta)$ 的情形外，本引理的证明对一般的含 1 环 R 也是成立的，只要它具有性质：$\forall a, b \in R$, $ab = 1 \Longrightarrow ba = 1$.)

证明　N 可通过右乘作用看作 $V = \mathrm{Mat}_{1\times n}D$ 上的酉变换群 $\mathrm{U}'(n, D, h, L) \leq \mathrm{U}(n, D, f)$，其中 $h(x, y) = x\Delta \bar{y}'$，$f(x, y) = xH\bar{y}'$，$\forall x, y \in V$. 并且定义 $Q(x) = h(x, x) = x\Delta\bar{x}'$. 记 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 的自然基，即 e_i 的第 i 分量为 1、其余分量都是 0. 则 $H = (h_{ij})_{n\times n}$ 的第(i, j)-元 $h_{ij} = f(e_i, e_j)$，而 $\Delta = (\Delta_{ij})_{n\times n}$ 的对角元 $\Delta_{ii} = Q(e_i)$.

记　$g^{-1} = (\tilde{a}_{ij})_{n\times n}$.

记　$U_1 = \{(c_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{GL}(n, R) \mid$

$$c_{1j} = c_{i,\nu+1} = 0, \forall j \neq 1, i \neq \nu + 1\},$$

$$U_0 = \{(c_{ij})_{n\times n} \in U_1 \mid c_{11} = c_{\nu+1,\nu+1} = 1\}.$$

对 $g \in \mathrm{GL}(n, R)$，定义 $\varphi(g)$为删去 g 的第 1 行、第 $(\nu + 1)$ 行、第 1 列、第 $(\nu + 1)$ 列得到的 $(n - 2) \times (n - 2)$ 子矩阵. 易见 $\varphi: U_1 \to \mathrm{GL}(n - 2, R)$ 是群同态. 分以下 4 步来证明引理5.5.1.

在每一步中我们都证明：可以用满足条件 $g^{-1}Ng \leq Y$ 的适当的 $g \in \mathrm{GL}(n, R)\backslash\Gamma$ 来代替 g_1，将 g_1 化为更简单的形式.

(5.5.1.1) 可选择适当的 g 代替 g_1，化为 $g_1 \in U_1$ 的情形.

当 $L \neq 0$ 即 $N = \mathrm{TU}(n, D, \Delta, L)$ 时，有 $T_{\nu+1,1}(1) \in N$，于是 $g_2 = g_1 T_{\nu+1,1}(1) g_1^{-1} = I + b_{21}E_{21} + \cdots + b_{n1}E_{n1} \in Y \cap U_0$，其中 $b_{i1} = a_{i,\nu+1}a_{11}^{-1}$，对 $2 \leq i \leq n$. 若 $g_2 \notin \Gamma$，用 g_2 代替 g_1 即可. 否则，$g_2 \in \mathrm{SL}(n, D) \cap Y \leq G = \mathrm{GU}(n, D, \Delta, L)$，$g_2 = T_{\nu+1,1}(b_{\nu+1}) \in N$. 即对 $i \neq \nu + 1$ 有 $b_i = 0$，从而 $a_{i,\nu+1} = 0$，g_1 本来就在 U_1 中.

以下设 $L = 0$，即 $N = \Omega(n, D, \Delta)$. 若引理的假设 $a_{1j} = a_{i,\nu+1} = 0 (j \geq 2, i \neq \nu + 1)$ 成立，则已有 $g_1 \in U_1$. 故只需要处理引理的另一个假设 $a_{1j} = a_{2j} = 0 (j \geq 3)$ 成立的情形.

对任一 $\alpha \in D^*$，我们有

$$
\begin{aligned}
g_2 &= g_1^{-1} T_{\nu+1,2}(\alpha) T_{\nu+2,1}(-\alpha) g_1 \\
&= I + \sum_{i=3}^{n} (b_{i1}E_{i1} + b_{i2}E_{i2}) \in Y \cap U_0,
\end{aligned}
$$

其中

$$
(b_{i1}, b_{i2}) = (a_{i,\nu+1}, a_{i,\nu+2}) \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1},
$$

对 $3 \leq i \leq n$. 若可选 α 使 $g_2 \notin \Gamma$，用这个 g_2 代替 g_1 即可. 否则，$g_2 \in \mathrm{SL}(n, D) \cap Y \leq G$，从而 $g_2(1) \in N$，$g_2 = T_{\nu+1,2}(\theta_\alpha) T_{\nu+2,1}(-\theta_\alpha)$，其中 $\theta_\alpha \in D^*$ 依赖于 α. 对 $i \notin \{1, 2, \nu+1, \nu+2\}$，由 $(b_{i1}, b_{i2}) = (0, 0)$ 得 $(a_{i,\nu+1}, a_{i,\nu+2}) = (0, 0)$. 并且有

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} a_{\nu+1,\nu+1} & a_{\nu+1,\nu+2} \\ a_{\nu+2,\nu+1} & a_{\nu+2,\nu+2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \theta_\alpha \\ -\theta_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}^{-1},
\end{aligned}
$$

$$= \theta_\alpha \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \alpha^{-1},$$

可见 $a_{\nu+2,\nu+1} = -\theta_\alpha a_{12}\alpha^{-1}$. 要使 $g_1 \in U_1$，只须再使 $a_{12} = 0$.

先考虑 $n = 4$ 的情形，即 $N = \Omega(4, D, \Delta)$，$D \supset FI$ 且 $\dim_F D = r$. 由

$$\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \theta_\alpha \\ -\theta_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \theta_1 \\ -\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

得
$$A \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix},$$

其中
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad 而 \quad \theta = \theta_1^{-1}\theta_\alpha \in D^*.$$

由引理 2.6.2 知 $A = A_1 \otimes \sigma = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\sigma & \alpha_{12}\sigma \\ \alpha_{21}\sigma & \alpha_{22}\sigma \end{pmatrix}$，其中 $\alpha_{ij}(1 \le i, j \le 2)$ 含于 D 在 R 中的中心化子 D，从而 $A_1 = (\alpha_{ij})_{2\times 2} \in \mathrm{GL}(2, D)$，而 $\sigma \in N_R(D)$. 我们有 $B = \sigma^{-1}A_1\sigma \in \mathrm{GL}(2, D)$，$A = \sigma B$，$z = \mathrm{diag}(B^{-1}, B') \in O(4, D, \Delta)$. 于是 $(g_1 z)N(g_1 z)^{-1} = N$，可用 $g_1 z$ 代替 g_1，化为 $A = \mathrm{diag}(\sigma, \sigma)$ 的情形，$a_{12} = 0$ 恰如所需.

现在设 $n \ge 5$，于是存在 $1 \le k \le n$，$k \notin \{1, 2, \nu+1, \nu+2\}$. 由于 H 是单项矩阵，对每个这样的 k，有唯一的 k' 使 H 的第 (k, k')-元不为 0，且 $k' \notin \{1, 2, \nu+1, \nu+2\}$. 取 $l = 1$ 或 2. 则存在 $T = I + E_{kl} + \alpha E_{\nu+l, i} + \beta E_{\nu+l, k'} \in N$，对某一对元素 $\alpha \in D$，$\beta \in D^*$. 我们有 $g_3 = g_1 T g_1^{-1} = (c_{ij})_{n\times n} \in Y \cap U_0$，其中 $(c_{i1}, c_{i2}) = a_{ik}(\tilde{a}_{l1}, \tilde{a}_{l2})$，对 $i \notin \{1, 2, \nu+1, \nu+2\}$. 若能选 k 和 l 得到一个 $g_3 \notin \Gamma$，用这个 g_3 代替 g_1 即可. 否则，对所有的 k、l 都有 $g_3 \in \Gamma$，从而 $g_3 \in \mathrm{SL}(n, D)$. 这样，对 $l = 1$、2 都有 $(c_{i1}, c_{i2}) = a_{ik}(\tilde{a}_{l1}, \tilde{a}_{l2}) \in \mathrm{Mat}_{1\times 2}D$，于是 $a_{ik}(\tilde{a}_{lj})_{1\le l, j\le 2} = A \in \mathrm{Mat}_2 D$. 由于

g_1 是可逆矩阵，我们总可选 i、$k \notin \{1, 2, \nu+1, \nu+2\}$，使 $a_{ik} = \delta \neq 0$. 注意，$(\tilde{a}_{lj})_{1\le l, j\le 2} = (a_{lj})^{-1}_{1\le l, j\le 2}$，可得 $A(a_{lj})_{1\le l, j\le 2} = \mathrm{diag}(\delta, \delta) \neq 0$. 我们证明 δ 在 R 中可逆，从而 $A \in \mathrm{GL}(2, D)$. 由 $A = (\alpha_{lj})_{2\times 2} \neq 0$ 知，有某个 α_{lj} 是 D 的非零元，从而是可逆元. 再由 $\delta\,\tilde{a}_{lj} = \alpha_{lj}$ 知，δ 是 R 的可逆元. 从而 $A \in \mathrm{GL}(2, D)$，$A_1 = \mathrm{diag}(1, \lambda)A \in \mathrm{SL}(2, D)$，对某个 $\lambda \in D^*$. 且 $A_1(a_{ij})_{1\le i, j\le 2} = \mathrm{diag}(\delta, \lambda\delta)$，我们有 $z = \mathrm{diag}(A_1, I^{(\nu-2)}, A'^{-1}_1, I^{(n-\nu-2)}) \in N$. 将 g_1 换成 zg_1 不会引起 Y 的改变，却将 $(a_{ij})_{1\le i, j\le 2}$ 变成 $\mathrm{diag}(\delta, \lambda\delta)$，化成了 $a_{12} = 0$ 的情形，从而 $g_1 \in U_1$，恰如所需.

(5.5.1.2) *可化为 $g_1 \in U_0$ 的情形，且可使 $\varphi(g_1) = I$，或在 $D = F_2$ 时使 $\varphi(g_1) = T_{\nu 1}(1)$.*

对每个 $\theta \in D^*$ 和每个 $k \notin \{1, \nu+1\}$，有

$$T(\theta) = I + h_{kk'}\theta E_{k1} - \bar{\theta}\Delta_{k'k'}\theta E_{\nu+1, 1} - \bar{\theta}E_{\nu+1, k'} \in \mathrm{U}'(n, D, \Delta, L),$$

其中 $h_{kk'} = f(e_k, e_{k'}) \neq 0$ 是 $H = (h_{ij})_{n\times n}$ 的第 (k, k')- 元，$\Delta_{k'k'} = Q(e_{k'})$ 是 $\Delta = (\Delta_{ij})_{n\times n}$ 的第(k', k')-元. ($T(\theta)$就是 N 看作变换群 $\mathrm{U}'(n, d, h, L)$ 时作用于 $V = \mathrm{Mat}_{1\times n}D$ 上的 $t_{\theta e_1, Q(e_{k'}), e_{k'}}: x \mapsto x + f(x, e_{k'})\theta e_1 - \rho f(x, e_1)\,\bar{\theta}(e_{k'} + Q(e_{k'})\theta e_1)$.) 取 $g_2(\theta) = g_1 T(\theta) g_1^{-1} \in Y$，则

$$g_2(\theta) = I + \sum_{i=2}^{n} b_{i1}E_{i1} + \Big(\sum_{j=2}^{\nu} + \sum_{j=\nu+2}^{n}\Big) b_{\nu+1, j}E_{\nu+1, j} \in U_0$$

满足 $\varphi(g_2) = I$，$b_{i1} = a_{ik}h_{kk'}\theta a_{11}^{-1}$，$b_{\nu+1, i} = -a_{\nu+1, \nu+1}\,\bar{\theta}\,\tilde{a}_{k'i}$ $(\forall i \notin \{1, \nu+1\})$ 及 $b_{\nu+1, 1} = a_{\nu+1, k}h_{kk'}\theta a_{11}^{-1} - a_{\nu+1, \nu+1}\,\bar{\theta}\,\tilde{a}_{k'1} - a_{\nu+1, \nu+1}\bar{\theta}\Delta_{k'k'}\theta a_{11}^{-1}$. 若可选 θ, k 使 $g_2(\theta) \notin \Gamma$，用这个 $g_2(\theta)$代替 g_1 即可. 否则，所有的 $g_2(\theta)(\theta \in D^*)$ 含于 Γ 从而含于 $\mathrm{SL}(n, D)$，进而 $g_2(\theta) \in Y \cap \mathrm{SL}(n, D) \le \mathrm{GU}(n, D, \Delta, L)$，$g_2(\theta) \in U_0 \cap \mathrm{GU}(n, D, \Delta, L) \le \mathrm{U}(n, D, \Delta, L)$.

$\forall i, k \notin \{1, \nu+1\}$，$\theta \in D^*$，由 $g_2(\theta) \in \mathrm{SL}(n, D)$ 知 $b_{i1} =$

$a_{ik}h_{kk'}\theta a_{11}^{-1}\in D$. 于是可逆矩阵 $y(\theta)=\varphi(g_1)h_{kk'}\theta a_{11}^{-1}\in \mathrm{GL}(n-2, D)$, $y(1)^{-1}y(\theta)=(a_{11}\theta a_{11}^{-1})I\in \mathrm{GL}(n-2, D)$, $a_{11}\theta a_{11}^{-1}\in D^*$. 这样, $\pi: \theta\mapsto a_{11}\theta a_{11}^{-1}$ 就定义了体 D 的一个自同构. 令 $g_0=g_1a_{11}^{-1}=(\alpha_{ij})_{n\times n}$, $\alpha_{ij}=a_{ij}a_{11}^{-1}$, 则 $\alpha_{11}=1$, $\varphi(g_0)=y(h_{kk'}^{-1})\in \mathrm{GL}(n-2, D)$. 易见 $g_0^{-1}=a_{11}g_1^{-1}=(\tilde{\alpha}_{ij})_{n\times n}$, $\tilde{\alpha}_{ij}=a_{11}\tilde{a}_{ij}$, $\varphi(g_0^{-1})=\varphi(g_0)^{-1}\in \mathrm{GL}(n-2, D)$. 现在有

$$\begin{aligned}
&b_{i1}=\alpha_{ik}h_{kk'}^{\pi}\theta^{\pi},\\
&b_{\nu+1, i}=-\alpha_{\nu+1, \nu+1}\bar{\theta}^{\pi}\tilde{\alpha}_{k'i},\ \forall i\notin\{1, \nu+1\},\\
&b_{\nu+1, 1}=\alpha_{\nu+1, k}h_{kk'}^{\pi}\theta^{\pi}-\alpha_{\nu+1, \nu+1}\bar{\theta}^{\pi}\tilde{\alpha}_{k'1}-\alpha_{\nu+1, \nu+1}\bar{\theta}^{\pi}\Delta_{k'k'}^{\pi}\theta^{\pi}.
\end{aligned}\tag{5.5.1}$$

以下将 $\alpha_{\nu+1, \nu+1}\neq 0$ 简记为 α. 选 $\varphi(g_0^{-1})\in \mathrm{GL}(n-2, D)$ 的非零元 $\tilde{\alpha}_{k'i}\in D^*$, 由 $b_{\nu+1, i}=-\alpha\bar{\theta}^{\pi}\tilde{\alpha}_{k'i}\in D$ 可知 $\alpha\in D^*$. 当 $L\neq 0$ 时, $\forall 0\neq s\in L$, 有

$$\begin{aligned}
g_1T_{\nu+1, 1}(s)g_1^{-1}&=T_{\nu+1, 1}(a_{\nu+1, \nu+1}sa_{11}^{-1})\\
&=T_{\nu+1, 1}(\alpha s^{\pi})\in Y\cap \mathrm{SL}(n, D)\leq G,
\end{aligned}$$

从而 $\alpha s^{\pi}\in L$. 特别可取 $s=1$, 得 $\alpha\in L\subseteq K_J$. 于是 $s^{\pi}\alpha^{-1}\in \alpha^{-1}L\alpha^{-1}=L$. 这证明了

$$\bar{\alpha}=\alpha,\ L^{\pi}\alpha^{-1}\subseteq L \tag{5.5.2}$$

当 $L\neq 0$ 时成立; 显然当 $L=0$ 时(5.5.2)也成立.

我们有 $g_1Ng_1^{-1}=g_0(a_{11}Na_{11}^{-1})g_0^{-1}=g_0N^{\pi}g_0^{-1}$, 这里 $N^{\pi}=\{g^{\pi}\mid g\in N\}$. 从而 $Y=\langle N, g_0N^{\pi}g_0^{-1}\rangle$. 取矩阵 $z_0=(z_{ij})_{n\times n}$ 使它的第一行和第一列元素除 $z_{11}=1$ 外都为 0, 第 $\nu+1$ 行和第 $\nu+1$ 列元素除 $z_{\nu+1, \nu+1}=\alpha$ 外都为 0, 且其余元素 $z_{ij}=\alpha_{ij}(i\neq\nu+1, j\neq 1)$ 全部与 g_0 的相应的元素相同. 于是 $z_0\in \mathrm{GL}(n, D)\cap U_1$ 且 $\varphi(g_0z_0^{-1})=I$. 如果能证明 $z_0N^{\pi}z_0^{-1}\leq N$, 则 $Y=\langle N, \tilde{g}_1N\tilde{g}_1^{-1}\rangle$ 对 $\tilde{g}_1=g_0z_0^{-1}\in U_0\backslash\Gamma$ 成立, 且 $\varphi(\tilde{g}_1)=I$. 用 $\tilde{g}_1$ 代替 g_1 即可

化为所希望的 $g_1 \in U_0$ 且 $\varphi(g_1) = I$ 的情形.

$\forall \theta \in D^*$，由 $g_2(\theta) \leq G \cap U_0 \leq U(n, D, \Delta, L) \leq \mathrm{U}(n, D, H)$ 得 $g_2(\theta) H \overline{g_2(\theta)}' = H$，即

$$g_2(\theta) H = H \overline{g_2(\theta)^{-1}}'; \tag{5.5.3}$$

且对 $g_2(\theta)$ 的第 $(\nu+1)$ 行

$$\beta = (b_{\nu+1,1}, \cdots, b_{\nu+1,\nu}, 1, b_{\nu+1,\nu+2}, \cdots, b_{\nu+1,n})$$

有

$$Q(\beta) = \beta \Delta \overline{\beta}' \in L. \tag{5.5.4}$$

我们设法由(5.5.3)和(5.5.4)推出 $z_0 N^{\pi} z_0^{-1} = N$.

比较(5.5.3)两端的矩阵的第 $(\nu+1)$ 行得：

$$\beta H = \rho(1, -\overline{b}_{21}, \cdots, -\overline{b}_{n1}).$$

将行向量 β 和 $(1, -\overline{b}_{21}, \cdots, -\overline{b}_{n1})$ 的第1分量和第 $(\nu+1)$ 分量都换成0，等式仍成立. 再将(5.5.1)中 b_{i1}、$b_{\nu+1,i}$ 的表达式代入，并记

$$v_{k'} = (0, \widetilde{\alpha}_{k'2}, \cdots, \widetilde{\alpha}_{k'\nu}, 0, \widetilde{\alpha}_{k',\nu+2}, \cdots, \widetilde{\alpha}_{k'n}),$$

$$u_k = (0, \alpha_{2k}, \cdots, \alpha_{\nu k}, 0, \alpha_{\nu+2,k}, \cdots, \alpha_{nk})',$$

得 $-\alpha \overline{\theta}^{\pi} v_{k'} H = -\rho \overline{\theta^{\pi}}\, \overline{h_{kk'}^{\pi}}\, \overline{u_k}'$，即

$$v_{k'} H = \rho \gamma\, \overline{h_{kk'}^{\pi}}\, \overline{u_k}', \tag{5.5.5}$$

其中 $\gamma = (\overline{\theta}^{\pi})^{-1} \alpha^{-1} \overline{\theta^{\pi}}$，易见 γ 应与 θ 的选取无关. 取 $\theta = 1$ 可知 $\gamma = \alpha^{-1}$，从而得到

$$\alpha^{-1} = (\overline{\theta}^{\pi})^{-1} \alpha^{-1} \overline{\theta^{\pi}}, \quad 即\ \overline{\theta}^{\pi} \alpha = \alpha \overline{\theta}^{\pi}. \tag{5.5.6}$$

将 $\gamma = \alpha^{-1}$ 代入(5.5.5)，并注意到由(5.5.6)有

$$\rho \alpha^{-1} \overline{h_{kk'}^{\pi}} = (\rho \overline{h_{kk'}})^{\pi} \alpha^{-1} = h_{k'k}^{\pi} \alpha^{-1},$$

得

$$v_{k'} H = h_{k'k}^{\pi} \alpha^{-1} \overline{u_k}'. \tag{5.5.7}$$

注意，$v_{k'}$恰好是 z_0^{-1} 的第 k' 行，而 u_k 是 z_0 的第 k 列. 这样，(5.5.7) 左端是矩阵 $z_0^{-1}H$ 的第 k' 行，右端是 $H^\pi\alpha^{-1}\overline{z_0}'$ 的第 k' 行，k' 可取遍除 1、$\nu+1$ 以外的值. 容易直接验证 $z_0^{-1}H$ 与 $H^\pi\alpha^{-1}\overline{z_0}'$ 的第 1 行、第 $(\nu+1)$ 行也对应相等. 这就得到 $z_0^{-1}H = H^\pi\alpha^{-1}\overline{z_0}'$，即

$$z_0^{-1}H\overline{z_0^{-1}}' = H^\pi\alpha^{-1}. \tag{5.5.8}$$

由此推出，$\forall g \in \mathrm{U}(n, D, H)$，有

$$\begin{aligned} g^\pi z_0^{-1}H\overline{z_0^{-1}}'\,\overline{g^\pi}' &= g^\pi(H^\pi\alpha^{-1})\overline{g^\pi}' \\ &= (gH\overline{g}')^\pi\alpha^{-1} = H^\pi\alpha^{-1} = z_0^{-1}Hz_0^{-1}, \end{aligned}$$

$$(z_0g^\pi z_0^{-1})H\,\overline{(z_0g^\pi z_0^{-1})}' = H,\ z_0g^\pi z_0^{-1} \in \mathrm{U}(n, D, H).$$

这证明了 $\quad z_0\mathrm{U}(n, D, H)^\pi z_0^{-1} \leq \mathrm{U}(n, D, H)$，

从而 $\quad z_0N^\pi z_0^{-1} \leq \mathrm{U}(n, D, H)$.

由(5.5.4)式有 $Q(\beta) = b_{\nu+1,1} + Q(\beta_1) \in L$，其中 $\beta_1 = (0, b_{\nu+1,2}, \cdots, b_{\nu+1,\nu}, 0, b_{\nu+1,\nu+2}, \cdots, b_{\nu+1,n}) = -\alpha\overline{\theta}^\pi v_{k'}$，$v_{k'}$是 z_0^{-1} 的第 k' 行. 记 $\lambda = -\alpha\overline{\theta}^\pi$，则 λ 可取遍 D^*. 由(5.5.6)知 $\lambda = -\alpha\overline{\theta}^\pi = -\overline{\theta}^\pi\alpha$，从而 $\overline{\lambda} = -\alpha\theta^\pi$. 且由 $Q(\beta) \in L$ 知

$$\begin{aligned} Q(\lambda^{-1}\beta) &= \lambda^{-1}b_{\nu+1,1}\overline{\lambda^{-1}} + Q(v_{k'}) \\ &= \lambda^{-1}a + b\overline{\lambda^{-1}} + d(k') \in L, \end{aligned}$$

其中 $a = -\alpha_{\nu+1,k}h_{kk'}^\pi\alpha^{-1}$，$b = \widetilde{\alpha}_{k'1}$ 都与 λ 无关，$d(k') = Q(v_{k'}) - \Delta_{k'k'}^\pi\alpha^{-1}$ 恰是矩阵 $d = z_0^{-1}\Delta\overline{z_0^{-1}}' - \Delta^\pi\alpha^{-1}$ 的第(k', k')元，也与 λ 无关. 当 $D \neq F_2$ 时，可选 $-1 \neq \lambda_1 \in D^*$，$\lambda_2 = (\lambda_1^{-1}+1)^{-1}$（从而 $\lambda_1^{-1} + 1 = \lambda_2^{-1}$），得到

$$d(k') = Q(\lambda_1^{-1}\beta) + Q(\beta) - Q(\lambda_2^{-1}\beta) \in L,$$
$$\forall k' \notin \{1, \nu+1\}.$$

d 的第(1, 1)和第 $(\nu+1, \nu+1)$ 元为 0，当然也含于 L. 这说明 d 的对角元全在 L 中. 又 $d + \rho\overline{d}' = z_0^{-1}H\overline{z_0^{-1}}' - H^\pi\alpha^{-1} = 0$. 这说明 $d \in M_L^{-\rho}(n, D) = \{C = (c_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{Mat}_nD \mid \overline{C}' = -\rho C$，且 $c_{ii} \in$

$L,\ \forall 1 \leq i \leq n\}$. 即

$$z_0^{-1}\Delta\,\overline{z_0^{-1}}' \equiv \Delta^\pi \dot{\alpha}^{-1}(\mathrm{mod} M_L^{-\rho}(n,\ D)).$$

简记 $S = M_L^{-\rho}(n,\ D)$. 对任意 $C \in S$, 由(5. 5. 6)式知 $\overline{C^\pi\alpha^{-1}}' = \alpha^{-1}\,\overline{C^\pi}' = (\overline{C}')^\pi\alpha^{-1} = -\rho C^\pi\alpha^{-1}$. 且由(5. 5. 2)式 $L^\pi\alpha^{-1} \subseteq L$ 知 $C^\pi\alpha^{-1}$ 的对角元全含于 L. 这证明了 $S^\pi\alpha^{-1} \subseteq S$.

对任意 $g \in \mathrm{U}(n,\ D,\ \Delta,\ L)$, 由

$$g^\pi\Delta^\pi\alpha^{-1}\,\overline{g^\pi}' - \Delta^\pi\alpha^{-1} = (g\Delta\,\overline{g}' - \Delta)^\pi\alpha^{-1} \in S^\pi\alpha^{-1} \subseteq S$$

知

$$g^\pi z_0^{-1}\Delta\,\overline{z_0^{-1}}'\,\overline{g^\pi}' \equiv g^\pi\Delta^\pi\alpha^{-1}\,\overline{g^\pi}' \equiv \Delta^\pi\alpha^{-1}$$

$$\equiv z_0^{-1}\Delta\,\overline{z_0^{-1}}'(\mathrm{mod}\ S),$$

$$(z_0g^\pi z_0^{-1})\Delta\,\overline{(z_0g^\pi z_0^{-1})}' \equiv \Delta(\mathrm{mod}\ S),$$

$$z_0g^\pi z_0^{-1} \in \mathrm{U}(n,\ D,\ \Delta,\ L).$$

这就在 $D \neq F_2$ 时证明了

$$z_0\mathrm{U}(n,\ D,\ \Delta,\ L)^\pi z_0^{-1} \leq \mathrm{U}(n,\ D,\ \Delta,\ L),$$

从而 $z_0N^\pi z_0^{-1} \leq N$.

在剩下的情形 $D = F_2$, 我们有 $\pi = 1_D$, $N^\pi = N$, $\alpha = 1$, 并且已经证明了 $z_0Nz_0^{-1} \leq \mathrm{Sp}(n,\ F_2,\ H)$. 若 $z_0Nz_0^{-1} \not\leq N$, 则 $N = \Omega(n,\ F_2,\ \Delta)$, $n \geq 6$, $z_0 \notin O(n,\ F_2,\ \Delta)$, $\varphi(g_0) = \varphi(z_0) \notin O(n-2,\ F_2,\ \varphi(\Delta))$. 记

$$N_0 = \varphi(N \cap U_0) = \Omega(n-2,\ F_2,\ \varphi(\Delta)),$$

则

$$\varphi(Y \cap U_0) \geq \langle N_0,\ \varphi(g_0)N_0\varphi(g_0)^{-1}\rangle$$

$$= \mathrm{Sp}(n-2,\ F_2,\ \varphi(H)).$$

存在 $\tilde{g}_1 \in Y \cap U_0$ 使 $\varphi(\tilde{g}_1) = T_{s1}(1) \in \mathrm{Sp}(n-2,\ F_2,\ \varphi(H))$. 由 $\tilde{g}_1 \notin G = O(n,\ F_2,\ \Delta)$ 及 $Y \cap \mathrm{GL}(n,\ F_2) \leq G$ 知 $\tilde{g}_1 \notin \mathrm{GL}(n,$

F_2)，从而 $\tilde{g}_1 \notin \Gamma$. 用 $\tilde{g}_1$ 代替 g_1 即符合要求.

(5.5.1.3) Y 含有

$$T = T_{\nu+1,1}(a)T_{\nu+1,2}(b)T_{\nu+2,1}(c) \notin \mathrm{GL}(n, D).$$

由(5.5.1.2)可设 $g_1 = (a_{ij})_{n\times n} \in U_0$，且 $\varphi(g_1) = I$，或者当 $D = F_2$ 时 $\varphi(g_1) = T_{\nu 1}(1)$. 我们取 $z = (\alpha_{ij})_{n\times n} \in N \cap U_0$ 使 $\varphi(z) = I$，且对 $i \notin \{1, \nu+1\}$，当 $a_{i1\in D}$ 时取 $\alpha_{i1} = a_{i1}$，而当 $a_{i1} \notin D$ 时取 $\alpha_{i1} = 0$. 用 $g_1 z^{-1}$ 代替 g_1，即可将含于 D 的 a_{i1} ($i \notin \{1, \nu+1\}$) 全部变成 0.

情形 1 $a_{21} = a_{\nu+1,\nu+2} = 0$，但 a_{i1}，$a_{\nu+1,i}$($i \notin \{1, 2, \nu+1, \nu+2\}$) 不全为 0.

在此情形下，可选取 k 或 k'，不含于 $\{1, 2, \nu+1, \nu+2\}$，使 $a_{k1} \neq 0$ 或 $a_{\nu+1,k'} \neq 0$. 当 $a_{k1} \neq 0$ 时，再选 k' 使 $h_{k'k} = f(e_{k'}, e_k) = \beta \neq 0$，当 $a_{\nu+1,k'} \neq 0$ 时，再选 k 使 $h_{k'k} = \beta \neq 0$. 于是可取 $z = I + \alpha E_{\nu+2,2} - E_{\nu+2,k} + \beta E_{k'2} \in N$，并考虑 $T = [g_1, z] = I + a_{\nu+1,k'}\beta E_{\nu+1,2} + a_{k1}E_{\nu+2,1} \in Y$. 由于 $a_{k1} \notin D$ 或 $a_{k1} = 0 \neq a_{\nu+1,k'}$，可知 $T \notin G$，于是 $T \notin Y \cap \mathrm{GL}(n, D)$，$T \notin \mathrm{GL}(n, D)$，恰如所需.

情形 2 a_{21}，$a_{\nu+1,\nu+2}$ 不全为 0.

当 $L \neq 0$ 时，我们取 $T = [T_{\nu+2,2}(1), g_1] = I + aE_{\nu+1,1} + a_{\nu+1,\nu+2}E_{\nu+1,2} - a_{21}E_{\nu+2,1} \in Y$ (对某个 a). 由于 $a_{21} \notin D$，或 $a_{21} = 0 \neq a_{\nu+1,\nu+2}$，可知 $T \notin G$，从而 $T \notin \mathrm{GL}(n, D)$ 为所求.

设 $L = 0$，即 $N = \Omega(n, D, \Delta)$. 当 $n \geq 5$ 时，取一对 k、$k' \in \{1, 2, \cdots, n\}\setminus\{1, 2, \nu+1, \nu+2\}$ 使 $h_{kk'} = \beta \neq 0$，并取 $z = I + \alpha E_{\nu+2,2} + E_{\nu+2,k'} - \beta E_{k2} \in N$. 则 $g_2 = [g_1, z] = (b_{ij})_{n\times n} \in Y \cap U_0$，且 $\varphi(g_2) = I$，$b_{21} = b_{\nu+1,\nu+2} = 0$，$b_{k1} = \beta a_{21}$，$b_{\nu+1,k'} = a_{\nu+1,\nu+2}$. 我们有 $b_{k1} \notin D$ 或 $b_{k1} = 0 \neq b_{\nu+1,k'}$. 用 g_2 代替 g_1 即化为情形 1.

剩下还需考虑 $N = \Omega(4, D, \Delta)$ 的情形. 此时按引理假设，有 $FI^{(r)} \subset D \subset R = \mathrm{Mat}_r F$，$[D : FI] = r$，$D$ 在 R 中的中心化子等

于 D 自身. 对每个 $\theta \in D$, 取 $g_2 = [T_{32}(\theta)T_{41}(-\theta), g_1] = T_{31}(\theta a_{21} + a_{34}\theta) \in Y$. 如果 $a = \theta a_{21} + a_{34}\theta \in D$, 则由 $T_{31}(a) \in Y \cap \mathrm{GL}(4, D) \leq \mathrm{GO}(4, D, \Delta)$ 知 $a = 0$. 所以,只要能选 $\theta \in D^*$ 使 $a \neq 0$, 则 $a \notin D$, $g_2 = T_{31}(a) \in Y \backslash \mathrm{GL}(n, D)$, 恰如所需. 假如不能作这样的选取,即 $\theta a_{21} + a_{34}\theta = 0$ 对所有 $\theta \in D$ 成立. 取 $\theta = 1$ 得 $a_{34} = -a_{21}$, 于是 $\theta a_{21} = a_{21}\theta$ 对所有的 $\theta \in D$ 成立. 即 a_{21} 含于 D 的中心化子 D. 但按我们的假设,当 $a_{21} \in D$ 时应有 $a_{21} = 0$, 从而 $a_{\nu+1, \nu+2} = a_{34} = -a_{21} = 0$, 与本情况的假定相矛盾.

情形 3　其余情形. 即: $g_1 = I + aE_{\nu+1,1} + bE_{\nu+1,2} + cE_{\nu+2,1} + \theta E_{\nu+2,2} \notin \mathrm{GL}(n, D)$, 其中 $\theta = 0$, 或 $\theta = 1$ (当 $N = \Omega(n, F_2, \Delta)$ 时).

若 $a \notin D$, 取

$$P = P_{12}P_{\nu+1,\nu+2} \in N,\ z = T_{21}(-1)T_{\nu+1,\nu+2}(1) \in N,$$

则 $T = [z, Pg_1P^{-1}] = I - (a+b+c)E_{\nu+1,1} + aE_{\nu+1,2} + aE_{\nu+2,1} \in Y$ 为所求.

在其余情形下,有 $a \in D$, 于是 b、c 不全在 D 中.

当 $D_J \neq F_2$ 时,取

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda, I^{(\nu-1)}, \lambda^{-1}, I^{(\nu-1)}, \cdots) \in N \quad (\lambda \neq 1)$$

可得到所需要的

$$T = [g_1, \Lambda] = I + (\lambda a\lambda - a)E_{\nu+1,1} + (\lambda - 1)bE_{\nu+1,2} + c(\lambda - 1)E_{\nu+2,1} \in Y \backslash \mathrm{GL}(n, D).$$

设 $D_J = F_2$. 当 $N = \mathrm{Sp}(n, F_2, H)$ 或 $\mathrm{SU}(n, F_4, H)$ 时,由 $D_J = L \neq 0$ 知 $\theta = 0$. 我们有 $P = P_{1,\nu+1} \in N$. 将 g_1 换成 Pg_1P^{-1}, 即化为已解决的情形 2. 剩下的情况是 $N = \Omega(n, F_2, \Delta)$, $\nu \geq 3$. 此时可取 $z_1 = T_{23}(1)T_{\nu+3,\nu+2}(1) \in N$ 和 $z_2 = T_{\nu+2,3}(\theta)T_{\nu+3,2}(\theta) \in N$, 得到

$$g_2 = [z_1, g_1]z_2 = I + bE_{\nu+1,3} + cE_{\nu+3,1} + \theta E_{\nu+3,3} \in Y.$$

然后再取

$$P=\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ I^{(\nu-3)},\ \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ I^{(n-\nu-3)}\right)\in N,$$

得到 $T=Pg_2P^{-1}=I+\theta E_{\nu+1,1}+cE_{\nu+1,2}+bE_{\nu+2,1}\in Y$，其中 b、c 不全含于 D.

(5.5.1.4) 引理的结论成立.

为叙述方便起见，对每个 $S\in \mathrm{Mat}_\nu R$，记

$$T(S)=\begin{pmatrix}I_{(\nu)}&O&O\\S&I&O\\O&O&I\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}(n, R).$$

并记 $M=\{S\in \mathrm{Mat}_\nu F\,|\,T(S)\in Y\}$. 对 $1\leq t\leq \nu$ 和 $S_0\in \mathrm{Mat}_t R$，以 $T(S_0)$ 表示 $T(\operatorname{diag}(S_0, O_{(\nu-t)}))$，记 $S_0\in M$ 表示 $\operatorname{diag}(S_0, O_{(\nu-t)})\in M$.

易见 M 是加法子群. 对于 $P\in \mathrm{GL}(\nu, D)$，如果存在

$$g(P)=\operatorname{diag}(\overline{P}^{-1\prime}, P, \cdots)\in N,$$

(特别当 $P\in \mathrm{SL}(\nu, D)$ 时一定存在这样的 $g(P)$)，则对每个 $S\in M$ 有 $g(P)T(S)g(P)^{-1}=T(PS(\overline{P}'))\in Y$，$PS(\overline{P}')\in M$，即 M 在 P 相合作用下不变. P 至少可取遍 $\mathrm{SL}(\nu, D)$.

由(5.5.1.3)，存在

$$T_0=I+aE_{\nu+1,1}+bE_{\nu+1,2}+cE_{\nu+2,1}\in Y\backslash \mathrm{GL}(n, D).$$

即存在 $S_0=\begin{pmatrix}a&b\\c&0\end{pmatrix}\in M$，使 a、b、c 至少有一个不含于 D.

由 $T_0\in Y$ 即 $S_0\in M$ 可导出以下结论：

推理 1　$\widetilde{S}_0=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-c\\-b&a\end{pmatrix}\in M,$

从而

$$S_1 = T_{12}(1)\,\widetilde{S}_0 T_{21}(1) - \widetilde{S}_0 = \begin{pmatrix} a-b-c & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \in M.$$

即

$$T_1 = I + (a-b-c)E_{\nu+1,1} + aE_{\nu+1,2} + aE_{\nu+2,1} \in Y.$$

推理 2　$S_2 = T_{12}(\lambda)S_0T_{21}(\bar{\lambda}) - S_0 = (\lambda c + b\bar{\lambda})E_{11} \in M$，即 $T_2 = T_{\nu+1,1}(\lambda c + b\bar{\lambda}) \in Y$，对所有的 $\lambda \in D^*$ 成立. 特别，取 $\lambda = 1$ 有 $T_{\nu+1,1}(b+c) \in Y$.

推理 3　当 $N \neq \mathrm{Sp}(4, F_2, H)$，$\mathrm{SU}(4, F_4, H)$ 时，可得出 $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M$，从而 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = aE_{11} \in M$. 即

$$T_3 = I + bE_{\nu+1,2} + cE_{\nu+2,1} \in Y \quad 及 \quad T_4 = T_{\nu+1,1}(a) \in Y.$$

证明如下：当 $\nu \geq 3$ 时，

$$\widetilde{S}_3 = T_{32}(1)S_0T_{23}(1) - S_0 = bE_{\nu+1,3} + cE_{\nu+3,1} \in M,$$

从而 $S_3 = P_{23}\widetilde{S}_3P_{32} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M$，如所欲证. 当 $\nu = 2$ 时，排除了 $N = \mathrm{Sp}(4, 2)$ 或 $\mathrm{SU}(4, 2^2)$的情形后，总可取 $1 \neq \lambda \in D^*$ 使存在 $\Lambda(\lambda) = \mathrm{diag}(1, \bar{\lambda}^{-1}, 1, \lambda, \cdots) \in N$ 且 $\Lambda(\lambda - 1) \in N$，从而

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} S_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} - S_0 = \begin{pmatrix} 0 & b(\bar{\lambda}-1) \\ (\lambda-1)c & 0 \end{pmatrix} \in M,$$

进而 $S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & b(\bar{\lambda}-1) \\ (\lambda-1)c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{(\lambda-1)} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M$.

推理 4　当 $N \neq \Omega(4, D, \Delta)$ 时，

$$\Lambda = I + cE_{21} + aE_{\nu+1,1} + \rho bE_{\nu+1,\nu+2} \in Y.$$

证明如下：当 $N \neq \Omega(4, D, \Delta)$ 时，N 中存在置换阵 P 将

$\mathrm{Mat}_{1\times n}D$ 的自然基 e_1、e_2、$e_{\nu+1}$、$e_{\nu+2}$ 分别送到 e_1、$e_{\nu+2}$、$e_{\nu+1}$、ρe_2. 这个 $P\in N$ 将 $T_0\in Y$ 共轭到 Λ.

推理 5　设 $N=\mathrm{TU}(n, D, \Delta, L)$, $\rho=-1$、$1\in L$, 则 $T_{\nu+1,1}(bc+a)\in Y$, 特别当 $a=0$ 时, $T_{\nu+1,1}(bc)\in Y$.

证明如下：由推理 4, $\Lambda=I+cE_{21}+aE_{\nu+1,1}-bE_{\nu+1,\nu+2}\in Y$. 于是

$$\Lambda T_{\nu+2,2}(1)\Lambda^{-1}T_{\nu+2,2}(-1)T_0=T_{\nu+1,1}(bc+a)\in Y.$$

现在可以完成对引理结论的证明. 首先，推理 2 和推理 4 就是引理的结论(3).

以下从 $S_0\in M$ 出发，证明 Y 包含引理结论(1)、(2)所要求的元素.

先设 $N\neq\mathrm{Sp}(4, 2)$、$\mathrm{SU}(4, 2^2)$. 如果可选 T_0 使 $a\notin D$, 则由推理 1 和 3 得 $T=I+aE_{\nu+1,2}+aE_{\nu+2,1}\in Y$ 恰如所求. 否则，无论怎样选择 T_0 都有 $a\in D$. 于是 b、c 不全在 D 中. 且由推理 2 知 $T_{\nu+1,1}(b+c)\in D$, 从而应有 $b+c\in L\subseteq D$. 由推理 3 得 $T=I+bE_{\nu+1,2}+cE_{\nu+2,1}\in Y$, 仍如所求.

只剩下 $N=\mathrm{Sp}(4, 2)$ 或 $\mathrm{SU}(4, 2^2)$的情形. 如果一开始就能选 T_0 使 $b=c=0$, 当然 $a\notin D$, 则由推理 1 有

$$T_1=I+aE_{31}+aE_{32}+aE_{41}\in Y,$$

从而

$$T=T_0T_1=I+aE_{32}+aE_{41}\in Y,$$

恰如引理所需. 以下设不可能选 T_0 使 $b=c=0$. 由推理 2 知 $T_2=T_{31}(b\bar{\lambda}+\lambda c)\in Y$ 对所有的 $\lambda\in D^*$ 成立. 于是由我们的假设应有 $T_2\in Y\cap\mathrm{SL}(n, D)\leq\mathrm{GU}(4, D, H)$, 从而 $b\bar{\lambda}+\lambda c\in L$. 特别可取 $\lambda=1$ 得 $b+c\in L$. 由推理 1 及 $T_{31}(b+c)\in N$ 得

$$\begin{pmatrix}a-b-c & a\\ a & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b+c & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & a\\ a & 0\end{pmatrix}\in M.$$

如果 $a\in D$, 则

$$\widetilde{T}_0 = I + aE_{31} + aE_{32} + aE_{41} \in Y \cap \mathrm{SL}(n, F)$$
$$\leq \mathrm{GU}(4, D, H)$$

迫使 $a \in L = F_2$, $T = T_0 T_{31}(a) = I + bE_{32} + cE_{41} \in Y$, 正如引理所要求. 以下设 $a \notin D$, 不妨取$\widetilde{T}_0$ 代替 T_0,即设 $S_0 = \begin{pmatrix} a & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \in M$. 按推理 1 有 $\widetilde{S}_0 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & a \end{pmatrix} \in M$, 从而 $S_5 = S_0 + \widetilde{S}_0 = \mathrm{diag}(a, a) \in M$, $T_5 = T_{31}(a)T_{42}(a) = T_{21}(a) \otimes I^{(2)} \in Y$. 由推理 5, $T_0 = I + aE_{31} + aE_{32} + aE_{41} \in Y$ 导致 $T_{31}(a^2 + a) \in Y$. 按我们的假定应有 $a^2 + a \in L = F_2$, 即 $a^2 + a = 0$ 或 1. 如果 $a^2 + a = 1$, 则 $K = F_2 \oplus F_2 a \subseteq R$ 是 F_2 的扩域 F_4. Y 的子群 $\langle \mathrm{SL}(2, F_2) \otimes I^{(2)}, T_5 \rangle = \mathrm{SL}(2, K) \otimes I^{(2)}$ 包含 $\Lambda = \mathrm{diag}(a, a, a^{-1}, a^{-1})$. 于是 $\Lambda^{-1} T_{31}(1) \Lambda = T_{31}(a^2) = T_{31}(a) \in Y$, $a \notin F_2$, 这与前面的假定相违背. 剩下的情形是 $a^2 + a = 0$, 即 $a^2 = a$. 如果 $N = \mathrm{Sp}(4, 2)$, 则 $T = T_0$ 已如引理所求. 设 $N = \mathrm{SU}(4, 2^2)$, 我们设法推出矛盾. 取 $\lambda \in F_4 \backslash F_2$, 则 $\bar{\lambda} = \lambda + 1$. 由推理 2 有 $T_{31}(\lambda a + a\bar{\lambda}) \in Y$, 从而按我们的假设, 有 $\lambda a + a\bar{\lambda} = s \in L = F_2$, $s = 0$ 或 1. 即 $\lambda a = a\bar{\lambda} + s = a\lambda + a + s$, 从而 $\lambda a^2 = (a\lambda + a + s)a = a(\lambda a) + a^2 + sa = a(a\lambda + a + s) + a^2 + sa = a^2\lambda$. 由 $a^2 = a$ 得 $\lambda a = a\lambda$, 从而 $a\lambda + a + s = a\lambda$, $a = s \in F_2$, 产生矛盾.

这就在所有情形下都证明了所要求的 $T = I + aE_{\nu+1,1} + bE_{\nu+1,2} + cE_{\nu+2,1} \in Y$ 存在. 除 $N = \Omega(4, D, \Delta)$ 的情形外,由推理 4 即知$\widetilde{T} = I + cE_{21} + aE_{\nu+1,1} + bE_{\nu+1,\nu+2} \in Y$ 存在,引理结论成立. 在 $N = \Omega(4, D, \Delta)$的情形下,按已经证明的结论有 $T = T_{32}(b)T_{41}(c) \in Y$, $c = \pm b \notin D$. 取置换阵 $P \in O(4, D, \Delta)$ 定驻 e_1, e_3,且将 e_2、e_4 互换. 虽然 $P \notin N$, 但 P 正规化 N. 记

$$\widetilde{g}_1 = PTP^{-1} = T_{21}(c)T_{34}(b) \in PYP^{-1} \backslash \Gamma.$$

则$\widetilde{g}_1$ 符合引理对 g_1 的要求,于是由已证明的结论知 $PYP^{-1} =$

$\langle N, \tilde{g}_1 N \tilde{g}_1^{-1} \rangle$ 包含一个 $T_{32}(b_1)T_{41}(c_1)$，使 $c_1 = \pm b_1 \notin D$，从而 Y 包含 $\tilde{T} = P^{-1}(T_{32}(b_1)T_{41}(c_1))P = T_{21}(c_1)T_{34}(b_1)$，恰如所求.

引理 5.5.1 至此证毕. ▌

§ 5.6　U′(n, D, Δ, L)的元素在 GL(n, R)下的共轭

为了定出 $N = \mathrm{SL}(n, D)$ 在 $\mathrm{GL}(n, R)$ 中的扩群，我们在§ 5.4中讨论了 $g_0 \in \mathrm{GL}(n, R) \backslash \Gamma$ 将 $T_0 \in \mathrm{SL}(n, D)$ 共轭到 Γ 中的情形. 而为了定出 $N = \mathrm{U}'(n, D, \Delta, L)$ 的扩群，同样需要讨论 $g_0 \in \mathrm{GL}(n, R) \backslash \Gamma$ 将 $T_0 \in N$ 共轭到 $T_1 = g_0 T_0 g_0^{-1} \in \Gamma$ 的情形. 这就是本节的内容. 我们希望 $T_1 \in \mathrm{GL}(n, D)$ 进而 $T_1 \in N$，在此情形下找到 z、$z_1 \in N$，使 $z_1 g_0 z$ 含有足够多的零元素.

设 $\nu = \nu_L(\Delta) \geq 1$. 对任意 $S \in \mathrm{Mat}_{k \times l} R (1 \leq k, l \leq \nu)$，记

$$T_0(S) = \begin{pmatrix} I_{(\nu)} & O & O \\ \tilde{S} & I & O \\ O & O & I \end{pmatrix}, \quad 其中 \quad \tilde{S} = \mathrm{diag}(S, O) \in \mathrm{Mat}_\nu R.$$

引理 5.6.1 设

$$N = \mathrm{U}'(n, D, \Delta, L) \leq \mathrm{U}(n, D, H),$$

$$n \geq 3, \nu = \nu_L(\Delta) \geq 1;$$

$$g_0 \in \mathrm{GL}(n, R) \backslash \Gamma, Y = \langle N, g_0 N g_0^{-1} \rangle,$$

且

$$Y \cap \mathrm{GL}(n, D) \leq G = \mathrm{GU}(n, D, \Delta, L).$$

设 $S \in \mathrm{GL}(d, D)$，$1 \leq d \leq \nu$，使 $T_0(S) \in N$，且

$$T_1 = g_0 T_0(S) g_0^{-1} \in \mathrm{GL}(n, D).$$

且当 $\mathrm{char} D = 2$，$L \neq K_J$ 时，假定 $T_0(S\alpha) \in N$ 及 $T(\alpha) = g_0 T_0(S\alpha) g_0^{-1} \in \mathrm{GL}(n, D)$ 对所有的 $\alpha \in E$ 成立，这里 $E \supsetneqq \{0, 1\}$

是 D 的某个加法子群，且除 $F = F_2$ 及 $L = 0$ 的情形外，还假设 $E\backslash\{0\}$ 对求逆封闭(即 $0 \neq \alpha \in E \Longrightarrow \alpha^{-1} \in E$). 则存在 $z \in N$，使 $g_1 = z^{-1}g_0 = (a_{ij})_{n\times n}$ 的元素 $a_{ij} = a_{k,\nu+i} = 0$, $\forall 1 \leq i \leq d$, $j \geq d+1$ 且 $1 \leq k \leq d$ 或 $k \geq \nu + d$. 显然 $g_1 \notin \Gamma$, $Y = \langle N, g_1 N g_1^{-1}\rangle$，且当 $g_0 \in Y$ 时 $g_1 \in Y$.

证明　当 $\mathrm{char}D = 2$ 且 $L \neq D_J$ 时，设 $0 \neq \alpha \in E$，否则，设 $\alpha = 1$ 且记 $T_1 = T(1)$. 则由

$$(T_0(S\alpha) - I)^2 = 0 \quad 及 \quad \mathrm{rank}_D\,(T_0(S\alpha) - I) = d$$

推出　$$(T(\alpha) - I)^2 = 0 \quad 及 \quad \mathrm{rank}_D(T(\alpha) - I).$$

$$T(\alpha) \in \mathrm{GL}(n, D) \cap Y \leq \mathrm{GU}(n, D, \Delta, L),$$

根据引理 4.2.3，由 $T(\alpha)$幺幂可推出 $T(\alpha) \in \mathrm{U}(n, D, \Delta, L)$. 于是

$$\mathrm{Im}(T(\alpha) - I) \subseteq \mathrm{Ker}(T(\alpha) - I) = \mathrm{Im}(T(\alpha) - I)^{\perp},$$

$\mathrm{Im}(T(\alpha) - I)$ 是 d 维全迷向子空间. 如果 $L = D_{J,-\rho}$ (即 $N = \mathrm{U}'(n, D, H)$)，则 $\mathrm{Im}(T(1) - I)$ 也是 L-全奇异子空间. 此时存在 $z \in N$ 将 $\mathrm{Im}(T(1) - I)$ 送到 L-全奇异子空间 $U_d = \{(a_1, \cdots, a_d, 0, \cdots, 0) \in \mathrm{Mat}_{1\times n}D\}$. 记 $T_2 = z^{-1}T(1)z$. 则 $\mathrm{Im}(T_2 - I) = \mathrm{Im}(T(1) - I)z = U_d$，且 $\mathrm{Ker}(T_2 - I) = \mathrm{Im}(T_2 - I)^{\perp} = U_d^{\perp}$. 这说明 T_2 具有形式 $T_2 = T_0(\Lambda)$, $\Lambda \in \mathrm{GL}(d, D)$. 记 $g_1 = z^{-1}g_0$. 则 $T_2 = g_1 T_0(S) g_1^{-1}$. 将 g_1 写成分块形式 $g_1 = (A_{ij})_{4\times 4}$，使 $A_{ij} \in \mathrm{Mat}_{\varphi(i)\times\varphi(j)}R$，其中 $\varphi(1) = \varphi(3) = d$, $\varphi(2) = \nu - d$, $\varphi(4) = n - \nu - d$. 比较等式 $(T_0(\Lambda) - I)g_1 = g_1(T_0(S) - I)$ 两端的矩阵块，得 $\Lambda A_{1j} = 0$，从而 $A_{1j} = 0$ 对 $j \geq 2$ 成立，而 $A_{i3}S = 0$ 从而 $A_{i3} = 0$ 对 $i \neq 3$ 成立. 如所欲证.

以下设 $\mathrm{char}D = 2$ 且 $L \neq D_J$. 此时需要进一步证明 $\mathrm{Im}(T(1)-I)$ 是L-全奇异子空间，才能找到 $z \in N$ 将 $\mathrm{Im}(T(1)-I)$ 送到 U_d，从而完成引理的证明. 仍可取 $z_0 \in \mathrm{U}(n, D, H)$(但不

要求 $z_0 \in N$)将 $\mathrm{Im}(T(1)-I)$ 送到 U_d,将 $\tilde{g}_1 = z_0^{-1}g_0 \in \mathrm{GL}(n, R)/\Gamma$ 按前述方式分块为 $\tilde{g}_1 = (A_{ij})_{4\times 4}$,则仍有 $A_{1j} = A_{i3} = 0$, $\forall j \geq 2, i \neq 3$,于是 $\forall \alpha \in E$ 有

$$T_2(\alpha) = z_0^{-1}T(\alpha)z_0 = \tilde{g}_1 T_0(S\alpha)\tilde{g}_1^{-1} = T_0(\Lambda(\alpha)) \in \mathrm{U}(n, D, H),$$

其中 $\Lambda(\alpha) = A_{33}S\alpha A_{11}^{-1} \in \mathrm{Mat}_d D$,且当 $\alpha \neq 0$ 时 $\Lambda(\alpha) \in \mathrm{GL}(d, D)$. 记 $\Lambda = \Lambda(1)$,则 $\Lambda(\alpha) = \Lambda\alpha^{\pi}$,其中 $\alpha^{\pi} = A_{11}\alpha A_{11}^{-1} \in \mathrm{Mat}_d D$. 易见 $\alpha_1^{\pi} + \alpha_2^{\pi} = (\alpha_1+\alpha_2)^{\pi}$,并且当 $\alpha \neq 0$ 时有 $(\alpha^{-1})^{\pi} = (\alpha^{\pi})^{-1}$. 我们有

$$T(\alpha) = z_0 T_0(\Lambda\alpha^{\pi})z_0^{-1} = I + \overline{W}'\alpha^{\pi}U,$$

其中 $\overline{W}'\Lambda^{-1}$ 是 z_0 的第 $\nu+1$ 至第 $\nu+d$ 列组成的矩阵,而 U 是 z_0^{-1} 的前 d 行组成的矩阵,从而 W、U 都是 D 上的秩为 d 的 $d\times n$ 矩阵,且与 α 的选取无关. U 的行空间就是 $\mathrm{Im}(T(1)-I)$. 以下只需证明 U 的行空间是 L 全奇异子空间,即证明 $U\Delta\overline{U}' \in M_L(d, D)$. (对任意自然数 m,记

$$M_L(m, D) = \{A = (s_{ij})_{m\times m} \in \mathrm{Mat}_m D \mid \overline{A}' = A,\ s_{ii} \in L,\ \forall 1 \leq i \leq m\}.)$$

于是有

$$T(\alpha) \in \mathrm{U}(n, D, \Delta, L) \Longrightarrow B(\alpha) = T(\alpha)\Delta\overline{T(\alpha)}' - \Delta \in M_L(n, D).$$

将 $T(\alpha) = I + \overline{W}'\alpha^{\pi}U$ 代入,可得

$$B(\alpha) = \overline{W}'\alpha^{\pi}U\Delta + \Delta\overline{U}'\,\overline{\alpha^{\pi}}'W + \overline{W}'\alpha^{\pi}U\Delta\overline{U}'\,\overline{\alpha^{\pi}}'W \in M_L(n, D).$$

对秩 d 的矩阵 $W \in \mathrm{Mat}_{d\times n}D$,存在 $P \in \mathrm{GL}(n, D)$ 使 $WP = (I_{(d)}, O)$. 由 $B(\alpha) \in M_L(n, D)$ 知 $B_1(\alpha) = \overline{P}'B(\alpha)P \in M_L(n, D)$,而

$$B_1(\alpha) = \begin{pmatrix} I_{(d)} \\ O \end{pmatrix}\alpha^{\pi}U\Delta P + \overline{P}'\Delta\overline{U}'\,\overline{\alpha^{\pi}}'(I_{(d)}, O)$$

$$+\begin{pmatrix} I_{(d)} \\ O \end{pmatrix} \alpha^{\pi} U \Delta \overline{U}' \, \overline{\alpha^{\pi}}' (I_{(d)}, O).$$

设 $B_2(\alpha) \in \mathrm{Mat}_d D$ 是 $B_1(\alpha) = (b_{ij})_{n\times n}$ 的元素 $b_{ij}(1 \leq i, j \leq d)$ 组成的子矩阵，也就是 $B_1(\alpha)$ 左上角的 d 阶子方阵. 则 $B_2(\alpha) \in M_L(d, D)$，从而 $B_3(\alpha) = (\alpha^{\pi})^{-1} B_2(\alpha) \overline{(\alpha^{\pi})^{-1}}' \in M_L(d, D)$. 而

$$B_3(\alpha) = P_1 \overline{(\alpha^{\pi})^{-1}}' + (\alpha^{\pi})^{-1} P_2 + U \Delta \overline{U}',$$

其中 P_1、$P_2 \in \mathrm{Mat}_d D$ 与 $\alpha \in E$ 的选取无关. 记 $P(\alpha) = P_1 \overline{(\alpha^{\pi})^{-1}}'$，则 $P(\alpha) + \overline{P(\alpha)}' \in M_L(d, D)$. 以此式左端与 $B_3(\alpha)$ 相加，得

$$B_0(\alpha) = (\alpha^{-1})^{\pi} P_0 + U \Delta \overline{U}' \in M_L(d, D),$$

其中 $P_0 = \overline{P_1}' + P_2$ 与 α 的选取无关. 由于 $E \supsetneqq \{0, 1\}$，可选 $0 \neq \alpha_1 \in E$ 使 $\alpha_1 \neq 1$. 如果 $E \backslash \{0\}$ 对求逆运算封闭，则还可取 $\alpha_2 = (1 + \alpha_1^{-1})^{-1}$，从而 $1 + \alpha_1^{-1} + \alpha_2^{-1} = 0$，

$$\begin{aligned} B_0(1) + B_0(\alpha_1) + B_0(\alpha_2) &= (1 + \alpha_1^{-1} + \alpha_2^{-1})^{\pi} P_0 + U \Delta \overline{U}' \\ &= U \Delta \overline{U}' \in M_L(d, D), \end{aligned}$$

$\mathrm{Im}(T(1) - I)$ L- 全奇异，如所欲证.

以下设 $F = F_2$ 且 $L = 0$. 此时 $J = 1$ 且 D 是有限域. 用 $M_0(d, D)$、$M^+(d, D)$ 分别表示 $\mathrm{Mat}_d D$ 中交错方阵、对称方阵的集合. 我们已经知道 $\mathrm{Im}(T(1) - I)$ 全迷向，即 $U\Delta U' \in M^+(d, D)$. 要证 $U\Delta U' \in M_0(d, D)$，只须再证明 $U\Delta U'$ 的对角元全是 0. 对 $\alpha_1 \in E \backslash \{0, 1\}$，有

$$B_0(1) + B_0(\alpha_1) = (1 + \alpha_1^{-1})^{\pi} P_0 \in M_0(d, D).$$

$(\alpha_1^{-1})^{\pi} = A_{11} \alpha_1^{-1} A_{11}^{-1}$ 与 $\alpha_1^{-1} I$ 在 $\mathrm{GL}(d, D)$ 中共轭，因而在 F 上有相同的最小多项式 $m(x)$. $m(x)$ 也是 $\alpha_1^{-1} \in D^*$ 的最小多项式，由 $F = F_2$ 是完全域，知 $m(x)$ 在 $D[x]$ 中可分解为两两不同的一次因子的乘积. $(\alpha_1^{-1})^{\pi}$ 在 D 上的最小多项式 $m_D(x)$ 是 $m(x)$ 的因子，

也可分解为 $D[x]$中两两不同的一次因子的乘积. 因此 $(\alpha_1^{-1})^\pi$ 被某个 $C \in \mathrm{GL}(d, D)$ 共轭到对角阵

$$\gamma = C(\alpha_1^{-1})^\pi C^{-1} = \mathrm{diag}(\gamma_1, \cdots, \gamma_d) \in \mathrm{GL}(d, D).$$

且 $C(1+\alpha_1^{-1})^\pi C^{-1} = I + \gamma \in \mathrm{GL}(d, D)$ 也是对角阵. 于是

$$\begin{aligned}(1+\alpha_1^{-1})^\pi P_0 \in M_0(d, D) &\Longrightarrow C(1+\alpha_1^{-1})^\pi P_0 C' \\ &= (1+\gamma)CP_0C' \in M_0(d, D) \\ &\Longrightarrow (1+\gamma)CP_0C' \text{ 的对角元全为零} \\ &\Longrightarrow CP_0C' \text{ 的对角元全为零.}\end{aligned}$$

另一方面,由 $B_0(1) = P_0 + U\Delta U' \in M_0(d, D) \subset M^+(d, D)$ 及 $U\Delta U' \in M^+(d, D)$ 知 $P_0 \in M^+(d, D)$,从而 $CP_0C' \in M^+(d, D)$. 于是 $CP_0C' \in M_0(d, D)$, $P_0 \in M_0(d, D)$. 这导致 $U\Delta U' = B_0(1) - P_0 \in M_0(d, D)$. 如所欲证. ▌

推论 5.6.2 N, g_0, Y 如引理 5.6.1 所设.

(1) 如果 $L \neq 0$, 且对任意 $0 \neq s \in L$, 酉平延 $T_{\nu+1,1}(s) \in N$ 的共轭 $T(s) = g_0 T_{\nu+1,1}(s) g_0^{-1}$ 都含于 $\mathrm{GL}(n, D)$,则存在 $z \in N$, 使 $g_1 = z^{-1}g_0 = (a_{ij})_{n\times n}$ 的元素 $a_{1j} = a_{i,\nu+1} = 0, \forall i \geq 2, j \neq \nu + 1$. $g_1 \notin \Gamma$ 且 $Y = \langle N, g_1 N g_1^{-1}\rangle$, 符合引理5.5.1的要求.

(2) 设 $L = 0$ (即 $N = \Omega(n, D, \Delta)$), $\nu \geq 2$.

$$T_0 = T_{\nu+1,2}(s\alpha)T_{\nu+2,1}(-s\alpha)$$

是 N 的正交二平延, $T(\alpha) = g_0 T_0 g_0^{-1} \in \mathrm{GL}(n, D)$, 其中 $s \in D^*$ 任意给定,当 $\mathrm{char}D \neq 2$ 时 $\alpha = 1$, 而当 $\mathrm{char}D = 2$ 时,α 取遍 D 的一个子体 E(且 $|E| > 2$) 的所有非零值. 则存在 $z \in N$ 使 $g_1 = z^{-1}g_0 = (a_{ij})_{n\times n}$ 的元素 $a_{1j} = a_{2j} = a_{i,\nu+1} = a_{i,\nu+2} = 0$, $\forall i \geq 3$, $j \notin \{\nu+1, \nu+2\}$. $g_1 \notin \Gamma$ 且 $Y = \langle N, g_1 N g_1^{-1}\rangle$, 符合引理5.5.1 的要求.

(3) 如果引理 5.6.1 的条件全部成立(即存在引理中所说的 $T_0(S\alpha) \in N$, $T(\alpha) \in \mathrm{GL}(n, D)$), 则存在引理 5.5.1 所要求的

g_1.

证明 (1) 在引理 5.6.1 中取 $d=1$, $S=1\in \mathrm{Mat}_1 D$. 且当 $L\neq K_J$ 时,取 $E=L$. 注意, $0\neq\alpha\in L\Longrightarrow \alpha^{-1}=\alpha^{-1}\alpha\alpha^{-1}\in L$. 且当 $L\neq K_J$ 时 $|L|=\infty$. 可见引理 5.6.1 的条件全部成立,从而结论成立.

(2) 在引理 5.6.1 中取 $d=2$, $S=\begin{pmatrix}0 & s\\ -s & 0\end{pmatrix}$ 即可.

(3) 按引理 5.6.1 的结论,存在 $z\in N$ 使 $g_2=z^{-1}g_0=(b_{ij})_{n\times n}$ 的元素 $b_{ij}=b_{k,\nu+i}=0$, $\forall 1\leq i\leq d$, $j\geq d+1$ 且 $1\leq k\leq d$ 或 $k\geq \nu+d$. 当 $L\neq 0$ 时,对每个 $0\neq s\in L$ 取 $T_2(s)=g_2T_{\nu+1,1}(s)g_2^{-1}\in Y$. 当 $L=0$ 时必有 $d\geq 2$, 对每个 $s\in D^*$, 取 $T_2(s)=g_2T_{\nu+1,2}(s)T_{\nu+2,1}(-s)g_2^{-1}\in Y$. 则在两种情形下 $T_2(s)$ 都具有形式 $T_2(s)=T_0(B(s))$, 其中 $B(s)\in\mathrm{Mat}_d R$ 依赖于 s. 如果可选 $s=s_1$ 使 $B(s_1)\notin\mathrm{Mat}_d D$, 则 $T_2(s_1)\notin\Gamma$. 此时取 $g_1=T_2(s_1)$, 则易见 g_1 具有引理 5.5.1 所要求的零元素,恰如所需. 否则,由本推论(1)或(2)即知所需的 g_1 存在. ▌

§5.7 酉群 $\mathrm{U}'(n, D, \Delta, L)$与含零矩阵生成的扩群(续)

本节仍设 $R=\mathrm{Mat}_r F$ 是体 F 上全方阵环, D 是 R 的子体. 假设已经定出了线性群 $\mathrm{SL}(n, D)$在 $\mathrm{GL}(n, R)$中的扩群,现在希望定出酉群 $N_1=\mathrm{U}'(n, D, \Delta, L)$ 在 $\mathrm{GL}(n, R)$中的扩群, N_1 的 Witt 指数 $\nu_L(\Delta)=\nu\geq 2$, 且 $\Delta\in\mathrm{Mat}_n D$ 具有标准形

$$\Delta=\begin{pmatrix}O & I_{(\nu)} & O\\ O & O & O\\ O & O & \Delta_0\end{pmatrix},$$

其中 $\Delta_0\in\mathrm{Mat}_{n-2\nu}D$ 定号且 $\Delta_0+\rho\overline{\Delta_0^T}$ 是可逆的单项矩阵. 如果 $X\leq\Gamma=\mathrm{GL}(n, D)\cdot N_R(D)$ 或 $X\geq\mathrm{SL}(n, D)$, 则 X 都认为是

已知的. 故设 $X \not\leq \Gamma$；且设 $X \not\geq SL(n, D)$，并可用满足条件 $U'(n, D, \Delta, L_1)$ 的最大的 L_1 代替 L，使 $X \cap GL(n, D) \leq GU(n, D, \Delta, L)$.

只要能在 X 中找到引理 5.5.1 所说的含零矩阵 g_1，由引理 5.5.1 即可知道 X 含有元素 $T_0 = T_{21}(B_0)T_{\nu+1, \nu+2}(C_0)$ 使 B_0、$C_0 \notin D$，且 $B_0 = C_0$ 或 $B_0 + C_0 \in D$ 成立. 紧接着的问题是：怎样定出 $Y = \langle N, T_0 \rangle$ 的构造？我们希望在 Y 中找到某个更大的典型群的一个根子群. 为此，考虑 Y 中所含的形如 $\mathrm{diag}(A, B, I)(A, B \in GL(\nu, R))$ 的准对角阵的全体所组成的子群 Y_1. 首先，

$$Y_1 \geq N_0 = \{\mathrm{diag}(A, (\overline{A}^T)^{-1}, I) \mid A \in SL(\nu, D)\} < N.$$

并且还有 $T_0 = \mathrm{diag}(T_{21}(B_0), T_{12}(C_0), I) \in Y_1$. 考虑 Y_1 的子群 $Y_0 = \langle N_0, T_0 \rangle$，并考虑 Y_0 到 $GL(\nu, R)$ 中的同态

$$\varphi_1: \mathrm{diag}(A, B, I) \mapsto A \quad 及 \quad \varphi_2: \mathrm{diag}(A, B, I) \mapsto B.$$

由 $B_0 = C_0$ 或 $B_0 + C_0 \in D$ 成立，知 φ_1 与 φ_2 的象 $\varphi_1(Y_0) = \langle SL(\nu, D), T_{21}(B_0) \rangle$ 与 $\varphi_2(Y_0) = \langle SL(\nu, D), T_{12}(C_0) \rangle$ 相等，记为 Z_0. Z_0 是 $SL(\nu, D)$ 在 $GL(\nu, R)$ 中的扩群，并且不含于 $GL(\nu, D) \cdot N_R(D)$，可以假定它预先已经定出，等于某个中间体 E 上的线性群 $SL(\nu d, E)$ ($F \subseteq E \subsetneq D$，或当 $r = 1$ 时 $D \subsetneq E \subseteq F = R$)，或当 $\nu = 2$ 且 D、F 是域时是辛群 $Sp(2d, E)$. 不妨用 E 代替 F，使 $Z_0 = SL(\nu r, F)$ 或 $Sp(2r, F)$. Z_0 当然含有 $SL(\nu r, F)$ 的根子群. 我们证明：在

$$Y \cap GL(n, D) \leq GU(n, D, \Delta, L)$$

的假定下，存在 Z_0 的自同构 σ 使 $\mathrm{diag}(A, A^\sigma, I) \in Y_0$ 对所有的 $A \in Z_0$ 成立，σ 将每个 $A \in SL(\nu, D)$ 映到 $(\overline{A}^T)^{-1}$. 这样的 σ 的形式将在下面的引理 5.7.1 中定出. 我们还证明，当 $A \in Z_0$ 取遍 $SL(\nu r, F)$ 的一个根子群时，相应的 $\mathrm{diag}(A, A^\sigma, I) \in Y_0$ 就组成 F 上某个酉群 $U(nr, F, \Delta_F, L_F)$ 的一个由酉二平延组成的根子

群. 这样, Y 包含 $U'(nr, F, \Delta_F, L_F)$ 的根子群. 由第3章关于根子群的知识就能定出 Y.

本节的引理只用于定出酉群 $N_1 = U'(n, D, \Delta, L)$ 的扩群, 而不用于定出线性群 $SL(n, D)$ 在 $GL(n, R)$ 中的扩群. 因此, 在本节的引理的证明过程中, 必要时可以引用以后各章中关于 $SL(n, D)$ 的扩群的结果.

引理 5.7.1 设 F 是体, $R = \mathrm{Mat}_r F$, D 是 R 的子体, $J: \theta \mapsto \bar{\theta}$ 是 D 的对合. 设 $\nu \geq 2$, $Z_1 = SL(\nu, R) = SL(\nu r, F)$, 或 $Z_1 = Sp(2r, F) > SL(2, D)$ (当 $\nu = 2$ 且 D、F 是域). 设 σ 是群 Z_1 的自同构, 且将所有的 $A \in SL(\nu, D) < Z_1$ 映到 $(\bar{A}^T)^{-1}$. 则 σ 具有下面两种形式之一:

(i) $\sigma: A \mapsto \Lambda_1 (A^{\tau\prime})^{-1} \Lambda_1^{-1}$, 其中 $\Lambda_1 = I^{(\nu)} \otimes \Lambda$, $\Lambda \in GL(r, F)$, τ 是 F 的反自同构, 满足条件 $\bar{\theta} = \Lambda \theta^{\tau\prime} \Lambda^{-1}$, $\forall \theta \in D$. 如果还有 $\sigma^2 = 1$, 则可选上述 τ、Λ 满足 $\tau^2 = 1$ 及 $\Lambda^{\tau\prime} = \pm \Lambda$.

(ii) $\nu = 2$, D 是域, $Z_1 = SL(2r, F)$, $\sigma: A \mapsto \Lambda_1 A^{\pi} \Lambda_1^{-1}$, $\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ -\Lambda & 0 \end{pmatrix}$, $\Lambda \in GL(r, F)$, π 是 F 的自同构, 满足条件 $\bar{\theta} = \Lambda \theta^{\pi} \Lambda^{-1}$.

证明 由定理 1.3.4 知: $Z_1 = SL(\nu r, F)$ 的自同构 σ 具有形式

$$(1) \qquad \sigma: A \mapsto \Lambda_1 A^{\pi} \Lambda_1^{-1}$$

$$或 \quad (2) \qquad A \mapsto \Lambda_1 (A^{\tau\prime})^{-1} \Lambda_1^{-1},$$

其中 $\Lambda_1 \in GL(\nu, F)$, $\pi \in \mathrm{Aut} F$, τ 是 F 的反自同构. 由定理 1.4.4知, $Z_1 = Sp(2r, F)$ 的自同构 σ 具有上述的形式(2), 仅当 $Z_1 = Sp(4, F)$ 且 F 是特征 2 的完全域时可能出现例外情形: σ 将 Z_1 的辛平延变成辛二平延, 而将辛二平延变成辛平延. 但在本引理的条件下, σ 将辛二平延 $T_{21}(I^{(2)}) \in SL(2, D) < Sp(4, F)$ 变到 $T_{12}(-I^{(2)})$, 仍是辛二平延, 故这个例外情形不会出现.

先设(1)成立. 对任意 $\theta \in D^*$, $1 \leq k, l \leq \nu$, $k \neq l$, 我们有 $T_{kl}(\theta)^\sigma = T_{lk}(-\overline{\theta}) = \Lambda_1 T_{kl}(\theta^\pi)\Lambda_1^{-1}$, 这里 $\theta^\pi = (\theta_{ij}^\pi)_{r\times r} \in \mathrm{GL}(r, F)$ 由 $\pi \in \mathrm{Aut}F$ 作用于 $\theta = (\theta_{ij})_{r\times r} \in D$ 的每个分量 $\theta_{ij} \in F$ 而得到. 将 Λ_1 写成分块形式 $\Lambda_1 = (B_{ij})_{\nu\times\nu}$, 使所有的块 $B_{ij} \in \mathrm{Mat}_r F$. 比较等式

$$\Lambda_1(T_{kl}(\theta^\pi) - I) = (T_{lk}(-\overline{\theta}) - I)\Lambda_1$$

两端的第(k, j)块、第(j, k)块$(1 \leq j \leq \nu)$, 得 $B_{jk} = B_{kj} = 0$ 对所有的 $j \neq l$ 成立, 而 $B_{lk}\theta^\pi = -\overline{\theta}B_{kl}$. 特别 $B_{kk} = 0$ 对所有的 $1 \leq k \leq \nu$ 成立. 如果 $\nu \geq 3$, 则对任意 $1 \leq i, j \leq \nu$, 可选 $k = i$ 及 $l \neq i, j$ 得到 $B_{ij} = 0$, 从而 $\Lambda_1 = 0$, 与 $\Lambda_1 \in \mathrm{GL}(\nu r, F)$ 相矛盾. 于是只剩下 $\nu = 2$ 的情形, 此时已有 $B_{11} = B_{22} = 0$, 且可在等式 $B_{12}\theta^\pi = -\overline{\theta}B_{21}$ 两端取 $\theta = I$, 得 $B_{12} = -B_{21}$. 记 $\Lambda = B_{12}$, 则 $\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ -\Lambda & 0 \end{pmatrix}$. 且 $\Lambda\theta^\pi = \overline{\theta}\Lambda$, 即 $\overline{\theta} = \Lambda\theta^\pi\Lambda^{-1}$. 本引理结论(ii)成立.

以下设(2)成立. 为叙述方便, 对 F 上任意矩阵 A, 记 $A^* = A^{\tau'}$ 为 A 的每个元素被 τ 作用后再作转置得到的矩阵. 对任意 $\theta \in D^*$, $1 \leq i, j \leq \nu$, $i \neq j$, 有

$$T_{ji}(\theta)^\sigma = T_{ij}(-\overline{\theta}) = \Lambda_1 T_{ij}(-\theta^*)\Lambda_1^{-1},$$

从而 $$\Lambda_1(T_{ij}(-\theta^*) - I) = (T_{ij}(-\overline{\theta}) - I)\Lambda_1.$$

比较最后这个等式两端的第(i, l)块、第(k, j)块 $(1 \leq k, l \leq \nu)$ 得 $B_{jl} = B_{ki} = 0 (\forall k \neq i, j \neq l)$, 且 $B_{ii}\theta^* = \overline{\theta}B_{jj}$. 于是 $\Lambda_1 = \mathrm{diag}(B_{11}, \cdots, B_{\nu\nu})$ 是准对角阵, 且可取 $\theta = I$ 得 $B_{ii} = B_{jj}$. 可见 $\Lambda_1 = \mathrm{diag}(\Lambda, \cdots, \Lambda) = I^{(\nu)} \otimes \Lambda$ 对某个 $\Lambda \in \mathrm{GL}(r, F)$ 成立. 且 Λ 满足 $\overline{\theta} = \Lambda\theta^*\Lambda^{-1}$, $\forall \theta \in D$. 由 $\sigma^2 = 1$ 知, 对任意 $C \in \mathrm{Mat}_r F$ 有

$$T_{ij}(C) = (T_{ji}(-\Lambda C^*\Lambda^{-1}))^\sigma = T_{ij}(\Lambda_0^{-1}C^{\tau^2}\Lambda_0)$$

从而 $C = \Lambda_0^{-1}C^{\tau^2}\Lambda_0$, 这里 $\Lambda_0 = \Lambda^*\Lambda^{-1}$. 记 F_0 为 F 的素域. 当 $C \in \mathrm{Mat}_r F_0$ 时有 $C^{\tau^2} = C$, 从而 $C = \Lambda_0^{-1}C\Lambda_0$. 这说明 Λ_0 中心化

$\mathrm{Mat}_r F_0$，从而 $\Lambda_0 = \lambda I (\lambda \in F^*)$ 是 F 上的纯量阵. 于是 $C^{\tau^2} = \lambda C \lambda^{-1}$ 对任意 $C \in \mathrm{Mat}_r F$ 成立. 从而 $a^{\tau^2} = \lambda a \lambda^{-1}$ 对所有 $a \in F$ 成立. 当然也有 $\Lambda^{\tau^2} = \lambda \Lambda \lambda^{-1}$. 但另一方面，由 $\Lambda^* \Lambda^{-1} = \Lambda_0 = \lambda I$ 得 $\Lambda^* = \lambda \Lambda$，$\Lambda^{\tau^2} = (\Lambda^*)^* = (\lambda\Lambda)^* = \lambda \Lambda \lambda^\tau$. 于是由 $\lambda \Lambda \lambda^{-1} = \Lambda^{\tau^2} = \lambda \Lambda \lambda^\tau$ 得 $\lambda^\tau = \lambda^{-1}$，$\lambda^\tau \lambda = 1$. 注意，由 $\Lambda_1 = \mathrm{diag}(\Lambda, \cdots, \Lambda)$ 和 $\Lambda^* = \lambda\Lambda$ 得 $\Lambda_1^* = \lambda \Lambda_1$. 对任意的 $A \in Z_1$，可以把 $A^\sigma = \Lambda_1 A^{*-1} \Lambda_1^{-1}$ 改写为

$$A^\sigma = (\Lambda_1 \delta)(\delta^{-1} A^\tau \delta)'^{-1} (\Lambda_1 \delta)^{-1},$$

其中 $\delta \in F^*$ 待定. 注意，$\tau_1 : F \to F$，$a \mapsto \delta^{-1} a^\tau \delta$ 仍是 F 的反自同构. 记 $\Lambda_2 = \Lambda_1 \delta$，则 $A^\sigma = \Lambda_2 (A^{\tau_1})'^{-1} \Lambda_2^{-1}$. 对任意的 $a \in F$，有

$$a^{\tau_1^2} = (\delta^{-1} a^\tau \delta)^{\tau_1} = \lambda_0 a^{\tau^2} \lambda_0^{-1} = \lambda_1 a \lambda_1^{-1},$$

其中 $\lambda_0 = \delta^{-1} \delta^\tau$，$\lambda_1 = \lambda_0 \lambda = \delta^{-1} \delta^\tau \lambda$，且 $(\Lambda_2^{\tau_1})' = \lambda_0 \Lambda_1^* \delta = \lambda_1 \Lambda_2$. 我们希望选 δ 使 $\lambda_1 = \pm 1$，从而 $\tau_1^2 = 1$. 当 $\lambda = -1$ 时，取 $\delta = 1$，$\lambda_1 = \lambda$ 即可；否则，可选 $\delta = \lambda + 1 \neq 0$，此时由 $\lambda^\tau = \lambda^{-1}$ 得 $\delta^{-1}\delta^\tau = (\lambda + 1)^{-1}(\lambda^{-1} + 1) = \lambda^{-1}$，从而 $\lambda_1 = 1$. 对这样选取的 δ，用 τ_1、λ_1、Λ_2 分别代替 τ、λ、Λ_1，可化为 $\tau^2 = 1$，$\lambda = \pm 1$，$\Lambda_1^* = \pm \Lambda_1$ 的情形. 即 τ 是 F 的对合，$\Lambda_1^* = \pm \Lambda_1$，从而 $\Lambda^* = \pm \Lambda$，如所欲证. ▌

将引理 5.7.1 应用于 C_4 问题，得到如下推论：

推论 5.7.2　设 σ 如引理 5.7.1(i)所说. 并且设 F 是域，$D = FI^{(\tau)}$，若将 J 也看成 F 的对合使 $a^J I = (aI)^J (\forall a \in F)$，则 $\tau = J$. 设 $N_2 = \mathrm{U}'(r, F, H_2)$是关于对合 J 的酉群且 $\nu(H_2) \geq 1$，但排除 $N_2 = \Omega^+(2, F)$ 的情形；或 $N_2 = O(r, F, H_2)$ $(\mathrm{char} F \neq 2, r \geq 3)$. 并且假定对所有的 $A \in Z_1 = \mathrm{SL}(\nu r, F)$ 或 $\mathrm{Sp}(2r, F) > \mathrm{SL}(2, D)$ (当 $\nu = 2$)及 $g = I^{(\nu)} \otimes B (B \in N_2)$ 都有 $(gAg^{-1})^\sigma = g A^\sigma g^{-1}$ 成立，则引理 5.7.1 所说的 $\Lambda = cH_2$，对某个 $c \in F^*$，且可选 $\Lambda = H_2$.

证明　$\forall a \in F$，$aI \in D$，有 $\overline{aI} = \Lambda(a^\tau I)\Lambda^{-1} = a^\tau I$，从而 $a^J = a^\tau$. 这证明了 $\tau = J$. 对任意使 $T_{12}(C) \in Z_1$ 的 $C \in R$，及任

意 $g = I \otimes B \in I \otimes N_2 < \mathrm{GL}(\nu, R)$，由

$$(gT_{12}(C)g^{-1})^\sigma = T_{12}(BCB^{-1})^\sigma = T_{21}(-\Lambda B^{*-1}C^*B^*\Lambda^{-1})$$

$$= gT_{12}(C)^\sigma g^{-1} = T_{21}(-B\Lambda C^*\Lambda^{-1}B^{-1})$$

知 $A^{-1}C^*A = C^*$ 对 $A = \Lambda^{-1}B^{-1}\Lambda B^{*-1}$ 成立. C 可取遍集合 $E = \{C \in \mathrm{Mat}_r F \mid T_{21}(C) \in Z_1\}$，故 A 含于 E 在 $R = \mathrm{Mat}_r F$ 中的中心化子. 当 $Z_1 = \mathrm{SL}(\nu r, F)$ 时 $E = R$，其中心化子就是 R 的中心 $FI^{(r)}$. 当 $Z_1 = \mathrm{Sp}(2r, F, H) > \mathrm{SL}(2, FI^{(r)})$ 时，H 应具有形式 $H = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ -\Lambda & 0 \end{pmatrix}$，对某个 $\Lambda \in \mathrm{GL}(r, F)$. 此时 $E = \{S\Lambda^{-1} \mid S' = S \in \mathrm{Mat}_r F\}$. E 生成的环等于 R，从而 E 的中心化子仍为 $FI^{(r)}$. 总之，A 应是纯量阵 aI，$a \in F^*$. 即 $\Lambda^{-1}B^{-1}\Lambda B^{*-1} = aI$，$B\Lambda B^* = a^{-1}\Lambda$，$B$ 属于关于对合 J 的广义酉群 $\mathrm{GU}(r, F, \Lambda)$. 但 B 可取遍 $N_2 = \mathrm{U}'(r, F, H_2)$ 或 $O(r, F, H_2)$. 故 $N_2 \leq \mathrm{GU}(r, F, \Lambda)$.

当 $N_2 = \mathrm{U}'(r, F, H_2)(\nu(H_2) \geq 1)$ 时，N_2 可由根元素生成，而根元素都是幺幂元素；当 $N_2 = O(r, F, H_2)(r \geq 3)$ 时，N_2 可由对称生成，而每个对称 $S_w(Q(w) \neq 0)$ 满足条件 $\dim \mathrm{Ker}(S_w - I) = r - 1 \geq r/2$. 由引理 4.2.3(2)知，这些生成元都含于 $\mathrm{U}(r, F, \Lambda)$，从而 $N_2 \leq \mathrm{U}(r, F, \Lambda)$. 对每个 $B \in N_2$，由 $B \in \mathrm{U}(r, F, H_2)$ 有 $BH_2B^* = H_2$，由 $B \in \mathrm{U}(r, F, \Lambda)$ 有 $B\Lambda B^* = \Lambda$. 于是 $\Lambda H_2^{-1} = (B\Lambda B^*)(BH_2B^*)^{-1} = B(\Lambda H_2^{-1})B^{-1}$. 这说明 ΛH_2^{-1} 含于 N_2 的中心化子 $FI^{(r)}$，等于某个纯量阵 cI，$c \in F^*$. 于是 $\Lambda = cH_2$. 用 H_2 代替 Λ，不会改变 σ，可以化为 $\Lambda = H_2$ 的情形. (注：当 $\nu(H_2) \geq 1$ 时，可以直接用引理 4.2.4 由 $N_2 \leq \mathrm{GU}(r, F, H_2)$ 推出 $\Lambda = cH_2$. 但这没有包括 $N_2 = O(r, F, H_2)$ 而 $\nu(H_2) = 0$ 的情形. 因此我们另外给出了一个证明.) ∎

现在我们可以用引理 5.7.1 来研究 $N_1 = \mathrm{U}'(n, D, \Delta, L)$ 在 $\mathrm{GL}(n, R)$中的扩群. 不过，在 C_4 问题中，并不要求定出 N_1 的全部

扩群，而是要对某个 $N_2 \leq R^*$ 定出 $N = N_1(I^{(n)} \otimes N_2)$ 在 $\mathrm{GL}(n, R)$中的扩群. 为了叙述统一起见，在 C_3、C_5 问题中我们定义 $N_2 = \{I\}$. 这样，在三种情形下我们的目的都是要定出 $N = N_1(I^{(n)} \otimes N_2)$ 在 $\mathrm{GL}(n, R)$中的扩群. 现在再把这三种情形具体描述如下：

C_3 情形：$r \geq 2$，F 是任意体，$\mathrm{Mat}_{1\times r}F$ 是体 D 上 1 维右空间，$N_2 = \{I\}$ 是单位元群.

C_5 情形：$r = 1$，F 是域，$R = F \supsetneqq D$，$N_2 = \{I\}$ 是单位元群.

C_4 情形：$r \geq 2$，F 是域，$D = FI^{(r)}$，将 J 看成 F 的对合，N_2 是关于 J 的某个酉群

$$\mathrm{U}(r, F, H_2) = \{A \in \mathrm{GL}(r, F) \mid AH_2\overline{A}' = H_2\}$$

或

$$\mathrm{U}'(r, F, H_2).$$

注意，在下面的引理中，对 N 是 C_4 类子群的一种情形（$\nu = 2$ 且 $Z_0 = \mathrm{Sp}(2r, F)$ 的情形）并没有最后确定扩群 Y 的类型，而只是在结论(iii)中对 Y 给出了一些性质. 这些性质将在第 7 章引理 7.4.4中被用来进一步确定 Y.

引理 5.7.3　设 $N_1 = \mathrm{U}'(n, D, \Delta, L) < \mathrm{U}(n, D, H)$ 和 $N = N_1(I^{(n)} \otimes N_2)$ 如上定义. N_1 的 Witt 指数 $\nu_L(\Delta) = \nu \geq 2$，当 $\nu = 2$ 且 $N = \Omega(n, D, \Delta)$ 时只讨论 C_3 情形. 设 $R = \mathrm{Mat}_r F$，Y 是由 N 与若干个准对角阵 $Y_i = \mathrm{diag}(A_i, B_i, I) \in \mathrm{GL}(n, R)$ 一起生成的群，其中所有的 A_i、$B_i \in \mathrm{GL}(\nu, R)$. 设 $Y \cap \mathrm{GL}(n, D) \leq \mathrm{GU}(n, D, \Delta, L)$，并且设子群

$$Z_0 = \langle \mathrm{SL}(\nu, D)(I \otimes N_2),\ A_i \mid \forall i \rangle$$

与

$$\langle \mathrm{SL}(\nu, D)(I \otimes N_2),\ B_i \mid \forall i \rangle$$

相等，等于 $\mathrm{SL}(\nu, R) = \mathrm{SL}(\nu r, F)$，或在 $\nu = 2$ 且 D 是域的情况下 $Z_0 = \mathrm{Sp}(2r, F)$. 则下列结论之一成立：

(i) Y 包含且正规化某个 $\mathrm{U}'(nr, F, \Delta_F, L_F)$.

(ii) $N=\mathrm{SU}(4, D, H)$, $r=2$, D是FI的二次扩域, $J\neq 1$, $K_J=FI$. 或$N=\Omega(4, D, \Delta, FI)$, $r=2$, D是特征2的非完全域, $D^2\subseteq FI$. $Z_0=\mathrm{Sp}(4, F)$, Y包含且正规化Ω_7, Ω_7是$G=\Omega^+(8, F)>N$的可约子群$\Omega(7, F)$在G的某个外自同构下的不可约象.

(iii) N是C_4类子群, $\nu=2$, $Z_0=\mathrm{Sp}(2r, F)$, Y包含所有的$\mathrm{diag}(A, A^\sigma, I)$, $\forall A\in Z_0$, 其中

$$\sigma: A\mapsto A^\sigma=(I^{(2)}\otimes\Lambda)(\overline{A}')^{-1}(I^{(2)}\otimes\Lambda)^{-1}$$

是Z_0的自同构, $\Lambda\in\mathrm{GL}(r, F)$是对称或反对称方阵,且当$N_2\neq O(2, F, H_2)$时$\Lambda=H_2$.

证明　先定义

$$Y_2=\{\mathrm{diag}(A, B, C)\in Y\,|\,A, B\in\mathrm{GL}(\nu r, F),$$

$$C\in\mathrm{GL}((n-2\nu)r, F)\},$$

$$Y_1=\{\mathrm{diag}(A, B, I)\in Y\,|\,A, B\in\mathrm{SL}(\nu r, F)\}.$$

则$Y_1\trianglelefteq Y_2$, 定义Y_2到$\mathrm{GL}(\nu r, F)$中的群同态φ_1、φ_2,将每个$g=\mathrm{diag}(A, B, C)\in Y_2$分别映到$\varphi_1(g)=A$和$\varphi_2(g)=B$. 则$\varphi_1(Y_1)$与$\varphi_2(Y_1)$都包含$Z_0$,也都含于$\mathrm{SL}(\nu r, F)$. 记$Z_1=\varphi_1(Y_1)$, 则当$Z_0=\mathrm{SL}(\nu r, F)$时, $\varphi_2(Y_1)=\mathrm{SL}(\nu r, F)=Z_1$. 我们指出:当$\nu=2$且$Z_0=\mathrm{Sp}(2r, F)$时, $Z_1=\varphi_1(Y_1)$与$\varphi_2(Y_1)$也相等. 当$\nu=2$时,Y的子群N_1中有元素

$$\Sigma=\begin{pmatrix} O & I^{(2r)} & O \\ \rho I^{(2r)} & O & O \\ O & O & I \end{pmatrix}.$$

Σ将每个$g=\mathrm{diag}(A, B, I)\in Y_1$共轭到$\tilde{g}=\Sigma g\Sigma^{-1}=\mathrm{diag}(B, A, I)\in Y_1$, 于是每个$A=\varphi_1(g)=\varphi_2(\tilde{g})$, 而$B=\varphi_2(g)=\varphi_1(\tilde{g})$. 这就说明了$Z_1=\varphi_1(Y_1)=\varphi_2(Y_1)$.

当$\nu=2$且$Z_0=\mathrm{Sp}(2r, F)$时,设$Z_0=\mathrm{Sp}(2r, F, H_0)$. 由

$gH_0g' = H_0$ 对 $g = T_{21}(\theta)$、$T_{12}(\theta) \in SL(2, D)(\forall\theta \in D^*)$ 成立，可知 H_0 具有形式 $H_0 = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_0 \\ -\Lambda_0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $\Lambda_0 = \Lambda'_0 \in GL(r, F)$，且 $\theta\Lambda_0 = \Lambda_0\theta'$ 对所有的 $\theta \in D$ 成立.

(5.7.3.1) 在 $Y \cap GL(n, D) \leq GU(n, D, \Delta, L)$ 的假定下，使 $g_0 = \mathrm{diag}(A_0, I, I) \in Y_1$ 或 $g_0 = \mathrm{diag}(I^{(\nu)}, A_0, I) \in Y_1$ 的 $A_0 \in SL(\nu r, F)$ 必然是中心纯量阵.

若不然，设 $A_0 \notin Z(F)^* I$，我们证明 $Y \cap GL(n, D) \not\leq GU(n, D, \Delta, L)$. 不妨只考虑 $g_0 = \mathrm{diag}(A_0, I, I) \in Y_1$ 的情形. 对每个 $A \in Z_1$，存在 $g = \mathrm{diag}(A, B, I) \in Y_1$，$gg_0g^{-1} = \mathrm{diag}(AA_0A^{-1}, I, I) \in Y_1 \cap \mathrm{Ker}\varphi_2$. 于是 A_0 在 $Z_1 = \varphi_1(Y_1)$ 中的所有的共轭 AA_0A^{-1} 所生成的正规子群 $\tilde{Z}_1$ 含于 $Y_1 \cap \mathrm{Ker}\varphi_2$. 但 $Z_1 = SL(\nu r, F)$ 或 $Sp(2r, F)$，且 $Z_1 \neq SL(2, 2)$、$SL(2, 3)$，除 $Z_1 = Sp(4, F_2)$ 的情形外，Z_1 中不含于 $Z(F)^* I$ 的正规子群 $\tilde{Z}_1$ 只能等于 Z_1 本身，因而 $\tilde{Z}_1 \geq SL(\nu, D)$. $\tilde{Z}_1 \neq Z_1$ 的仅有的情形是：$Z_1 = Sp(4, F_2) > SL(2, F_4)$，且 $\tilde{Z}_1$ 是 Z_1 的换位子群. 但 Z_1 的子群 $SL(2, D) = SL(2, F_4)$ 的换位子群等于它自身，因而含于 $\tilde{Z}_1$. 这样，在所有情形下都有 $\tilde{Z}_1 \geq SL(\nu, D)$. 取 $A_1 = T_{21}(I) \in SL(\nu, D)$，则 $g_1 = \mathrm{diag}(A_1, I, I) \in Y_1$，然而 g_1 不含于 N_1 的正规化子 $GU(n, D, \Delta, L)$，这与引理的假设相矛盾.

(5.7.3.2) 设 ψ 是 $GL(\nu r, F)$ 到射影群 $PGL(\nu r, F) = GL(\nu r, F)/(Z(F)^* I)$ 中的标准同态，$\psi(Z_1) = PSL(\nu r, F)$ 或 $PSp(2r, F)$ 是 Z_1 在 $PGL(\nu r, F)$ 中的象. 则条件 $\mathrm{diag}(A, B, I) \in Y_1(A, B \in Z_1)$ 定义了 $\psi(Z_1)$ 的一个自同构 $\sigma_1 : \psi(A) \mapsto \psi(B)$.

设有 B_1、$B_2 \in Z_1$ 使 $g_i = \mathrm{diag}(A, B_i, I) \in Y_1 (i = 1, 2)$ 对同一个 $A \in Z_1$ 成立. 则 $g_0 = g_1^{-1}g_2 = \mathrm{diag}(I, B_1^{-1}B_2, I) \in Y_1$ 成立. 由 (5.7.3.1) 得 $B_1^{-1}B_2 \in Z(F)^* I$，即 $B_2 \in Z(F)^* B_1$，

$\psi(B_1) = \psi(B_2)$. 这证明了满足条件的 $\mathrm{diag}(A, B, I) \in Y_1$ 的 B 在 $\mathrm{PGL}(nr, F)$ 中的象 $\psi(B)$由 A 唯一决定. 同理可证 $\psi(A)$也由 B 唯一决定. 于是 $\psi(A) \mapsto \psi(B)$ 是 $\psi(Z_1)$到自身的可逆变换. 由

$$\mathrm{diag}(A, B, I)\mathrm{diag}(A_1, B_1, I) = \mathrm{diag}(AA_1, BB_1, I)$$

知 σ 是乘法群 $\psi(Z_1)$的自同构.

(5.7.3.3) *存在 Z_1 的自同构 $\sigma: A \mapsto \Lambda_1(A^*)^{-1}\Lambda_1^{-1}$, 使 $\mathrm{diag}(A, A^\sigma, I) \in Y_1$ 对所有的 $A \in Z_1$ 成立, 其中 $A^* = A^{\tau\prime}$, τ 是 F 的对合, $\Lambda_1 = I^{(\nu)} \otimes \Lambda$, $\Lambda \in \mathrm{GL}(r, F)$ 是 ε-Hermite 方阵 ($\varepsilon = \pm 1$), 且满足 $\bar{\theta} = \Lambda\theta^*\Lambda^{-1}$, $\forall \theta \in D$. 在 C_4 情形下, 除 $N_2 = O(2, F, H_2)$ 的情形外, $\Lambda = H_2$ 成立.*

射影群 $\psi(Z_1)$的自同构 σ_1 可由 Z_1 的一个自同构 σ 诱导出来.

对 $\mathrm{SL}(\nu, D) < Z_1$ 的任意一个平延 P, 由 $\mathrm{diag}(P, (\overline{P}^T)^{-1}, I) \in N \cap Y_1$ 知 $P^\sigma = \lambda(\overline{P}^T)^{-1}$ 对某个 $\lambda \in Z(F)^*$ 成立. 但 $\sigma \in \mathrm{Aut}Z_1$ 将幺幂元 T 仍映到幺幂元. 已经知道 $(\overline{P}^T)^{-1}$ 幺幂, 因此 $\lambda(\overline{P}^T)^{-1}$ 幺幂 $\Longleftrightarrow \lambda = 1$. 故 $P^\sigma = (\overline{P}^T)^{-1}$. $\mathrm{SL}(\nu, D)$ 由平延生成, 故 $A^\sigma = (\overline{A}^T)^{-1}$ 对所有的 $A \in \mathrm{SL}(\nu, D)$ 成立. 于是 σ 满足引理 5.7.1 所述的条件, 引理 5.7.1 的结论(i)或(ii)成立.

当 $r = 1$ 时(即在 C_5 情形下), $Z_1 = \mathrm{SL}(2, F) = \mathrm{Sp}(2, F)$, 引理 5.7.1(i)成立. 设 $r \geq 2$, 我们证明引理 5.7.1(ii)不可能成立, 只可能使引理 5.7.1(i)成立.

若不然, 设 $\nu = 2$, $Z_1 = \mathrm{SL}(2r, F)$, $A^\sigma = \Lambda_1 A^\pi \Lambda_1^{-1}$, $\pi \in \mathrm{Aut}F$, $\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ -\Lambda & 0 \end{pmatrix}$, $\Lambda \in \mathrm{GL}(r, F)$. 对任意 $C \in \mathrm{SL}(r, F)$, 取 $A = \mathrm{diag}(C, I) \in \mathrm{SL}(2r, F)$, 则 $A^\sigma = \mathrm{diag}(I, C_1)$, 其中 $C_1 = \Lambda C^\pi \Lambda^{-1}$. 于是 $g_1 = \mathrm{diag}(C, I^{(r)}, I^{(r)}, C_1, I) \in Y_1$.

当 $L \neq 0$ 时, 不妨设 $1_D = I^{(r)} \in L$. 则

$$g_1^{-1}T_{31}(I)g_1 = T_{31}(C) \in Y, \quad g_1 T_{13}(I) g_1^{-1} = T_{13}(C) \in Y.$$

从而 $T_{31}(B) \in Y$ 和 $T_{13}(B) \in Y$ 对 $\mathrm{SL}(r, F)$生成的加群 $R =$

$\mathrm{Mat}_r F$ 中所有的元素 B 成立. 由引理 5.3.1 可知 Y 的子群 $\langle T_{31}(B), T_{13}(B) \mid B \in R\rangle$ 等于

$$\left\{\begin{pmatrix} A_{11} & & A_{13} & \\ & I & & \\ A_{31} & & A_{33} & \\ & & & I \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2r, F)\right\},$$

其中包含 $\mathrm{diag}(A, I^{(nr-r)}) \in Y_1 \cap \mathrm{Ker}\varphi_2$, $\forall A \in \mathrm{SL}(r, F)$. 这与(5.7.3.1)相违背.

现在设 $L = 0$, $N_1 = \Omega(n, D, \Delta)$. 按引理假设,此时只考虑 C_3 情形. 对每个 $\theta \in D^*$, 取 $T_1 = T_{41}(\theta)T_{32}(-\theta) \in N < Y$, 并考虑 T_1 与 g_1 的换位子 $T_2 = g_1 T_1 g_1^{-1} T_1^{-1} = T_{41}(C_2) \in Y$, 其中 $C_2 = C_1\theta C^{-1} - \theta$. 我们证明可选取 C 使 $C_2 \neq 0$. 若不然,则对所有的 $\theta \in D^*$ 都有 $C_2 = \Lambda C^* \Lambda^{-1}\theta C^{-1} - \theta = 0$. 即 $\Lambda C^* \Lambda^{-1} = \theta C \theta^{-1}$ 与 θ 的选择无关. 于是 $\theta C \theta^{-1} = C$ 对所有 $\theta \in D^*$ 成立. 也就是说 C 中心化 D. 但 C 可取遍 $\mathrm{SL}(r, F)$,这迫使 D 含于 $\mathrm{SL}(r, F)$的中心化子 $Z(F)I^{(r)}$. 在 C_3 情形下这不成立.

这就证明了可选择 θ 使 $C_2 \neq 0$. 当 $n \geq 5$ 时,N 中存在置换阵 Σ 将 T_2 共轭到 $g_0 = T_{21}(C_2)$, 这与(5.7.3.1)相矛盾. 在剩下的情形 $N = \Omega(4, D, \Delta)$ 里,取

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \in O(4, D, \Delta, L),$$

并考虑 Y 的共轭子群 $\widetilde{Y} = \Sigma_1 Y \Sigma_1^{-1}$. 由于 Σ_1 正规化 N, $\widetilde{Y} \geq N$. 又 $\widetilde{Y}$包含 $g_0 = \Sigma_1 T_{41}(C_2)\Sigma_1^{-1} = T_{21}(C_2)$. 记

$$\widetilde{Y}_1 = \{\mathrm{diag}(A, B) \in \widetilde{Y} \mid A, B \in \mathrm{SL}(2r, F)\},$$

并且定义映射 $\widetilde{\varphi}_i: \widetilde{Y}_1 \to \mathrm{SL}(2r, F)(i = 1, 2)$ 将每个 $g =$

$\mathrm{diag}(A, B)$ 分别映到 $\tilde{\varphi}_1(g) = A$，$\tilde{\varphi}_2(g) = B$，则

$$\tilde{Z}_1 = \varphi_1(\tilde{Y}_1) \geq \langle \mathrm{SL}(2, D), T_{21}(C_2) \rangle.$$

由第 6 章定理 6.1.1 知 $\tilde{Z}_1 \geq \mathrm{SL}(2d, E)$ 或 $\tilde{Z}_1 \geq \mathrm{Sp}(2d, E)$ 对 D 与 F 之间的某个域 E 成立，其中 $d = [D : E]$ 是 r 的因子. $g_0 = \mathrm{diag}(T_{21}(C_2), I)$ 在 $\tilde{Y}_1$ 中的所有共轭生成 $\tilde{Y}_1$ 的一个正规子群 $\tilde{Y}_0 \leq \mathrm{Ker}\, \tilde{\varphi}_2$，而 $\tilde{\varphi}_1(\tilde{Y}_0)$ 被 $\tilde{Z}_1$ 正规化，必然包含 $\mathrm{SL}(2, D)$. 特别有 $T_{21}(I^{(r)}) \in \tilde{Z}_0$，从而 $\tilde{Y}$ 中包含 $T_{21}(I^{(r)}) \in \dot{\mathrm{SL}}(4, D)$，它不正规化 N_1，因而 Y 中包含 $\Sigma_1^{-1}T_{21}(I)\Sigma_1 = T_{41}(I) \in \mathrm{SL}(4, D)$ 不正规化 N_1，与引理假设相矛盾.

这就证明了当 $r \geq 2$ 时，引理 5.7.1 的结论(ii)不可能成立，只可能使结论(i)成立. 从而在所有情形下(包括 $r = 1$ 和 $r \geq 2$ 的情形)都可设 $A^{\sigma} = \Lambda_1 A^{*-1} \Lambda_1^{-1}$，其中 $A^* = (A^{\tau})'$，τ 是 F 的反自同构，$\Lambda_1 = I^{(n)} \otimes \Lambda$，$\Lambda \in \mathrm{GL}(r, F)$，$\bar{\theta} = \Lambda\theta^*\Lambda^{-1}$，$\forall \theta \in D$. 对任意 A_1、$A_2 \in Z_1$，有 λ_1、$\lambda_2 \in Z(F)^*$ 使 $g_i = \mathrm{diag}(A_i, \lambda_i A_i^{\sigma}, I) \in Y_1$，从而换位子 $[g_1, g_2] = \mathrm{diag}(A, A^{\sigma}, I) \in Y_1$，其中 $A = [A_1, A_2]$ 是 A_1、A_2 的换位子. 这说明 $\mathrm{diag}(A, A^{\sigma}, I) \in Y_1$ 对 Z_1 的换位子群 Z_1' 中的所有的矩阵 A 成立. 由于 $\nu r \geq 4$，除 $Z_1 = \mathrm{Sp}(4, 2)$ 的情形外，都有 $Z_1' = Z_1$. 而当 $Z_1 = \mathrm{Sp}(4, 2)$ 时，唯一的 $\lambda \in Z(F)^*$ 等于 1，仍有 $\mathrm{diag}(A, A^{\sigma}, I) \in Y_1$. 于是 $g(A) = \mathrm{diag}(A, A^{\sigma}, I) \in Y_1$ 对所有的 $A \in Z_1$ 成立.

在 C_4 情形下，对任意 $A \in Z_1$ 和 $P \in N_2$，记 $P_1 = I^{(\nu)} \otimes P$，则由 $g = \mathrm{diag}(A, A^{\sigma}, I) \in Y_1$ 可知 $(I^{(n)} \otimes P)g(I^{(n)} \otimes P)^{-1} = \mathrm{diag}(P_1AP_1^{-1}, P_1A^{\sigma}P_1^{-1}, I) \in Y_1$. 从而 $(PAP^{-1})^{\sigma} = \lambda(PA^{\sigma}P^{-1})$ 对某个由 A 决定的 $\lambda \in F^*$ 成立. 取 A 为 Z_1 中的幺幂元，则 $(PAP^{-1})^{\sigma}$ 与 $(PA^{\sigma}P^{-1})$ 都是幺幂元，此时只能 $\lambda = 1$. 但 Z_1 可由幺幂元生成，故对所有的 $A \in Z_1$ 都应有 $\lambda = 1$. 即 $(P_1AP_1^{-1})^{\sigma} = P_1A^{\sigma}P_1^{-1}$ 对所有的 $A \in Z_1$，$P_1 \in I^{(\nu)} \otimes N_2$ 成立. 于是由推论5.7.2

知可选 $\Lambda = H_2$.

(5.7.3.4) Δ_F、H_F、L_F 的定义.

设 τ 是(5.7.3.3)中所说的 F 的对合. 对 F 上任一矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times k}$, 仍简记 $A^* = A^{\tau\prime}$ 为 $A^\tau = (a_{ij}^\tau)_{m\times k}$ 的转置矩阵. 设 $\Lambda \in \mathrm{GL}(r, F)$ 如(5.7.3.3)定义, 并对任一 $A \in \mathrm{Mat}_{mr}F$, 将乘积 $(I^{(m)} \otimes \Lambda)A$、$A(I^{(m)} \otimes \Lambda)$ 分别简记为 ΛA、$A\Lambda$. 则由 $\bar{\alpha}\Lambda = \Lambda\alpha^*$ $(\forall \alpha \in D)$ 知 $\overline{A}^T\Lambda = \Lambda A^*$ 对 D 上的任一矩阵 A 成立.

取 $\Delta_F = \Delta\Lambda, H_F = H\Lambda$. 则 $\Delta_F^* = (\Delta\Lambda)^* = \Lambda^*\Delta^* = \varepsilon\Lambda\Delta^* = \varepsilon\,\overline{\Delta}^T\Lambda$, 故 $\Delta_F + \rho\varepsilon\Delta_F^* = (\Delta + \rho\overline{\Delta}^T)\Lambda = H\Lambda = H_F$. 即 H_F 是与 Δ_F 相伴的迹式 $(\rho\varepsilon)$-Hermite 方阵. 而 $\mathrm{U}(nr, F, \Delta_F, L_F) \leq \mathrm{U}(nr, F, H_F)$ 对任意满足条件 $F_{\tau,-\rho\varepsilon} \subseteq L_F \subseteq F^{\tau,-\rho\varepsilon}$ 及 $aL_Fa^\tau \subseteq L_F(\forall a \in F)$ 的加法子群 L_F 成立.

为了证明本引理的需要, 我们定义 L_F 为 $F_{\tau,-\rho\varepsilon}$ 与所有的 aca^τ 生成的加群, 其中 a 取遍 F^*, c 是 $s\Lambda$ 的任一主对角元, s 取遍 L.

先证明这样定义的 L_F 符合上面所说的要求. 显然 L_F 是加群, 包含 $F_{\tau,-\rho\varepsilon}$, 且 $aL_Fa^\tau \subseteq L_F(a \in F^*)$. 而对任意的 $s \in L \subset \mathrm{Mat}_rF$, 有 $\bar{s} = -\rho s$, $(s\Lambda)^* = \Lambda^*s^* = \varepsilon\Lambda s^* = \varepsilon\bar{s}\Lambda = -\rho\varepsilon(s\Lambda)$, 故 $s\Lambda$ 的任一对角元 c 满足条件 $c^\tau = -\rho\varepsilon c$, 从而所有的 $aca^\tau(a \in F^*)$ 也满足同样的条件, 它们生成的加群 $L_F \subseteq F^{\tau,-\rho\varepsilon}$.

在 C_5、C_4、C_3 等不同情形下, 这个 L_F 还可分别描述如下:

C_5 情形: 此时 $R = F$, $\Lambda \in F^*$. 由于假定了 F 是域, $A^\sigma = (\Lambda I^{(\nu)})(A^*)^{-1}(\Lambda I^{(\nu)})^{-1} = (A^*)^{-1}$ 对所有的 $A \in Z_1$ 成立, 即不妨设 $\Lambda = 1$ 而不改变 σ. L_F 就是所有的 $asa^\tau(s \in L, a \in F^*)$ 生成的加群.

C_4 情形: F 是域, $D = FI^{(r)}$, $L \subseteq D^{J,-\rho} = \{sI \mid \bar{s} = -\rho s\}$. 由推论 5.7.2 知 $J = \tau$, $\Lambda = H_2$ 是迹式 ε-Hermite 方阵, 它的任一主对角元 h_{ii} 可写成 $h_{ii} = b + \varepsilon b^\tau$ 的形式, $b \in F$. 任一 $(sI)\Lambda = sH_2(sI \in L)$ 的主对角元 $sh_{ii} = sb + \varepsilon sb^\tau = (sb) - (\rho\varepsilon)(sb)^\tau \in F_{\tau,-\rho\varepsilon}$, 从而所有的 $a(sh_{ii})a^\tau \in F_{\tau,-\rho\varepsilon}$. 故在 C_4 情形

下 $L_F = F_{\tau,-\rho\varepsilon}$.

C_3 情形：F 是任意体，$\mathrm{Mat}_{1\times r}F$ 是体 D 上的 1 维右空间，即 $\theta \in D$ 到它的第一行 $\vec{\theta}$ 的映射是左 F-空间 D 到 $\mathrm{Mat}_{1\times r}F$ 的同构映射. 定义映射 $\varphi: D \to F$ 使每个 $\varphi(\theta)$ 等于矩阵 $\theta\Lambda$ 的第(1, 1)元. 我们证明 $\varphi(L) = L_F$.

对每个 $1 \leq j \leq r$，记 $\vec{\varepsilon_j}$ 为第 j 分量为 1、其余分量为 0 的 r 维行向量，而 $\varepsilon_j \in D$ 是相应的 D 的元素. 则对每个 $\theta \in D$，$\vec{\varepsilon_i}\,\theta\Lambda\,\vec{\varepsilon_j}\,'$ 就是 $\theta\Lambda$ 的第(i, j)-元，特别当 $i = j = 1$ 时，它就是 $\varphi(\theta)$. 按定义，L_F 是由所有的 $a\,\vec{\varepsilon_j}\,\theta\Lambda\,\vec{\varepsilon_j}\,'a^\tau (\theta \in L,\ a \in F,\ 1 \leq j \leq r)$ 与 $F_{\tau,-\rho\varepsilon}$ 共同生成的加群. 特别取 $i = j = 1$ 及 $a = 1$ 可知 $\varphi(L) \subseteq L_F$. 要证明 $\varphi(L) = L_F$，只须再证明 $\varphi(L)$ 包含 $F_{\tau,-\rho\varepsilon}$ 及每个 $a\vec{\varepsilon_j}\,\theta\Lambda\,\vec{\varepsilon_j}\,'a^\tau$.

$\varphi: D \to F$ 是左 F-空间 D 上的线性函数. 由 Λ 是可逆矩阵及 $\vec{\theta}\ (\theta \in D)$ 取遍 $\mathrm{Mat}_{1\times r}F$ 知 $\overrightarrow{\theta\Lambda} = \vec{\theta}\,\Lambda$ 也取遍 $\mathrm{Mat}_{1\times r}F$. 特别 $\theta\Lambda$ 的第(1, 1)元 $\varphi(\theta)$ 取遍 F. 对每个 $\theta \in D$ 有 $\overline{\theta}\Lambda = \Lambda\theta^* = \varepsilon\Lambda^*\theta^* = \varepsilon(\theta\Lambda)^*$，故 $\overline{\theta}\Lambda$ 的第(1, 1)元 $\varphi(\overline{\theta})$ 等于 $\varepsilon(\theta\Lambda)^*$ 的第(1, 1)元 $\varepsilon\varphi(\theta)^\tau$. 于是对任意的 $s = \theta - \rho\overline{\theta} \in D_{J,-\rho} (\theta \in D)$，有 $\varphi(s) = \varphi(\theta) - \rho\varepsilon\varphi(\theta)^\tau \in F_{\tau,-\rho\varepsilon}$，且由 $\varphi(\theta)$ 可取遍 F 知 $\varphi(L) \supseteq \varphi(D_{J,-\rho}) = F_{\tau,-\rho\varepsilon}$.

对每个 $1 \leq j \leq r$，$a \in F$ 和 $\theta \in L$，取 $\alpha_j \in D$ 使 $\vec{\alpha_j} = a\,\vec{\varepsilon_j}$，则 $\alpha_j\theta\,\overline{\alpha_j} \in L$，$\varphi(\alpha_j\theta\,\overline{\alpha_j}) \in \varphi(L)$. 但

$$\varphi(\alpha_j\theta\,\overline{\alpha_j}) = \vec{\varepsilon_1}\,\alpha_j\theta\,\overline{\alpha_j}\,\vec{\varepsilon_1}\,' = a\vec{\varepsilon_j}\,\theta\Lambda\,\vec{\varepsilon_j}\,a^\tau = ac_{jj}a^\tau.$$

这就证明了加群 L_F 的生成元全部含于 $\varphi(L)$，从而 $\varphi(L) = L_F$.

我们还可由 φ 反过来求出 Λ. 对任意 $1 \leq i,\ j \leq r$，Λ 的第(i, j)-元

$$\lambda_{ij} = \vec{\varepsilon_i}\,\Lambda\,\vec{\varepsilon_j}\,^* = \vec{\varepsilon_1}(\varepsilon_i\,\overline{\varepsilon_j})\Lambda\,\vec{\varepsilon_1}\,' = \varphi(\varepsilon_i\,\overline{\varepsilon_j}).$$

这就由 φ 算出了 Λ 的所有的元素，从而算出了 Λ.

(5.7.3.5) 由上面定义的 Δ_F、L_F 所决定的酉群 $\mathrm{U}(nr, F, \Delta_F, L_F)$ 包含 N 及所有的 $\mathrm{diag}(A, A^\sigma, I)(A \in Z_1)$，其中 $A^\sigma = \Lambda(A^*)^{-1}\Lambda^{-1}$.

记 $M_L(n, D) = \{A = (\alpha_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{Mat}_n D \mid {}^t\overline{A}^T$

$$= -\rho A,\ \alpha_{ii} \in L,\ \forall 1 \leq i \leq n\},$$

$$M_{L_F}(nr, F) = \{A = (a_{ij})_{nr\times nr} \in \mathrm{Mat}_{nr} F \mid A^* = -\rho\varepsilon A,\ a_{ii} \in L_F,\ \forall 1 \leq i \leq nr\}.$$

我们证明 $M_{L_F}(nr, F) = M_L(n, D)\Lambda$（注意，$\Lambda$ 在这里意味着 $I^{(n)} \otimes \Lambda$）. 即对每个 $A = (\alpha_{ij})_{n\times n} \in M_L(n, D)$ 证明 $A\Lambda \in M_{L_F}(nr, F)$. 首先 $(A\Lambda)^* = \varepsilon\Lambda A^* = \varepsilon\overline{A}^T\Lambda = (-\rho\varepsilon)(A\Lambda)$. 并且 $A\Lambda = (\alpha_{ij}\Lambda)_{n\times n}$ 的每个对角元必是某个 $\alpha_{ii}\Lambda$ 的对角元. 由 $\alpha_{ii} \in L$ 及 L_F 的定义知 $\alpha_{ii}\Lambda$ 的对角元都含于 L_F. 这就证明了 $A\Lambda \in M_{L_F}(nr, F)$.

对每个 $A \in N_1 = \mathrm{U}'(n, D, \Delta, L)$，有 $A\Delta\overline{A}^T - \Delta \in M_L(n, D)$，于是

$$A\Delta_F A^* - \Delta_F = A\Delta\Lambda A^* - \Delta\Lambda$$

$$= (A\Delta\overline{A}^T - \Delta)\Lambda \in M_{L_F}(nr, F).$$

这说明 $A \in \mathrm{U}(nr, F, \Delta_F, L_F)$. 在 C_4 情形下，对每个 $P \in N_2 \leq \mathrm{U}(r, F, H_2)$，由 $\Lambda = H_2$ 有 $P\Lambda P^* = \Lambda$，且 $I^{(n)} \otimes P$ 与 $\Delta \in \mathrm{Mat}_n(FI^{(r)})$ 交换，故

$$(I^{(n)} \otimes P)\Delta_F(I^{(n)} \otimes P)^* - \Delta_F = \Delta(I^{(n)} \otimes (P\Lambda P^* - \Lambda))$$

$$= 0.$$

这又说明 $I^{(n)} \otimes P \in \mathrm{U}(nr, F, \Delta_F, L_F)$. 这就证明了 $\mathrm{U}(nr, F, \Delta_F, L_F)$ 包含 N_1 与 $I^{(n)} \otimes N_2$，从而包含 N.

以下证明每个 $g = \mathrm{diag}(A, A^\sigma, I) \in Y_1(A \in Z_1)$ 含于 $\mathrm{U}(nr,$

$F, \Delta_F, L_F)$. 我们有

$$\Delta_F = \Delta\Lambda = \begin{bmatrix} O & I^{(\nu)} \otimes \Lambda & O \\ O & O & O \\ O & O & \Delta_0(I^{(n-2\nu)} \otimes \Lambda) \end{bmatrix},$$

从而
$$g\Delta_F g^* - \Delta_F = \begin{bmatrix} O & B & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix},$$

其中
$$B = A \cdot \Lambda \cdot (\Lambda(A^*)^{-1}\Lambda^{-1})^* - (I^{(\nu)} \otimes \Lambda)$$
$$= A \cdot \Lambda \cdot (\varepsilon^{-1}\Lambda^{-1})A^{-1}(\varepsilon\Lambda) - (I^{(\nu)} \otimes \Lambda) = 0.$$

于是 $g\Delta_F g^* - \Delta_F = 0 \in M_{L_F}(nr, F)$, $g \in \mathrm{U}(nr, F, \Delta_F, L_F)$.

(5.7.3.6) 群 $N_1 = \mathrm{U}'(n, D, \Delta, L)$ 和 $G = \mathrm{U}'(nr, F, \Delta_F, L_F)$ 的几何形式.

将矩阵群 $\mathrm{GL}(nr, F)$ 通过右乘作用，看作是作用于行向量空间 $V = \mathrm{Mat}_{1\times nr}F$ 上的线性变换群. 在 V 上定义 τ-半双线性型 $h_F(x, y) = x\Delta_F y^*$ 及相伴的 $(\rho\varepsilon)$-Hermite 型 $f_F(x, y) = xH_F y^*$，则矩阵群 $\mathrm{U}'(nr, F, \Delta_F, L_F)$ 成为相应的酉变换群 $G = \mathrm{U}'(V, h_F, L_F)$.

将 F 上行向量空间 V 的自然基记作

$$\mathscr{V} = \{e_{ij} \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le r\},$$

其中 e_{ij} 表示第 $((i-1)r+j)$ 分量是 1、其余分量是 0 的 nr 维行向量. 并记 $U_0 = \langle e_{ij} \mid 1 \le i \le \nu\rangle$, $V_0 = \langle e_{ij} \mid \nu+1 \le i \le 2\nu\rangle$. 则 U_0、V_0 是 V 的全奇异子空间，$W = U_0 \oplus V_0$ 是双曲空间，而 V 是非退化子空间 W 与 $W^\perp = \langle e_{ij} \mid 2\nu+1 \le i \le nr\rangle$ 的直和. 当 A 是 $Z_1 \le \mathrm{SL}(\nu r, F) = \mathrm{SL}(U_0/F)$ 中的平延的时候，$g(A) = \mathrm{diag}(A, A^\sigma, I) \in Y$ 是 G 中形如 $\eta_{u,v}$ 的某个酉二平延，其中 $u \in U_0$, $v \in V_0$. 当 A 取遍 $\mathrm{SL}(U_0)$ 的一个根子群的时候，$g(A)$ 取遍 G 中由酉二平延组成的一个根子群. 可以利用第 3 章中关于根子群的知识定出 G

的构造.

类似地,可将矩阵群 $GL(n, D)$通过右乘作用看作是行向量空间 $V_D = \mathrm{Mat}_{1\times n}D$ 上的线性变换群. 在 V_D 上定义 J-半双线性型 $h_D(x, y) = x\Delta \bar{y}^T$ 及相伴的 ρ-Hermite 型 $f_D(x, y) = xH\bar{y}^T$, 则矩阵群 $U'(n, D, \Delta, L)$成为相应的酉变换群 $G = U'(V_D, h_D, L)$.

将 F 上每个矩阵 A 的第一行记作$\vec{A}$,则映射 $\theta \mapsto \vec{\theta}$ 将左 F-空间 D 线性嵌入到 $\mathrm{Mat}_{1\times r}F$ 中. 如果 N_1 是 C_3 类子群,则这个映射是左 F-线性空间之间的同构. 而每个 $x \in V_D = \mathrm{Mat}_{1\times n}D$ 到它的第一行的对应关系 $x \mapsto \vec{x}$ 是 V_D 到 $V = \mathrm{Mat}_{1\times nr}F$ 的 F-线性同构. 于是我们可以考察 V_D 上的 h_D、f_D 和 V 上的 h_F、f_F 之间的关系.

按(5.7.3.4) 的定义,矩阵 Δ、H 与 Δ_F、H_F 之间有关系式 $\Delta_F = \Delta\Lambda$, $H_F = H\Lambda$, 其中 $\Lambda \in GL(r, F)$ 是关于 τ 的 ε-Hermite 方阵(即 $\Lambda^* = \varepsilon\Lambda$), 且对任意的 $\theta \in D$ 有 $\bar{\theta}\Lambda = \Lambda\theta^*$. 对任意的 x、$y \in V_D$, $h_F(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}(\Delta\Lambda)(\vec{y})^*$ 是 $x\Delta\Lambda y^* = x\Delta\bar{y}^T\Lambda = h_D(x, y)\Lambda \in D \subset \mathrm{Mat}_r F$ 的第(1, 1)-元素. 定义 D 上的 F 线性函数 $\varphi \in \mathrm{Hom}_F(D, F)$, 使 $\varphi(\theta)$等于矩阵 $\theta\Lambda$ 的第(1,1)-元素. 则 $h_F(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(h_D(x, y))$. 同理可得 $f_F(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(f_D(x, y))$. 且(5.7.3.4)中已经指出了 $\varphi(L) = L_F$.

在等式 $\bar{\theta}\Lambda = \Lambda\theta^* = \varepsilon(\theta\Lambda)^*$ 两端取第(1, 1)-元得 $\varphi(\bar{\theta}) = \varepsilon\varphi(\theta)^*$. 如果 D 是域,且 D 的子域 $FI^{(r)}$含于对称元域 K_J,则对每个 $a \in F$ 有 $(aI)^* = \Lambda^{-1}(aI)\Lambda = aI$, 从而 $a^\tau = a$, 即 $\tau = 1_F$. 进而得到 $\varphi(\bar{\theta}) = \varepsilon\varphi(\theta)$, $\varphi(\theta - \varepsilon\bar{\theta}) = 0$, 即 $D_{J,-\varepsilon} \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$.

(5.7.3.7) 当 $Z_1 = SL(\nu r, F)$ 时,

$$Y = \langle N, g(A) \mid A \in Z_1 \rangle = U'(nr, F, \Delta_F, L_F),$$

其中 $g(A) = \mathrm{diag}(A, A^\sigma, I)$.

按(5.7.3.6) 所述方式将 $U'(nr, F, \Delta_F, L_F)$ 看成作用于 $V = \mathrm{Mat}_{1\times nr}F$ 上的酉变换群 $G = U'(V, h_F, L_F)$. 为了证明 $Y =$

G，只须在 $L_F \neq 0$ 时证明 Y 包含 G 中所有的酉平延，而当 $L_F = 0$ 时，证明 Y 包含 G 中所有的正交二平延.

首先，当 A 取遍 $Z_1 = \mathrm{SL}(\nu r, F)$ 中的平延的时候，A 所对应的 $g(A) = \mathrm{diag}(A, A^\sigma, I) \in X$ 取遍 G 中形如 $\eta_{u,v}(0 \neq u \in U_0, 0 \neq v \in V_0 \cap u^\perp)$ 的所有的酉二平延.

对每个 $S \in \mathrm{Mat}_{\nu r}F$，记

$$T(S) = \begin{bmatrix} I^{(\nu r)} & O & O \\ S & I^{(\nu r)} & O \\ O & O & I^{(nr-2\nu r)} \end{bmatrix},$$

$$T'(S) = \begin{bmatrix} I^{(\nu r)} & S & O \\ O & I^{(\nu r)} & O \\ O & O & I^{(nr-2\nu r)} \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(nr, F),$$

考察集合

$$M = \{S \in \mathrm{Mat}_{\nu r}F \mid T(\Lambda S) \in X\}$$

及

$$M' = \{S \in \mathrm{Mat}_{\nu r}F \mid \tilde{T}(S\Lambda^{-1}) \in X\}.$$

易见 M 和 M' 都是加群. 且由 $Y \leq U'(nr, F, \Delta_F, L_F)$ 知 M、M' 含于 $M_1 = M_{L_F}^{-\varepsilon}(\nu r, F)$. 我们证明 $M = M' = M_1$.

对每个 $A \in Z_1 = \mathrm{SL}(\nu r, F)$ 和 $S \in M$，用

$$g(A) = \mathrm{diag}(A, \Lambda(A^*)^{-1}\Lambda^{-1}, I) \in Y$$

对 $T(\Lambda S) \in Y$ 作共轭，得

$$g(A)^{-1}T(\Lambda S)g(A) = T(\Lambda \cdot (A^*SA)) \in Y,$$

可见 $A^*SA \in M$. 类似地，对于 $A \in Z_1$ 和 $S \in M'$，有

$$g(A)T'(S\Lambda^{-1})g(A)^{-1} = T'((ASA^*)\Lambda^{-1}) \in Y,$$

$$ASA^* \in M'.$$

这说明 M、M' 都在 $\mathrm{SL}(\nu r, F)$的相合作用下不变. 又由 $N_1 < X$ 可

知 M 和 M' 都包含 $M_L^{\rho}(n, D)\Lambda$，不等于零. 由引理 5.3.8 中关于相合下不变的非零加法子群的结论知 $M = M_{L_1}^{-\rho\epsilon}(\nu r, F)$ 和 $M' = M_{L_2}^{-\rho\epsilon}(\nu r, F)$ 对某一对 L_1、L_2 成立. 但 L_1、L_2 都包含 $L\Lambda \subseteq \mathrm{Mat}_r F$ 中所有矩阵的所有对角元，这些对角元生成的加群就是 L_F，可见 $L_1 = L_2 = L_F$. 这就证明了 $M = M' = M_{L_F}^{-\rho\epsilon}(\nu r, F)$.

Y 中所含的 $g(A)(A \in \mathrm{SL}(\nu r, F))$、$T(\Lambda S)$ 和 $T'(S\Lambda^{-1})$ $(S \in M_1)$ 的全体生成 $\mathrm{U}'(nr, F, \Delta_F, L_F)$ 的子群

$$Y_W = \{\mathrm{diag}(P, I^{(nr-2\nu r)}) \mid P \in \mathrm{U}'(2\nu r, F, \widetilde{\Delta}_F, L_F)\},$$

其中 $\widetilde{\Delta}_F$ 是 Δ_F 左上方的 $2\nu r$ 阶子方阵. 从几何上看，Y_W 就是双曲空间 $W = \langle e_{ij} \mid 1 \leq i \leq 2\nu\rangle$ 上的 $\mathrm{U}'(W, (h_F)|_W, L_F)$.

当 $L_F \neq 0$ 时，Y_W 包含 G 中所有形如 $T_w(w \in W)$ 的长根子群. Y 包含 N，在 V 上的作用不可约且为本原，由第 3 章定理 3.5.1知，Y 中的长根子群生成 G 的不可约子群 X. 而 $\dim W \geq 4$ 且 $X \geq T_W$，由命题 3.3.2 的结论(iv)立即得 $Y = X = G$.

当 $L_F = 0$ 时，$G = \Omega(V, Q_F)$，其中二次型 $Q_F(x) = x\Delta_F x'$. Y 包含 G 的子群 $Y_W = \Omega(W)$，从而包含 $\Omega(W)$中的短根子群. 仍由定理 3.5.1 知，Y 中所含的 G 的短根子群的全体生成的子群 X 在 V 上不可约. 我们有 $X \geq \Omega(W)$，W 是至少 4 维的偶数维非退化子空间，且 $\dim W = 4$ 时，N_1 是 C_5 类子群，$|F| \geq 4$. 由命题 3.4.5得 $Y = X = G$.

(5.7.3.8) $\nu = 2$ 且 $Z_1 = \mathrm{Sp}(2r, F, H_0)$ 的情形.

此时 $Z_0 = \mathrm{Sp}(2r, F, H_0) = Z_1$. 如果 $r = 1$，则 $Z_1 = \mathrm{Sp}(2, F) = \mathrm{SL}(2, F)$，属于在(5.7.3.7)中已解决了的情形. 故设 $r \geq 2$，当 N 是 C_4 类子群时，引理的结论(iii)所述的 Y 的性质已经在前面证明了. 因此，只须处理 C_3 情形，即 D 是 FI 的 r 次扩域的情形.

若能在 D^* 中选取 $\theta \notin Z(F)^*I$，使 $g = \mathrm{diag}(A, (\overline{A}^T)^{-1}, C) \in N$ 对 $A = \mathrm{diag}(\theta, I) \in \mathrm{SL}(2, D)$ 和某个 $C \in \mathrm{GL}(n-4,$

D) 成立,则 $A = \mathrm{diag}(\theta, I) = \varphi_1(g)$ 不正规化 $\mathrm{Sp}(2, F, H_0)$. 但是 $A \in \varphi_1(Y_2)$ 应当正规化 $Z_1 = \varphi_1(Y_1)$,可见此时 Z_1 不能等于 $\mathrm{Sp}(2r, F, H_0)$,而应等于 $\mathrm{SL}(2r, F)$. 因此,当 $Z_1 = \mathrm{Sp}(2r, F)$ 时,上述 θ 不存在. 这仅在下面两种情况下才有可能:

情况 1 D 是 FI 的二次扩域, $J \neq 1$, $FI = K_J = L$, $N_1 = \mathrm{SU}(4, D, H)$.

情况 2 D 是特征 2 的非完全域, $J = 1$, $D^2 \subseteq FI$, $N_1 = \Omega(4, D, \Delta, L)$, $L \subseteq FI$.

N_1 是 C_3 类子群. 按(5.7.3.6)将 N_1 和 $G = \mathrm{U}'(nr, F, \Delta_F, L_F)$ 分别看成作用于 $V_D = \mathrm{Mat}_{1\times n}D$ 和 $V = \mathrm{Mat}_{1\times nr}F$ 上的酉变换群 $\mathrm{U}'(V_D, h_D, L)$和 $\mathrm{U}'(V, h_F, L_F)$. 在剩下的这两种情形下 D 都是域,且 $FI \subseteq K_J$,由(5.7.3.6)的讨论知 $\tau = 1$, f_F 是对称双线性型. 并且 $h_F = \varphi h_D$, $f_F = \varphi f_D$, $0 \neq \varphi \in \mathrm{Hom}_F(D, F)$, $\varphi(D_{J,-\varepsilon}) = 0$. 按(5.7.3.6)用

$$\mathscr{V} = \{e_{ij} \mid 1 \leq i \leq 4,\ 1 \leq j \leq r\}$$

表示 $V = \mathrm{Mat}_{1\times 4r}F$ 的自然基. 简记 $e_i = e_{i1}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. 在 F-线性同构 $V_D \to V$, $x \mapsto \vec{x}$ 下将 V_D 与 V 等同起来,则 $\mathscr{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 是 V 在 D 上的一组基,且 $f_D(e_1, e_3) = f_D(e_2, e_4) = 1$,而 $f_D(e_i, e_j) = 0$ 对所有 $j \neq i \pm 2$ 成立. $U_0 = De_1 \oplus De_2$ 和 $V_0 = De_3 \oplus De_4$ 是 h_D 下的全奇异子空间,而 $V = U_0 \oplus V_0$. $Z_1 = \mathrm{Sp}(2r, F)$ 是作用于 U_0 上的某个辛群. Z_1 包含的 $\mathrm{Sp}(U_0)$的辛平延 $T(s) = T_{e_1, s}$ $(s \in F)$ 对应的 $\mathrm{diag}(T(s), T(s)^\sigma) \in Y$ 是 G 中的辛二平延或正交二平延 $\eta_{se_1, \alpha e_4}$,其中 α 是 D^* 中的某个元素. 当 s 取遍 F 时,所有这些二平延(及单位元)组成 G 的一个根子群.

先考虑情况 1. 此时 $\rho = -1$, $r = 2$.

如果 $\mathrm{char}F \neq 2$ 且 $\varepsilon = +1$,则 $\rho\varepsilon = -1$, f_F 是交错内积, $G = \mathrm{Sp}(V, f_F)$ 是辛群. $Z_1 = \mathrm{Sp}(U_0)$ 的辛平延 $T_{e_1, s}$对应于辛群 G 的辛二平延 $\eta_{se_1, \alpha e_4}$. 存在 $g_0 \in N_1$ 在定驻 e_1 的同时将 $\alpha e_4 \mapsto \alpha e_4 + e_1$,换位子

$$[\eta_{se_1, \alpha e_4}, g_0] = \eta_{se_1, -\alpha e_4}\eta_{se_1, \alpha e_4+e_1} = \eta_{se_1, e_1} = \rho_{e_1, 2s} \in Y.$$

这说明 Y 包含辛群 G 的一个长根子群 T_{e_1}. 用 N_1 作共轭,可知 Y 包含所有这样的长根子群 T_u,其中 $0 \neq u \in U_0 \cup V_0$. 由于 $\mathrm{char}F \neq 2$, $F \neq F_2$, 由命题 3.3.2(i)知 $Y = G$. 但这导致 $Z_1 = \mathrm{SL}(4, F) \neq \mathrm{Sp}(4, F)$, 产生矛盾.

剩下的情形是 $\varepsilon = -1$. 此时 $\rho\varepsilon = +1$, f_F 是对称双线性内积, $L_F = \varphi(L) = \varphi(D_J) = 0$, $G = \Omega(V, Q_F)$ 是正交群,其中 $Q_F(x) = \varphi h_D(x, x)$. Y 所含的 $\eta_{se_1, \alpha e_4}(s \in F)$ 组成正交群 G 的长根子群 $T_{e_1, \alpha e_4}$. 按照 §3.4 中所述,对 V 中的任一奇异向量 u 记 $V_Y(u) = \{w \in u^\perp \mid T_{u,w} < Y\}$. 则 $V_Y(e_1)$包含 αe_4. N_1 可在固定 e_1 的同时将 e_4 映到 e_2,也可映到任一 $\alpha e_4 + \theta e_1 (\theta \in D\backslash F)$. 这说明 $V_Y(e_1)$包含 4 维全奇异 F-空间

$$\langle e_1, \alpha e_4, \alpha e_2, \alpha e_4 + \theta e_1\rangle = De_1 \oplus F\alpha e_2 \oplus F\alpha e_4.$$

由定理 3.5.1 知,Y 中所含的 G 的根子群生成的子群 X 不可约. 而 Y 不能等于 G,否则, $Z_1 = \mathrm{SL}(4, F) \neq \mathrm{Sp}(4, F)$, 由命题 3.4.2即知,唯一的可能是 $Y = X$ 为定理 3.4.1 中的 IR5 类子群 Ω_7,本引理结论(ii)成立.

现在处理情况 2. 此时由 $L \subset D = D_J$ 知 $L_F = \varphi(L) = 0$, $G = \Omega(4r, F, Q_F)$ 是正交群. 仍然知道 Y 包含 G 的长根子群 $T_{e_1, \alpha e_4}$, $V_Y(e_1)$包含 αe_4. 对任意 $\theta \in D$, N_1 可在固定 e_1 的同时将 $\alpha e_4 \mapsto \alpha e_4 + \theta e_1$, 这说明 $V_Y(e_1)$包含 $(\alpha e_4 + \theta e_1) - \alpha e_4 = \theta e_1$, 也就是包含 r 维 F 空间 De_1. N_1 可将 e_1 送到 V_D 中满足条件 $Q_D(u) = h_D(u, u) = 0$ 的任意 $u \neq 0$, 从而将 $De_1 \subset V_Y(e_1)$ 送到 $Du \subset V_Y(u)$. 特别, $De_4 \subset V_Y(\beta e_4)$ 对所有 $\beta \in D^*$ 成立. 对任意的 $\theta \in D^*$, $f_F(\theta e_2, \alpha e_4) = \varphi(\theta\alpha)$, 可选 θ_1 使 $\varphi(\theta_1\alpha) = 1$, 从而 $\varphi_F(\theta_1 e_2, \alpha e_4) = 1$. 而对任意的 $\theta e_2 \in De_2 \cap (\alpha e_4)^\perp$ (即 $f_F(\theta e_2, \alpha e_4) = \varphi(\theta\alpha) = 0$), $\eta_{\theta e_2, \theta_1 e_2} \in Y$ 定驻 e_1, 且将 $\alpha e_4 \in V_Y(e_1)$ 送到 $\alpha e_4 + \theta e_2 \in V_Y(e_1)$. 这说明 $(\alpha e_4 + \theta e_2) - \alpha e_4 \in V_Y(e_1)$. 也就是说,

$V_Y(e_1)$包含 $De_1 \oplus (De_2 \cap (ae_4)^{\perp}) \oplus F(ae_4)$，维数至少为 $r + (r-1) + 1 = 2r$. 仍由命题 3.5.1 知，Y 中所含长根子群生成不可约正规子群 X. 如果 Y 含 G 的短根子群，则由命题 3.4.5 得 $Y = G$，这导致 $Z_1 = \mathrm{SL}(2r, F) \neq \mathrm{Sp}(2r, F)$，造成矛盾. 因此 Y 不含 G 的短根子群. 由命题 3.4.2 又可知，必须 $\dim V_Y(e_1) \leq 4$，从而 $2r \leq 4$，$r = 2$，Y 只能是定理 3.4.1 所说的 IR5 类子群 Ω_7. 此时 Y 所含的 G 的长根子群 $T_{e_1, \theta e_1}$(其中 $\theta \notin FI$) 实际上就是 $\Omega(4, D, h_D, F)$ 中由辛平延组成的长根子群

$$T_{e_1} = \{\rho_{e_1, s} | s \in F\}.$$

$$Y \cap \mathrm{GL}(4, D) \geq \langle N_1, T_{e_1} \rangle = \Omega(4, D, h_D, F).$$

按引理假设 $Y \cap \mathrm{GL}(4, D)$ 应正规化 N_1，可见 $N_1 = \Omega(4, D, h_D, F)$. 引理结论(ii)成立. ▌

第 6 章

扩体上空间结构的稳定子群

设 K 是体 F 的扩体，且将 K 看作左 F-空间时 $\dim_F K = r < \infty$. 则 K 上的空间 $V = V(n, K)$ 可看作 F 上的空间 $V(nr, F)$. 本章的目的是要定出作用于 $V(n, K)$ 上的 $N = \mathrm{SL}(n, K)$ 或 $\mathrm{U}'(n, K, h, L)$ 在作用于 $V(nr, F)$ 上的 $\mathrm{GL}(nr, F)$ 中的全部扩群.

§6.1 主 要 结 果

对 K 的任意子体 E，我们用 K/E 表示 K 上的左 E-空间结构；用 V/E 表示 $V = V(n, K)$ 上的 E-空间结构. 则当 $\dim_E K = d$ 时 $V/E = V(nd, E)$.

设 $N = \mathrm{SL}(n, K)$ 或 $\mathrm{U}'(n, K, h, L)$，则 N 定驻 V 上的 K-空间结构 V/K，即：对任意的 $g \in N$、$v \in V$ 有 $(Kv)g = K(vg)$，1 维 K-子空间 $Kv(0 \neq v \in V)$ 是 N 作用下的块. K-空间结构 V/K 在 $\mathrm{GL}(V/F) = \mathrm{GL}(nr, F)$ 中的稳定子群 Γ_K 也就是 $\mathrm{SL}(n, K)$ 在 $\mathrm{GL}(nr, F)$ 中的正规化子，

$$\Gamma_K = \Gamma\mathrm{L}(n, K) \cap \mathrm{GL}(nr, F) = \mathrm{GL}(n, K) \rtimes \mathrm{Gal}(K/F),$$

式中 $\qquad \mathrm{Gal}K/F = \{\sigma \in \mathrm{Aut}K \mid a^\sigma = a, \forall a \in F\}$.

显然，N 与 Γ_K 之间的任一子群 X 都是我们所要求的扩群. 并且由定理 4.1.1 知，对这样的 X，或者 $X \trianglerighteq \mathrm{SL}(n, K)$，或者当 $N = \mathrm{U}'(n, K, h, L)$ 时，有 $X \trianglerighteq \mathrm{U}'(n, K, h, L_1)$，对某个 $L_1 \supseteq$

L.这样的 X 可以认为是已知的.更进一步,对 K 与 F 之间的任一体 E, $V/K = V(n, K)$ 也可看成 E 上的空间 $V/E = V(nd, E)$,这里 $d = \dim_E K$. E-空间结构 V/E 在 $GL(nr, F)$中的稳定子群是

$$\Gamma_E = GL(nd, E) \rtimes \mathrm{Gal} E/F,$$

$SL(nd, E)$与 Γ_E 之间的任一子群 X 也是所求的扩群,并且也可以认为是已知的.如果 $N = U'(n, K, h, L)$ 是关于 K 的对合 $J: \theta \mapsto \overline{\theta}$的酉群,且存在 K 上非零的 E-线性函数 $\varphi_E \in \mathrm{Hom}_E(K, E)$及 E 的对合 τ,以及一个 $\lambda = \pm 1 \in E^*$,使 $\varphi_E(\theta\overline{a}) = \varphi_E(\theta)a^\tau$ 及 $\varphi_E(\overline{\theta}) = \lambda(\varphi_E(\theta))^\tau$ 对所有的 $\theta \in K$, $a \in E$ 成立,则 $h_E = \varphi_E h$ 是 V/E 上 τ-半双线性型, $N \leq U'(nd, E, h_E, L_E)$ 当 $\varphi_E(L) \subseteq L_E$ 时成立,而满足

$$U'(nd, E, h_E, L_E) \trianglelefteq X \leq GU(nd, E, h_E, L_E) \rtimes \mathrm{Gal} E/F$$

的 X 是所求的扩群并且是已知的.

现在的问题是:除了上述定驻某个中间体 E 上的空间结构 V/E 并且满足条件 $X \trianglerighteq SL(nd, E)$或 $X \trianglerighteq U'(nd, E, h_E, L_E)$的已知扩群,是否还有别的扩群?我们完全解决了 $N = SL(n, K)$($n \geq 2$)及 $N = U'(n, K, h, L)$(Witt 指数 $\nu_L(h) \geq 2$)的情况,除一个特殊情形 $N = SL(2, 4)$ 外,得到的答案都是肯定的.由于定出了 N 在 $GL(nr, F)$中的所有的扩群,当 F 是 K 的极大子体时,就可立即推出 K-空间结构 V/K 在 V/F 上典型群中的稳定子群的极大性,当 K 是有限域时也就是 Aschbacher 所说的 C_3 类子群的极大性.遗留问题是:定出 $N = GL(1, K) = K^*$ 在 $GL(r, F)$中的扩群,以及 Witt 指数 $\nu \leq 1$ 的 $N = U'(n, K, h, L)$ 在$GL(nr, F)$中的扩群.

应当提到的还有其他一些作者在这一问题上的结果:如 W. Kantor[16]定出了 $F_{q^r}^*$(即 $GL(1, q^r)$)在 $GL(r, q)$中的扩群;R. H. Dye[7]~[9]对 $r = 2, 3$ 的情形定出了 $Sp(2m, q^r)$在 $Sp(2mr, q)$中的扩群.

我们的主要结果是如下定理：

定理 6.1.1　设 $n \geq 2, N = \mathrm{SL}(n, K) \leq X \leq G = \mathrm{GL}(nr, F)$，则下列结论之一成立：

(i) $\mathrm{SL}(nd, E) \trianglelefteq X \leq \mathrm{GL}(nd, E) \rtimes \mathrm{Gal}E/F$，$E$ 是 F 和 K 之间的体，$d = \dim_E K$.

(ii) $n = 2$，K 是域，$X \trianglerighteq \mathrm{Sp}(2d, E, f_E)$，其中 E 是 F 和 K 之间的域，$d = \dim_E K$，$f_E = \varphi_E f$ 是由 K 上某个非退化交错型和某个 $0 \neq \varphi_E \in \mathrm{Hom}_E(K, E)$ 得到的 E 上的交错型.

(iii) $N = \mathrm{SL}(2, 4) \cong A_5, G = \mathrm{SL}(4, 2) \cong A_8$，而 $X = (\mathrm{Sp}(4, 2))' \cong A_6$ 或 $X \cong A_7$.

定理 6.1.2　设 $N = \mathrm{U}'(n, K, h, L)$，$h$ 是关于 K 的对合 $J: \theta \mapsto \bar{\theta}$ 的 J-半双线性型，N 的 Witt 指数 $\nu_L(h) \geq 2$. 设 $N \leq X \leq \mathrm{GL}(nr, F)$. 则存在中间体 $E(F \subseteq E \subseteq K)$，使下列情况之一成立(其中 $d = \dim_E K$)：

(i) $X \trianglerighteq \mathrm{SL}(nd, E)$.

(ii) $X \trianglerighteq \mathrm{U}'(nd, E, h_E, L_E) > N$ 对某个 $h_E = \varphi_E h$ 和某个 $L_E \supseteq \varphi_E(L)$，其中 $0 \neq \varphi_E \in \mathrm{Hom}_E(K, E)$ 满足条件：存在 E 的对合 τ 及元素 $\lambda = \pm 1 \in E^*$，使 $\varphi_E(\theta \bar{a}) = \varphi_E(\theta) a^\tau$ 及 $\varphi_E(\bar{\theta}) = \lambda(\varphi_E(\theta))^\tau$ 对所有的 $\theta \in K, a \in E$ 成立，而 h_E 就是 τ-半双线性型.

(iii) K 是域，$J \neq 1, N = \mathrm{SU}(4, K, f) < \Omega(8, F, Q_E), E = K_J = \{a \in K \mid \bar{a} = a\}$. 或 K 是特征 2 的非完全域，$D^2 \subseteq E, L \subseteq E, N = \Omega(4, D, Q_D, L) < \Omega(8, E, Q)$. $X \trianglerighteq \Omega_7, \Omega_7$ 是 $\mathrm{SL}(8, E)$的可约子群 $\Omega(7, E, Q_E)(\nu(Q_E) = 3)$ 在某个 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathrm{SL}(8, E))$ 下的不可约象，σ 可由旋量表示而得到(见文献[4]，或参考§2.3).

当 F 是 K 的极大子体时，从上述两个定理可立即得出关于 C_3 类子群的极大性的如下结论：

推论 6.1.3　设 F 是体 K 的极大子体，$\dim_F K = r < \infty$.

(1) 设 $\mathrm{GL}(nr, F) \geq G \geq \mathrm{SL}(nr, F)$，$M$ 是 $\mathrm{SL}(n, K)$在 G 中的正规化子，则当 $G = M \cdot \mathrm{SL}(nr, F)$ 时，M 是 G 的极大子群，但

以下情形除外：$n=2$，K 是域（即 $\mathrm{SL}(n,K)=\mathrm{Sp}(2,K,f)$），且 $\mathrm{Norm}_{K/F}^{-1}(\det G)\subseteq F^*$（这里 $\mathrm{Norm}_{K/F}:K\to F$ 是范数映射）. 在例外情形下，我们有

$$M\lneq(\mathrm{GSp}(2r,F)\rtimes\mathrm{Gal}K/F)\cap G\lneq G.$$

(2) K 是域（于是 F 是 K 的极大子域），$\mathrm{GSp}(2\nu r,F)\geq G\geq\mathrm{Sp}(2\nu r,F)$，$M$ 是 $\mathrm{Sp}(2\nu,K)$ 在 G 中的正规化子，且 $G=M\mathrm{Sp}(2\nu r,F)$，则 M 是 G 的极大子群，但 $G=\mathrm{Sp}(4,2)$ 且 $M=\mathrm{Sp}(2,4)$ 的情形例外，在例外情形下有 $M<G'<G$（但 M 在 G' 中极大）.

(3) 设 $N=U'(n,K,h,L)$ 是关于 K 的对合 J 的酉群，Witt 指数 $\nu_L(h)\geq 2$，$N_F=\mathrm{U}'(nr,F,\varphi_F h,\varphi_E L)>N$，$0\neq\varphi_F\in\mathrm{Hom}_F(K,F)$ 满足定理 6.1.2(ii) 所述的条件，则 N 的正规化子是 N_F 的极大子群，但以下情形例外：

(i) K 是域，$F=K_J$，$N=\mathrm{SU}(4,K,f)$，

$$N_F=\Omega(8,F,Q_F)(Q_F(x)=h(x,x)).$$

(ii) K 是特征 2 的非完全域，$D^2\subseteq F$，$L\subseteq F$，

$$N=\Omega(4,D,Q_D,L)<\Omega(8,F,Q).$$

特别当 $\mathrm{char}K\neq 2$ 时，$\mathrm{U}'(n,K,f)(\nu(f)\geq 2)$ 的正规化子是 $\mathrm{U}'(nr,F,\varphi_F f)$ 的极大子群.

(4) 设 K 是域，F 是 K 的极大子域，$N=\Omega(n,K,Q)$ $(\nu(Q)\geq 2)$，$N_F=\Omega(nr,F,\varphi_F Q)$，$0\neq\varphi_F\in\mathrm{Hom}_F(K,F)$，则 N 的正规化子是 N_F 的极大子群.

定理 6.1.1 和 6.1.2 将在本章以下几节中得到证明. 我们的目的是定出 N 与 $\mathrm{GL}(nr,F)$ 之间所有的群 X. 对每个这样的 X，考虑所有形如 $N_E=\mathrm{SL}(nd,E)$ 或 $\mathrm{U}'(nd,E,h_E,L_E)$ 并且满足条件 $N\leq N_E\leq X$ 的子群 N_E，这里 E 是 K 与 F 之间的体，$d=\dim_E K$. 这样的 N_E 的集合 $\mathcal{N}$ 不是空集，因为 $N\in\mathcal{N}$. 故存在 $\mathcal{N}$ 的极大元 N_D，即：$N_D\in\mathcal{N}$，且不存在 $N_E\in\mathcal{N}$ 使 $N_E\gneq N_D$.

我们可用这个极大元 N_D 代替 N，而不影响对 X 的研究. 经过这样代替之后，在以下证明中，总是假设 N 是 $\mathscr{N}$ 中的极大元. 即：不存在 $N_E \in \mathscr{N}$ 使 $N_E \lneqq N$. 换句话说，我们假定：

(1) 不存在满足条件 $K \supsetneqq E \supseteq F$ 的体 E，使 X 包含 $\mathrm{SL}(nd, E)$ 或包含某个 $\mathrm{U}'(nd, E, h_E, L_E) \geq N$；

(2) $X \cap \Gamma_K \trianglerighteq N$ (若不然，有 $N_K = \mathrm{U}'(n, K, h, L_1) \gneqq N = \mathrm{U}'(n, K, h, L)$，使 $N_K \trianglelefteq X \cap \Gamma_K$，与 N 在 $\mathscr{N}$ 中的极大性相违).

如果 $N \leq \Gamma_K$，则 $X = X \cap \Gamma_K \trianglerighteq N$，定理已成立. 因此，我们假定：

(3) $X \not\leq \Gamma_K$.

本章以下的证明都将在上述假定之下进行. 我们证明，在假定(3)之下，能够找到一个 $N_E \leq X$ 且 $N_E \gneqq N, K \supsetneqq E \supseteq F$. 这将与假定(1)矛盾. 这就证明了：在假定(1)、(2)之下假定(3)不可能成立，从而只能是 $X \trianglerighteq N$ 成立. 这样就能完成定理的证明.

为了在 X 中找出所需的 $N_E \gneqq N$，我们按第5章所说将 $\mathrm{GL}(n, K)$ 和 $\mathrm{GL}(nr, F)$ 写成矩阵群. 即：一方面将 K 看成向量空间 $K/F = V(r, F)$，取这个空间的一组基 $\mathscr{K} = \{k_i | 1 \leq i \leq r\}$，在这组基下将每个 $\beta \in K$ 写成行向量 $\vec{\beta} = (a_1, \cdots, a_r) \in \mathrm{Mat}_{1\times r}F$，从而将 K/F 写成 $\mathrm{Mat}_{1\times r}F$；并在这组基下将 K/F 上的每个线性变换 $\eta \in \mathrm{End}_F\vec{K}$ 写成矩阵 $\eta^{(r)} \in R = \mathrm{Mat}_r F$，$\eta^{(r)}$ 的第 i 行等于 $\overrightarrow{k_i\eta}$. 特别，$\mathrm{Gal}K/F < R^* = \mathrm{GL}(r, F)$. 另一方面，将每个 $\alpha \in K$ 与它在 K/F 上的右乘变换 $\alpha_R: \beta \mapsto \beta\alpha$ 对应起来，并进而与 α_R 在基 $\mathscr{K}$ 下的矩阵 $\alpha^{(r)}$ 对应起来($\alpha^{(r)}$ 的第 i 行等于 $\overrightarrow{k_i\alpha}$). 映射 $\alpha \mapsto \alpha^{(r)}$ 是 K 到 $\mathrm{Mat}_r F$ 中的嵌入，我们称它为在基 $\mathscr{K}$ 下 K 到 $\mathrm{Mat}_r F$ 中的嵌入. 在这个意义下，可以认为 K 是全方阵环 $R = \mathrm{Mat}_r F$ 的子体. K^* 在 R^* 中的正规化子 $N_R(K) = K^* \rtimes \mathrm{Gal}K/F$. 取 $V = V(n, K)$ 在 K 上的基 $\mathscr{E} = (e_1, \cdots, e_n)$. 记

$$\mathscr{K}\mathscr{E}=\{e_{ij}=k_je_i\,|\,1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq r\},$$

则 $\mathscr{K}\mathscr{E}$ 是 $V/F=V(nr,F)$ 的基. 我们在这组基下将 V 写成 $\mathrm{Mat}_{1\times nr}F$，将 End_FV 写成 $\mathrm{Mat}_{nr}F$. 设 $v\in V$ 在 K-基 $\mathscr{E}$ 下的坐标为 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in\mathrm{Mat}_{1\times n}K$，则它在 F-基 $\mathscr{K}\mathscr{E}$ 下的坐标为$(\vec{\beta_1},\cdots,\vec{\beta_n})\in\mathrm{Mat}_{1\times nr}F$. 设 $g\in\mathrm{GL}(n,K)$在 K-基 $\mathscr{E}$ 下的矩阵为 $(\alpha_{ij})_{n\times n}$，则将每个 $\alpha_{ij}\in K$ 写成矩阵 $\alpha_{ij}^{(r)}\in K\subset R=\mathrm{Mat}_rF$ 后就得到 g 在基 $\mathscr{K}\mathscr{E}$ 下的矩阵 $(\alpha_{ij}^{(r)})_{n\times n}\in\mathrm{GL}(n,R)=\mathrm{GL}(nr,F)$. 而每个 $\sigma\in\mathrm{Gal}K/F$ 在 V 上的作用$(\vec{\beta_1},\cdots,\vec{\beta_n})\mapsto(\vec{\beta_1^\sigma},\cdots,\vec{\beta_n^\sigma})$的矩阵为 R 上的"纯量阵"$\sigma^{(nr)}=\mathrm{diag}(\sigma^{(r)},\cdots,\sigma^{(r)})$，这里 $\sigma^{(r)}\in\mathrm{GL}(r,F)$是 $\sigma\in\mathrm{End}_F\vec{K}$在基 $\mathscr{K}$ 下的矩阵.

这样，就为应用第5章的引理准备好了条件，K 在 $R=\mathrm{Mat}_rF$ 中的嵌入象就是第5章所说的 D. 只要再在 X 中找到一个含有足够多的零元素的矩阵 g_1，就可以利用第5章的引理得到一个所需的 N_E，从而完成定理的证明. 因此，所要做的主要工作就是寻找这个 g_1，以及处理一些特别困难的情形.

对 K、F 之间的任一体 E(即：$F\subseteq E\subseteq K$)，可取 E/F 的基 $\mathscr{Z}=\{\zeta_l\,|\,1\leq l\leq k\}$，将 E 嵌入 Mat_kF，使$\mapsto\alpha^{(k)}\in\mathrm{Mat}_kF$，$\alpha^{(k)}$是 E/F 上线性变换 $\beta\mapsto\beta\alpha$ 在基 $\mathscr{Z}$ 下的矩阵. 取 K/E 的基 $\mathscr{W}$ 将 K 嵌入 Mat_dE，设 $\theta\in K$ 的嵌入象是 $(\alpha_{ij})_{d\times d}$. 则将每个 $\alpha_{ij}\in E$ 换成它在 Mat_kF 中的嵌入象 $\alpha_{ij}^{(k)}$，就得到 θ 在 K/F 的基 $\mathscr{Z}\mathscr{W}$ 下被嵌入 Mat_rF 中的象.

§6.2 SL(n, K)的扩群($n\geq3$的情形)

本节定出 $N=\mathrm{SL}(n,K)(n\geq3)$ 在 $\mathrm{GL}(nr,F)$中的扩群，即对 $n\geq3$ 的情形证明定理 6.1.1.

引理 6.2.1 设 S 是 $R=\mathrm{Mat}_rF$ 的子环且真包含 K，$n\geq2$，则 $\mathrm{SL}(n,S)=\mathrm{SL}(nd,E)$，$E$ 是 K 的某个真子体，且包含 F.

$d = \dim_E K \geq 2$.

证明　K 在 $\vec{K} = \mathrm{Mat}_{1\times r}F$ 上不可约，从而 S 不可约. 由引理 5.3.3 知，$E = \mathrm{End}_S(\vec{K})$ 是体，且 $S = \mathrm{End}_E(\vec{K})$. 显然有 $E \supseteq F$，且由 $S \supsetneqq K$ 知 $E \subsetneqq \mathrm{End}_K(\vec{K}) = K$，$d = \dim_E K \geq 2$. 分别取 K/E、E/F 的基 $\mathscr{W}$、$\mathscr{Z}$ 构造 K/F 的基 $\mathscr{Z}\mathscr{W}$ 来代替原来的基 $\mathscr{K}$，并将 E 在基 $\mathscr{Z}$ 下嵌入 $\mathrm{Mat}_k F$，则 S 被重写为 $S = \mathrm{Mat}_d E$，而 $\mathrm{SL}(n, S) = \mathrm{SL}(nd, E)$. ▌

定理 6.1.1 的证明（$n \geq 3$ 的情形）：

由 $X \not\leq \Gamma = \mathrm{GL}(n, K) \rtimes \mathrm{Gal}K/F$，存在 $g \in X\backslash\Gamma$. $N = \mathrm{SL}(n, K)$ 在 $V = V(n, K)$ 的非零向量集合上可迁，故存在 $z \in N$ 将 g 的第一行送到 $e_{11} = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathrm{Mat}_{1\times nr}F$. gz 满足 $g \in X\backslash\Gamma$，且 gz 的第一行等于 $(1, 0, \cdots, 0)$，即：gz 定驻 e_{11}. 对自然数 $k \leq r$，记 W_k 为前 k 个基向量 $e_{1j}(1 \leq j \leq k)$ 所张成的 F-子空间. 则前面得到的 gz 定驻 $W_1 = Fe_{11}$. 因此，可以选 $g_1 = (A_{ij}^{(r)})_{n\times n} \in X_{W_k}\backslash\Gamma$（即 $g_1 \in X\backslash\Gamma$ 且定驻 W_k），使 $k \geq 1$ 最大. 我们证明 $k = r$，即 g_1 定驻 $W_r = Ke_1$，$A_{1j} = 0$ 对 $2 \leq j \leq n$ 成立，从而 g_1 符合引理 5.2.1 的要求. 若不然，设 $k < r$，这将推出矛盾. 对 $1 \leq j \leq r$，记 g_1 的第 j 行为 u_j，则 $u_j = e_{1j}g_1$. 由于 g_1 定驻 W_k，对 $j \leq k$ 有 $u_j \in W_k \subset Ke_1$. 存在 $z \in N = \mathrm{SL}(n, K)$ 在固定 e_1 的同时将 u_{k+1} 送进 $Ke_1 \oplus Ke_2$. z 固定 Ke_1 中所有的向量，特别是固定所有的 $u_j \in Ke_1(1 \leq j \leq k)$. 于是 $g_1 z$ 的前 k 行与 g_1 相同，仍在 Ke_1 中. 而 $g_1 z$ 的第 $k+1$ 行等于 $u_{k+1}z \in Ke_1 \oplus Ke_2$. 总之，$g_1 z = (B_{ij})_{n\times n}$ 的前 $k+1$ 行在 $Ke_1 \oplus Ke_2$ 中，B_{1n} 的前 $k+1$ 行为零，$g_2 = g_1 T_{n1}(I^{(r)}) g_1^{-1} \in X$ 固定基向量 $e_{1j}(1 \leq j \leq k+1)$ 从而定驻 W_{k+1}. k 的最大性迫使 $g_2 \in \Gamma$. 但这使我们可以用 § 5.4 中的推论 5.4.4 和引理 5.4.1 得出：X 包含一个 $g = (C_{ij})_{n\times n} \notin \Gamma$，其中 $C_{1j} = 0$ 对 $2 \leq j \leq n$ 成立. 即：$g \in X_{Ke_1}\backslash\Gamma$，$k = r$，这与原假设相矛盾.

这就证明了 $k = r$，$g_1 = (A_{ij})_{n\times n} \in X\backslash\Gamma$ 的块 $A_{1j} = 0(2 \leq j$

$\leq n$). 由引理 5.2.1 知, $X \geq \mathrm{SL}(n, S)$ 对 $R = \mathrm{Mat}_r F$ 的某个真包含 K 的子环 S 成立. 由引理 6.2.1 知 $\mathrm{SL}(n, S) = \mathrm{SL}(nd, E)$ 对 K 的某个包含 F 的真子体 E 成立. $X \geq N_E = \mathrm{SL}(nd, E)$, 这与 §6.1 所作的假设(1)相矛盾,从而定理得证. ▍

§6.3 SL(2, K)的扩群

对 $N = \mathrm{SL}(2, K) \leq X \leq \mathrm{GL}(2, R)$ (记住 $R = \mathrm{Mat}_r F \supset K$), 集合 $S = \{a \in R | T_{ij}(a) \in X\}$ 仍与 $i \neq j$ 的选取无关. S 仍是加群且包含 K. 并且对任意的 $a \in S$, $\theta \in K^*$, 有 $z = \mathrm{diag}(\theta, \theta^{-1}) \in N$, 从而 $zT_{12}(a)z^{-1} = T_{12}(\theta a \theta) \in X$, 这说明 $\theta S \theta = S$. 但一般来说 S 不是环,因此,即使已经证得 $S \supsetneqq K$, 也不能应用引理 6.2.1. 不过我们有如下引理:

引理 6.3.1 设 $g_0 = \begin{pmatrix} A & O \\ * & I \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, R)$, $A \in R \backslash K$, 则 $Y = \langle N, g_0 \rangle \geq \mathrm{SL}(2d, E)$ 对 K 的某个真子体 $E \supseteq F$ 成立, 其中 $d = \dim_E K \geq 2$.

证明 我们有 $Y \geq Y_0 = \langle g_0, \mathrm{diag}(\theta, \theta^{-1}) | \theta \in K^* \rangle$. 设 Σ 是 K^* 与 A 在 R^* 中生成的乘法子群. 则对任意的 $B \in \Sigma$, 存在 $\theta \in K^*$, 使 $g = \begin{pmatrix} B & O \\ * & \theta \end{pmatrix} \in Y_0$, 从而 $g^{-1}T_{21}(\theta)g = T_{21}(B) \in Y$. 进而 $T_{21}(C) \in Y$ 对 Σ 生成的加群 S 中的任意元素 C 成立. S 就是 K 与 A 生成的环. 于是可用引理 6.2.1 得 $Y \geq \mathrm{SL}(2, S) = \mathrm{SL}(2d, E)$, 对某个 $E \subsetneqq K$ 成立. ▍

引理 6.3.2 设 K 是非交换体, $g_0 = \begin{pmatrix} A & O \\ * & B \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, R)$, $AKA^{-1} \neq K$, 则 $Y = \langle N, g_0 \rangle \geq \mathrm{SL}(2d, E)$ 对 K 的某个真子体 $E \supseteq F$ 成立, 其中 $d = \dim_E K \geq 2$.

证明 设 C 是 K^* 的换位子群, 则 $C \neq \{1\}$. 对每个 $1 \neq \mu \in C$, $\mathrm{diag}(\mu, I) \in \mathrm{SL}(2, K)$, 从而

$$g = g_0\mathrm{diag}(\mu, I)g_0^{-1} = \begin{pmatrix} A\mu A^{-1} & O \\ * & I \end{pmatrix} \in Y.$$

如果可选 $\mu \in C$ 使 $A\mu A^{-1} \notin K$，由引理 6.3.1 即得所需的结论 $Y \geq \mathrm{SL}(2d, E)$. 若不然，则 $ACA^{-1} < K^*$. 由定理 1.7.2 知 C 在 K 中生成的子体等于 K. 于是由 $ACA^{-1} < K^*$ 推出 $AKA^{-1} = K$，这与原假设矛盾. ▌

显然，上面的引理对处理非交换体 K 很有用，而在 K 是域的情形，需用到下面的引理：

引理 6.3.3 设 K 是域，$|K| > 4$，E 是 K 的子域，且 K 已在 K/E 的基 $\mathscr{W} = \{w_j | 1 \leq j \leq d\}$ 下被嵌入 $\mathrm{Mat}_d E$，$X > N = \mathrm{SL}(2, K)$. 设 f 是 $V = V(2, K)$ 上的交错型，且使 $f(e_1, e_2) = 1$，$0 \neq \varphi_E \in \mathrm{Hom}_E(K, E)$，$f_E = \varphi_E f$ 是 $V = V(2d, E)$ 上的交错型. 若下列情况之一成立，则 $X \geq N_E = \mathrm{Sp}(2d, E, f_E)$.

(i) X 包含 N_E 的某个辛平延 ρ_{u_1, s_1}.

(ii) X 包含某个 $g = \begin{pmatrix} A & O \\ * & B \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathrm{Mat}_d E)$，$g$ 的准对角部分 $g_0 = \mathrm{diag}(A, B)$ 是 N_E 的某个辛二平延 $\eta_{\theta_1 e_1, \theta_2 e_2}$，且不正规化 N.

证明 (i) X 包含所有的 $z^{-1}\rho_{u_1, s_1} z = \rho_{u, s_1}$，其中 $u = u_1 z (z \in N)$ 取遍所有的非零向量. ρ_{u, s_1} 穷尽了 ρ_{u_1, s_1} 在 N_E 中所有的共轭，从而生成 N_E 的一个正规子群 $\widetilde{N}_E \leq X$，$\widetilde{N}_E$ 只能等于 N_E.

(ii) 任取 $z = T_{21}(\theta) \in N (\theta \in K^*)$，则 X 包含换位子 $[g, z] = g^{-1}z^{-1}gz = g_0^{-1}z^{-1}g_0 z = \eta_{\theta_1 e_1, \theta_2 \theta e_1}$. 考虑它在 N 下的共轭可知 X 包含所有的 $\eta_{\alpha u, \beta u} (u \neq 0, \alpha、\beta \in K^*)$.

如果 $\mathrm{char} F \neq 2$，则 X 所含的 $\eta_{su, u} = \rho_{u, 2s} (\forall u \neq 0, s \in E^*)$ 取遍 N_E 中所有的辛平延，$X \geq N_E$.

设 $\mathrm{char} F = 2$. 如果 $d \geq 3$，则对任意在内积 f_E 下相互正交的 $\theta_1 e_1$、$\theta_2 e_2$，可选 $\alpha_1 e_1$、$\beta_1 e_2 \in \langle \theta_1 e_1, \theta_2 e_2 \rangle^{\perp}$ 满足条件 $f_E(\alpha_1 e_1, \beta_1 e_2) = 1$，正交二平延 $\eta_{\theta_1 e_1, \alpha_1 e_1}$ 与 $\eta_{\theta_2 e_2, \beta_1 e_2}$ 含于 X，从而它们的换位子 $\eta_{\theta_1 e_1, \theta_2 e_2}$

含于 X. X 中所含的正交二平延 $\eta_{\alpha e_i, \beta e_i}(i=1, 2)$ 及 $\eta_{\alpha e_1, \beta e_2}$ 的全体生成一个 $\Omega(2d, E, Q_E) < \mathrm{Sp}(2d, E, f_E)$. 再由定理 4.1.1 即知 X 的子群

$$\langle \mathrm{Sp}(2,K, f), \Omega(2d, E, Q_E)\rangle = \mathrm{Sp}(2d, E, f_E) = N_E.$$

在剩下情形 $d=2$ 中，考虑$[g, z] \in X$ 的矩阵形式 $T_{21}(C)$，其中 $C = B^{-1}\theta A - \theta$. 如果对所有的 $\theta \in K^*$ 都有 $C \in K$，从而 $B^{-1}\theta A \in K^*$，$A^{-1}\theta^{-1}B = (B^{-1}\theta A)^{-1} \in K^*$，则 g_0 正规化 N 的根子群 $\{T_{21}(\theta) \mid \theta \in K\}$ 及 $\{T_{12}(\theta) \mid \theta \in K\}$，从而正规化它们生成的 N，这与原假设相矛盾. 这说明总可以选择 $\theta \in K^*$ 使 $C \notin K$. 但 $C \in \mathrm{Mat}_2 E$. K 中所有的 $\theta \in \mathrm{Mat}_2 E$ 的第一行取遍 $\mathrm{Mat}_{1\times 2}E$，必可选 θ 使它的第一行与 C 相同. $T_{21}(C)T_{21}(-\theta) = T_{21}(C_1) \in X$，其中 $C_1 \in \mathrm{Mat}_2 E$ 的第一行为零. 但由 $C \notin K$ 知 $C_1 \neq 0$. 故 $\mathrm{rank}_E C_1 = 1$，$T_{21}(C_1) \in X$ 是 N_E 中的辛平延. 由(i)即知 $X \geq N_E$. ▌

引理 6.3.4 设 $0 \neq A \in \mathrm{Mat}_r F$，$\mathrm{rank}_F A = k < r$，且对每个 $\theta \in K$，$A\theta A = 0$ 或 $\mathrm{rank}_F(A\theta A) = k$ 二者必有一个成立. 任取 $0 \neq \vec{\beta}_1 \in \mathrm{Im}A$，设 E 是所有的 $\beta\beta_1^{-1}(\vec{\beta} \in \mathrm{Im}A)$ 生成的 K 的子体. 则 $\mathrm{Ker}A$、$\mathrm{Im}A$ 都是 E 上的左空间. 且可适当选取 K/E 的基 $\mathscr{W} = \{w_l \mid 1 \leq l \leq d\}$ 和 E/F 的基 $Z = \{\zeta_t \mid 1 \leq t \leq k\}$ 构造出 K/F 的基 $\mathscr{Z}\mathscr{W}$ 来代替 $\mathscr{K}$，将 A 化为

$$\begin{bmatrix} O & O^{(r-k)} \\ \delta & O \end{bmatrix} (\text{当 } A^2 = 0) \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} O^{(r-k)} & O \\ O & \delta \end{bmatrix} (\text{当 } A^2 \neq 0)$$

的形式，其中 $\delta \in \mathrm{GL}(k, F)$.

证明 记 $U = \{u \in K \mid \vec{u} \in \mathrm{Ker}A\}$，则 $0 < \dim_F(\vec{U}) < r$. 对每个 $u \in U$ 取 $\theta = \beta_1^{-1}u \in K$，则 $\vec{\beta}_1\,\theta A = \vec{0}$，$F$-线性变换 φ：$\mathrm{Im}A \to \mathrm{Mat}_{1\times r}F$，$\vec{x} \mapsto \vec{x}\,\theta A$ 的核 $\mathrm{Ker}\varphi$ 包含 $\vec{\beta}_1 \neq \vec{0}$，从而

$$\mathrm{rank}_F(A\theta A) = \dim_F(\mathrm{Im}\varphi) < \dim_F(\mathrm{Im}A) = \mathrm{rank}_F A.$$

由引理的假设,应有 $A\theta A=0$,$\mathrm{Im}\varphi=0$,$\overrightarrow{\beta\beta_1^{-1}u}=\vec{\beta}\theta\in\mathrm{Ker}A$ 对所有的 $\vec{\beta}\in\mathrm{Im}A$ 成立. 这证明了 $\beta\beta_1^{-1}U\subseteq U$ 对所有的 $\vec{\beta}\in\mathrm{Im}A$ 成立. 从而 $EU\subseteq U$ 对 $\{\beta\beta_1^{-1}\mid\vec{\beta}\in\mathrm{Im}A\}$ 生成的环 E 成立. 即 U 是左 E-模. 由 $F\subseteq E\subseteq K$ 及 $\dim_F K=r<\infty$ 知 E 是体,U 是左 E-空间. 记

$$m=\dim_F E,\quad d=\dim_E K=r/m,$$

则
$$\begin{aligned}\dim_E U&=(1/m)\dim_F U=(1/m)(r-\dim_F(\mathrm{Im}A))\\&=d-(1/m)\dim_F(\mathrm{Im}A).\end{aligned}$$

但对每个 $\vec{\beta}\in\mathrm{Im}A$ 有 $\beta=(\beta\beta_1^{-1})\beta_1\in E\beta_1$, 故

$$0\neq\mathrm{Im}A\subseteq\overrightarrow{E\beta_1},$$

$$0<(1/m)\dim_F(\mathrm{Im}A)\leq(1/m)\dim_F(\overrightarrow{E\beta_1})=1.$$

但由 $\dim_E U$ 是整数知 $(1/m)\dim_F(\mathrm{Im}A)$ 是整数. 于是

$$(1/m)\dim_F(\mathrm{Im}A)=1,$$

其中 $\mathrm{Im}A=\overrightarrow{E\beta_1}$ 是 E 上的一维左空间,

$$m=\dim_F E=\dim_F(\mathrm{Im}A)=\mathrm{rank}A=k.$$

而 $\dim_E U=d-1$. 取 K/E 的基 $\mathscr{W}=\{w_l\mid 1\leq l\leq d\}$ 使 $\{w_1,\cdots,w_{d-1}\}$ 构成 $\mathrm{Ker}A$ 在 E 上的一组基,且 $\mathrm{Im}A=\overrightarrow{Ew_1}$ (当 $A^2=0$, 即 $\mathrm{Im}A\subseteq\mathrm{Ker}A$) 或 $\mathrm{Im}A=\overrightarrow{Ew_d}$ (当 $A^2\neq 0$, 即 $\mathrm{Im}A\nsubseteq\mathrm{Ker}A$). 再任取 E/F 的基 $\mathscr{Z}$,用 $\mathscr{Z}\mathscr{W}$ 代替 $\mathscr{K}$ 作为 K/F 基,则 A 化为所述的形式. ▎

定理 6.1.1 的证明 ($n=2$ 的情形):

如果 $K=F_4$,$F=F_2$,$r=2$, 即 $N=\mathrm{SL}(2,4)$,$G=\mathrm{GL}(2r,F)=\mathrm{SL}(4,2)$, 则存在群同构映射 $\varphi: G\to A_8$, 而 $\varphi(N)=A_5$.

容易定出交错群 A_5 在 A_8 中的扩群，从而也就知道了 N 在 G 中的扩群. 因此，以下设 $|K|>4$.

按§6.1中的假定(3)，$X\not\leq\Gamma$. 故存在 $g\in X\backslash\Gamma$. 这样的 g 不定驻 K-空间结构 $V(2, K)$，存在 $0\neq u\in V$ 使 $(Ku)g\neq K(ug)$. $N=\mathrm{SL}(2, K)$ 在 V 的非零向量集合上可迁，故存在 z_1、$z_2\in N$ 使 $u=e_{11}z_1$，$ugz_2=e_{11}$. 用 $z_1gz_2\in X\backslash\Gamma$ 代替 g，化为 $e_{11}g=e_{11}$ 且 $(Ke_{11})g\neq Ke_{11}$ 的情形，即 $g=(A_{ij}^{(r)})_{2\times2}$ 的第一行等于(1, 0, …, 0)，A_{12}的第一行为零. 但 $A_{12}\neq0$ (否则，$(Ke_{11})g=Ke_{11}$). 于是 $1\leq\mathrm{rank}_F(A_{12})\leq r-1$. 因此，我们可选 $g_0=(A_{ij})_{2\times2}\in X$ 使 $k=\mathrm{rank}_F(A_{12})\geq1$ 最小，$k\leq r-1$. 显然这样的 $g_0\notin\Gamma$. 且由 $A_{12}\neq0$ 知 $g_0^{-1}=(\widetilde{A}_{ij})_{2\times2}$ 的块 $\widetilde{A}_{12}\neq0$.

记 $S=\{C\in\mathrm{Mat}_rF\,|\,T_{21}(C)\in X\}$，并对每个 $C\in S$ 记

$$g_2(C)=g_1T_{21}(C)g_1^{-1}=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}I+A_{12}C\widetilde{A}_{11}&A_{12}C\widetilde{A}_{12}\\A_{22}C\widetilde{A}_{11}&I+A_{22}C\widetilde{A}_{12}\end{pmatrix},$$

则 $g_2(C)\in X$，且 $\mathrm{rank}_F(B_{12})\leq\mathrm{rank}_F(A_{12})=k$. 由 k 的最小性知 $\mathrm{rank}_F(B_{12})=0$ 或 k. 当 $B_{12}\neq0$ 时可用 $g_2(C)$代替 g_1.

特别地，我们有 $K\subseteq S$，K^* 在 K/F 的非零向量集合上可迁，且 A_{12}、$\widetilde{A}_{12}\neq0$，$\mathrm{Ker}\widetilde{A}_{12}\neq\mathrm{Mat}_{1\times r}F$，可选 $\theta_0\in K^*$ 将 A_{12}的某个不为零的行 $\overrightarrow{\beta}$送到 $\overrightarrow{\beta\theta_0}\notin\mathrm{Ker}\widetilde{A}_{12}$，从而 $A_{12}\theta_0\widetilde{A}_{12}\neq0$. 我们可以在一开始就用 $g_2(\theta_0)$代替 g_1，从而用 $g_2(\theta_0)^{-1}=g_2(-\theta_0)=2I-g_2(\theta_0)$ 代替 g_1^{-1}，化为 $g_1^{-1}=2I-g_1$ 的情形. 即：$\widetilde{A}_{ij}=-A_{ij}(i\neq j)$，而 $\widetilde{A}_{ii}=2I-A_{ii}$. 对 g_1 作这样的替换后，$g_2(C)$ 的块 $B_{12}=-A_{12}CA_{12}$. 由 k 的最小性知，对任意 $C\in S$，$A_{12}CA_{12}=0$ 或 $\mathrm{rank}_F(A_{12}CA_{12})=k$ 二者必居其一. 特别当 $C=\theta\in K\subseteq S$ 时如此. 于是可以用引理 6.3.4 得：存在 K 的包含 F 的子体 E，

$\dim_F E = k < r$, $d = \dim_E K = r/k \geq 2$, 使得可以用 K/E 的一组基 $\mathscr{W} = \{w_l \mid 1 \leq l \leq d\}$ 和 E/F 的一组基 $\mathscr{Z}$ 构造出 K/F 的基 $\mathscr{Z}\mathscr{W}$ 来代替 $\mathscr{K}$, 将 A_{12}重写为

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} O & O^{(r-h)} \\ \delta & O \end{pmatrix} \ (\text{当 } A_{12}^2 = 0)$$

或
$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} O^{(r-h)} & O \\ O & \delta \end{pmatrix} \ (\text{当 } A_{12}^2 \neq 0)$$

的形式, 其中 $\delta \in \mathrm{GL}(h, F)$.

E 被在基 $\mathscr{Z}$ 下嵌入 $\mathrm{Mat}_k F$, 而 $K \subset \mathrm{Mat}_d E$. 可选 $\theta_1 \in K^* \subset \mathrm{GL}(d, E)$ 使 $A_{12}\theta_1 A_{12} \neq 0$. 事实上,

$$A_{12}\theta_1 A_{12} = \begin{pmatrix} O & O^{(r-h)} \\ \delta_1 & O \end{pmatrix} \ (\text{当 } A_{12} = \Delta_1)$$

或
$$\begin{pmatrix} O^{(r-h)} & O \\ O & \delta_1 \end{pmatrix} \ (\text{当 } A_{12} = \Delta_2),$$

其中 $\delta_1 \in \mathrm{GL}(h, F)$. 在 $g_2(\theta_1) = (B_{ij})_{2\times 2} \in X$ 中有 $B_{12} = -A_{12}\theta_1 A_{12}$, $B_{11} - I = A_{12}\theta_1 \tilde{A}_{11}$ 的前 $r-h$ 行为零, 而 $B_{22} - I = A_{22}\theta_1 \tilde{A}_{12}$ 的后 $r-h$ 列(当 $A_{12} = \Delta_1$) 或前 $r-h$ 列(当 $A_{12} = \Delta_2$) 为零. 我们可在一开始就用 $g_2(\theta_1) \in X$ 代替 g_1, 用 $-\delta_1$ 代替 δ, 化为

$$A_{11} = \begin{pmatrix} I^{(r-h)} & 0 \\ * \cdots & * \end{pmatrix},\ A_{22} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ \vdots & I^{(r-h)} \end{pmatrix} \ (\text{当 } A_{12} = \Delta_1)$$

或
$$A_{22} = \begin{pmatrix} I^{(r-h)} & \vdots \\ 0 & * \end{pmatrix} \ (\text{当 } A_{12} = \Delta_2)$$

的情形.

对每个 $\alpha \in E^* \subset \mathrm{Mat}_k F$, 当 $A_{12} = \Delta_1$ 时取 $\theta_2 \doteq w_1^{-1}\alpha w_1 = (a_{ij})_{d\times d} \in K^* \subset \mathrm{Mat}_d E$, 其中 $(a_{11}, \cdots, a_{1d}) = (\alpha, 0, \cdots, 0)$; 当

$A_{12}=\Delta_2$ 时取 $\theta_2=w_d^{-1}\alpha w_1=(b_{ij})_{d\times d}\in K^*\subset \mathrm{Mat}_d E$，其中 $(b_{d1},\cdots,b_{dd})=(\alpha,0,\cdots,0)$. 则

$$g_2(\theta_2)=g_1T_{21}(\theta_2)g_1^{-1}=\begin{pmatrix}B_{11} & O\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\in X,$$

其中 $B_{11}=\begin{pmatrix}I & O & O\\ O & I & O\\ \delta\alpha & O & I\end{pmatrix}$.

先设 K 是非交换体. 如能选 $\alpha\in E^*$ 使 $B_{11}KB_{11}^{-1}\neq K$，则由引理 6.3.2 即得所需结论 $X\geq \mathrm{SL}(2d,E)$. 若不然，设 $B_{11}KB_{11}^{-1}=K$ 对所有的 $\alpha\in E^*$ 成立. 对任意 $\gamma\in E^*$，有 $\theta(\gamma)=w_1^{-1}\gamma w_d=(c_{ij})_{d\times d}\in K^*\subset \mathrm{Mat}_d E$，其中 $(c_{11},\cdots,c_{1d})=(0,\cdots,0,\gamma)$，于是

$$\Delta(\alpha,\gamma)=B_{11}\theta(\gamma)B_{11}^{-1}-\theta(\gamma)=\begin{pmatrix}-\gamma\delta\alpha & O & O\\ * & O & O\\ \vdots & O & \delta\alpha\gamma\end{pmatrix}$$

$$\in K^*<\mathrm{GL}(d,E).$$

这迫使 $\delta\in E^*$. 且由 $\mathrm{rank}_E\Delta(\alpha,\gamma)=2$ 及 $\Delta(\alpha,\gamma)$ 可逆，得 $d=2$. 对任意 $s\in E^*$，有

$$\Delta(\delta^{-1}\gamma^{-1}s,\gamma)-\Delta(\delta^{-1}s,1)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ * & \gamma^{-1}s\gamma-s\end{pmatrix}\in K,$$

这迫使 $\gamma^{-1}s\gamma-s=0$. 由 $\gamma,s\in E^*$ 的任意性知 E 是域. 再由 $\dim_E K=2$ 知 K 只能是域，这与原假设矛盾.

于是只剩下 K 是域的情形. 在此情形下，当 $A_{12}=\Delta_1$ 时，

$$\theta_2=\alpha I,\ B_{22}=\begin{pmatrix}I & O & O\\ O & I & O\\ -\alpha\delta & O & I\end{pmatrix};$$

当 $A_{12}=\Delta_2$ 时，

$$\theta_2 = \alpha w_d^{-1} w_1 = \alpha \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1d} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{d-1,d} & \cdots & b_{d-1,d} \\ 1 & O & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{22} = \begin{pmatrix} I & O & O & -b_{1d}\delta \\ O & I & O & \vdots \\ O & O & I & -b_{d-1,d}\delta \\ O & O & O & I \end{pmatrix}.$$

设 f 是 $V(2, K)$ 上的交错型, $f(e_1, e_2) = 1$, 则 $N = \mathrm{SL}(2, K) = \mathrm{Sp}(2, K, f)$.

先设 $\delta \in E^*$, 当 $A_{12} = \Delta_1$ 时, 定义 $\varphi_E \in \mathrm{Hom}_E(K, E)$ 使 $\varphi_E(w_i w_1) = 0$ (当 $i \neq d$) 或 $= \delta$ (当 $i = d$), 则 $\mathrm{diag}(B_{11}, B_{22})$ 是 $N_E = \mathrm{Sp}(2d, E, \varphi_E f)$ 的辛二平延 $\eta_{w_1 e_1, \alpha w_1 e_2}$; 当 $A_{12} = \Delta_2$ 时定义 $\varphi_E \in \mathrm{Hom}_E(K, E)$ 使 $\varphi_E(w_i w_d) = 0$(当 $i \neq d$) 或 $= \delta$ (当 $i = d$), 则对 $i \neq d$ 有

$$\varphi_E(w_i w_1) = \varphi_E(w_i(w_d^{-1}w_1)w_d) = \varphi_E\left(\sum_{j=1}^{d} b_{ij} w_j w_d\right) = b_{id},$$

于是可以看出 $\mathrm{diag}(B_{11}, B_{22})$ 是 $N_E = \mathrm{Sp}(2d, E, \varphi_E f)$ 的辛二平延 $\eta_{w_1 e_1, \alpha w_d e_2}$. 在两种情况下都可用引理 6.3.3 得到 $X \geq N_E$.

再设 $\delta \notin E$. 我们由此推出矛盾. 为此,考虑

$$g_3 = T_{21}(-\theta) g_2(\theta_2)^{-1} T_{21}(\theta) g_2(\theta_2) = T_{21}(C) \in X,$$

这里

$$\theta \in K^*, \quad g_2(\theta_2) = \begin{pmatrix} B_{11} & O \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad C = B_{22}^{-1}\theta B_{11} - \theta,$$

其中 $\theta_2 = \alpha I$ 或 $\alpha w_d^{-1} w_1$. 注意 θ_2 由 $\alpha \in E^*$ 决定,因而 C 由 θ、α 决定. 我们设法选 α、θ 使 $0 < \mathrm{rank}_F C \leq k$. 对 $A_{12} = \Delta_1$ 的情形,取 $\theta = I$ 得

$$C = B_{22}^{-1} B_{11} - I = \begin{pmatrix} O & O \\ \delta_1 & O \end{pmatrix},$$

其中 $\delta_1 = \alpha\delta + \delta\alpha$, $\mathrm{rank}_F C = \mathrm{rank}_F(\delta_1) \le k$. 只要能选 α 使 $\delta_1 \ne 0$ 即可. 当 $\mathrm{char}K \ne 2$, 取 $\alpha = 1$ 即得 $\delta_1 = 2\delta \ne 0$. 当 $\mathrm{char}K = 2$, 由 $\delta \notin E$ 知可选 $\alpha \in E^*$ 使 $\alpha\delta \ne \delta\alpha$, 从而 $\delta_1 \ne 0$. 在另一情形 $A_{12} = \Delta_2$ 下, 取 $\theta = w_d^{-1}w_1 = (b_{ij})_{d\times d} \in K^*$, 则

$$C = B_{22}^{-1}\theta B_{11} - \theta = \begin{pmatrix} \alpha b_{1d}\delta + b_{1d}\delta\alpha & O \\ \vdots & O \\ \alpha b_{d-1,d}\delta + b_{d-1,d}\delta\alpha & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

显然, $\mathrm{rank}_F C \le k$, 只须选 α 使 $C \ne 0$. 由 $\theta \in K^* < \mathrm{GL}(d,E)$ 可逆,知它的最后一列必有一个元素 $b_{id} \ne 0, 1 \le i \le d-1$. 当 $\mathrm{char}K \ne 2$ 时取 $\alpha = 1$; 当 $\mathrm{char}K = 2$ 时选 α 使 αb_{id} 与 $\delta \notin E$ 不交换,即可使 $C \ne 0$.

故当 $\delta \notin E$ 时,总存在 $T_{21}(C) \in X$ 使 $0 < \mathrm{rank}_F C \le k$, k 的最小性迫使 $\mathrm{rank}_F C = k$. 不妨一开始就用 $T_{12}(C)$ 代替 g_1, 化为 $g_1 = T_{12}(A_{12})$ 的情形. $\forall\ \theta_1$、$\theta_2 \in K^*$, 取 $\Lambda = \mathrm{diag}(\theta_1, \theta_1^{-1}) \in N$, 由

$$A_{12} \in S = \{C \in \mathrm{Mat}_r F \mid T_{ij}(C) \in X, \forall\ i \ne j\}$$

推出 $\Lambda T_{12}(A_{12})\Lambda^{-1} - T_{12}(\theta_2) = T_{12}(C(\theta_1, \theta_2)) \in X$, $C(\theta_1, \theta_2) = \theta_1 A_{12}\theta_1 - \theta_2 \in S$, 从而 $\mathrm{rank}_F(B_{12}) = 0$ 或 $= k$ 对 $g_2 = g_1 T_{21}(C(\theta_1, \theta_2))g_1^{-1} = (B_{ij})_{2\times 2} \in X$ 的块 $B_{12} = -A_{12}C(\theta_1, \theta_2)A_{12}$ 成立. $E \subset \mathrm{Mat}_k F$ 的元素的第一行取遍 $\mathrm{Mat}_{1\times k}F$, 故可选 $\alpha \in E^*$ 与 $\delta \in \mathrm{GL}(k, F)$ 的第一行相同. $\delta - \alpha$ 的第一行为零,从而 $\mathrm{rank}_F(\delta - \alpha) < k$. 且由 $\delta \notin E$ 知 $\delta - \alpha \ne 0$. 当 $A_{12} = \Delta_1 = \begin{pmatrix} O & O \\ \delta & O \end{pmatrix}$ 时,取 $\theta_1 = (a_{ij})_{d\times d} \in K$, $\theta_2 = (b_{ij})_{d\times d} \in K$ 使 $a_{1d} = 1$, $b_{1d} = \alpha$, 则

$$C(\theta_1, \theta_2) = (c_{ij})_{d\times d} \in \mathrm{Mat}_d(\mathrm{Mat}_k F)$$

有
$$c_{d1} = \delta - \alpha,\ B_{12} = \begin{pmatrix} O & O \\ -\delta(\delta - \alpha)\delta & O \end{pmatrix},$$

$$0 < \mathrm{rank}_F(B_{12}) = \mathrm{rank}_F(\delta - \alpha) < k,$$

产生矛盾. 当 $A_{12} = \Delta_2 = \begin{pmatrix} O & O \\ O & \delta \end{pmatrix}$ 时,取 $\theta_1 = I$, $\theta_2 = \alpha I$, 则

$$B_{12} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & -\delta(\delta - \alpha)\delta \end{pmatrix},$$

仍有矛盾. 这就完成了定理的证明. ▍

§6.4　U′(n, K, Δ, L)中元素在 GL(nr, F)下的共轭

在 §5.4 中曾对更一般的 $D \subset R = \mathrm{Mat}_r F$ 讨论过 $\mathrm{U}'(n, D, \Delta, L)$ 的元素在 $\mathrm{GL}(n, R)$ 下的共轭性质. 对本章中 $D = K$, $N_R(D) = K^* \rtimes (\mathrm{Gal}K/F)$ 的情形,我们补充以下引理:

引理 6.4.1　设 $T_0 \in \mathrm{GL}(n, K)$满足 $\mathrm{rank}_K(T_0 - I) \le n/2$, $g_0 \in \mathrm{GL}(n, R) \backslash \Gamma$. 如果 $T_1 = g_0 T_0 g_0^{-1} \in \Gamma$, 则 $T_1 \in \mathrm{GL}(n, K)$, 仅当以下情形时例外 :$\mathrm{rank}_K(T_0 - I) = n/2$ 且 $T_0^2 = I$, 而 $T_1 = P^{-1}\sigma P$ 对某个 $P \in \mathrm{GL}(n, K)$和 $1 \ne \sigma \in \mathrm{Gal}K/F$ 成立,且 $\sigma^2 = 1$. 在此例外情形下,当 g_0 给定后, $T_1 \in \Gamma \backslash \mathrm{GL}(n, K)$ 由 $\mathrm{Ker}(T_1 - I)$ 唯一决定.

证明　由 $\mathrm{rank}_F(T_1 - I) = \mathrm{rank}_F(T_0 - I) \le nr/2$, 得 $\dim_F \mathrm{Ker}(T_1 - I) = nr - \mathrm{rank}_F(T_1 - I) \ge nr/2$. 由 $T_1 \in \Gamma = \mathrm{GL}(n, K) \rtimes \mathrm{Gal}K/F$ 可写 $T_1 = \sigma z$, 使 $z \in \mathrm{GL}(n, K)$, $\sigma \in \mathrm{Gal}K/F$. 记 $K_\sigma = \{\theta \in K \mid \theta^\sigma = \theta\}$. T_1 将任意 $x = (\theta_1, \cdots, \theta_n) \in \mathrm{Mat}_{1\times n}K$ 送到 $x^\sigma z = (\theta_1^\sigma, \cdots, \theta_n^\sigma)z$. 在 $\mathrm{Ker}(T_1 - I)$ 中取一个极大 K-线性无关向量组 $u_1, \cdots, u_t$. 则 $\mathrm{Ker}(T_1 - I) \subseteq Ku_1 \oplus \cdots \oplus Ku_t$. 对任意 $v = \theta_1 u_1 + \cdots + \theta_t u_t$　$(\theta_i \in K, 1 \le i \le t)$, 有 $vT_1 = \theta_1^\sigma u_1 + \cdots + \theta_t^\sigma u_t$. 由此看出, $v \in \mathrm{Ker}(T_1 - I) \Longleftrightarrow \theta_i \in K_\sigma, \forall i$. 这证明了 $\mathrm{Ker}(T_1 - I) = K_\sigma u_1 \oplus \cdots \oplus K_\sigma u_t$ 是 K_σ 上的 t 维空间. 由 $\dim_F \mathrm{Ker}(T_1 - I) = t\dim_F K_\sigma \ge nr/2$ 知

$$t \geq (n/2)(r/\dim_F K_\sigma) = (n/2)(\dim_{K_\sigma} K).$$

如果 $T_1 \notin \mathrm{GL}(n, K)$，$\sigma \neq 1$，$\dim_{K_\sigma} K \geq 2$，由 $n \geq t \geq (n/2)\dim_{K_\sigma} K \geq (n/2) \cdot 2 = n$ 知只能 $n = t$，$\dim_{K_\sigma} K = 2$，$\mathrm{Gal} K/K_\sigma$ 是二阶群，σ 是其中唯一的非单位元，$\sigma^2 = 1$. 存在 $P \in \mathrm{GL}(n, K)$ 将 $V(n, K) = \mathrm{Mat}_{1\times n} K$ 的标准基的基向量 $e_1, \cdots, e_n$ 分别送到 $u_1, \cdots, u_n$. 由 T_1 定驻所有的 u_i 知 PT_1P^{-1} 将任一 $\theta_1 e_1 + \cdots + \theta_n e_n \in V(n, K)$ 送到 $\theta_1^\sigma e_1 + \cdots + \theta_n^\sigma e_n \in V(n, K)$. 这说明了 $PT_1P^{-1} = \sigma I$. $\sigma^2 = 1 \Longrightarrow T_1^2 = I \Longrightarrow T_0^2 = I$. 并且 $\dim_F K_\sigma = r/2 \Longrightarrow \dim_F \mathrm{Ker}(T_1 - I) = nr/2 \Longrightarrow \mathrm{rank}_F(T_0 - I) = nr/2 \Longrightarrow \mathrm{rank}_K(T_0 - I) = n/2$. 这确实是引理所描述的例外情形.

在例外情形下，$T_1 = P^{-1}\sigma P$ 由 σ 和 P 唯一决定. 由 $\mathrm{Ker}(T_1 - I) = \bigoplus_{i=1}^n K_\sigma u_i$ 知 K_σ 可刻画为

$$K_\sigma = \{\theta \in K \mid \theta \cdot \mathrm{Ker}(T_1 - I) = \mathrm{Ker}(T_1 - I)\},$$

因而由 $\mathrm{Ker}(T_1 - I)$ 唯一决定，从而 $\mathrm{Gal} K/K_\sigma$ 中唯一的 $\sigma \neq 1$ 也由 $\mathrm{Ker}(T_1 - I)$ 唯一决定. 注意到 $u_i (1 \leq i \leq n)$ 就是 $P \in \mathrm{GL}(n, K)$ 的第 i 行. 以 $\mathrm{Ker}(T_1 - I)$ 的任一组 K_σ-基为各行，组成矩阵 $P_1 \in GL(n, K)$，则 $P_1 = AP$，$A \in GL(n, K_\sigma)$，$\sigma^{-1} A_\sigma = A$，$P^{-1}\sigma P = P_1^{-1}\sigma P_1$. 这证明了 T_1 由 $\mathrm{Ker}(T_1 - I)$ 唯一决定. ▌

推论 6.4.2 对 $S \in \mathrm{Mat}_\nu K$，仍如引理 5.4.1，记

$$T_0(S) = \begin{pmatrix} I_{(\nu)} & O & O \\ S & I & O \\ O & O & I \end{pmatrix},$$

设 $g_0 \in \mathrm{GL}(n, R)$，$T_0 = T_0(S) \in N (0 \neq S \in \mathrm{Mat}_\nu K)$，$T_1 = g_0 T_0 g_0^{-1} \in \Gamma$，则当 $\mathrm{char} K \neq 2$ 或 $\mathrm{rank}_K S < n/2$ 时 $T_1 \in \mathrm{GL}(n, K)$. 当 $\mathrm{char} K = 2$ 且 $\mathrm{rank}_K S = \nu = n/2$ 时，如果存在 K^* 的子集 A，$|A| \geq 2$，使 $T_0(S\alpha) \in N$ 及 $T_1(\alpha) = g_0 T_0(S\alpha) g_0^{-1} \in \Gamma$ 对所有 $\alpha \in A$ 成立，则 $T_1(\alpha) \in \mathrm{GL}(n, K)$，$\forall \alpha \in A$.

证明 当 $\mathrm{char}K \neq 2$（从而 $T_0^2 \neq I$）或 $\mathrm{rank}_K(T_0 - I) = \mathrm{rank}_K S < n/2$ 时，显然不属于引理 6.4.1 的例外情形，所述结论成立. 故只须考虑 $\mathrm{char}K = 2$ 且 $\mathrm{rank}_K S = n/2$ 的情形. 注意

$$\mathrm{Ker}(T_1(\alpha) - I) = \mathrm{Ker}(T_0(S\alpha) - I)g_0^{-1} = (\bigoplus_{i=1}^{\nu} Ke_i)g_0^{-1},$$

与 α 的选取无关. 由引理 6.4.1，对于 $T_1(\alpha) \in \Gamma\backslash\mathrm{GL}(n, K)$，$T_1(\alpha)$ 由 $\mathrm{Ker}(T_1(\alpha) - I)$ 唯一决定. 既然所有的 $\mathrm{Ker}(T_1(\alpha) - I)(\alpha \in A)$ 都相同，它所决定的 $T_1(\alpha) \notin \mathrm{GL}(n, K)$ 至多只能有一个. 故 $T_1(\alpha)(\alpha \in A)$ 至多只能有一个不含于 $\mathrm{GL}(n, K)$. 由 $|A| \geq 2$ 知至少有一个 $\alpha_1 \in A$，使 $T_1(\alpha_1) \in \mathrm{GL}(n, K)$. 用 $S\alpha_1$ 代替 S（同时用 $\alpha_1^{-1}A$ 代替 A），可不妨设 $\alpha_1 = 1, T_1 \in \mathrm{GL}(n, K)$. 存在 $z \in \mathrm{GL}(n, K)$ 使 $zT_1z^{-1} = T_0$，$(zg_0)(T_0 - I) = (T_0 - I)(zg_0)$. 由此可知 zg_0 具有形式 $zg_0 = \begin{pmatrix} B_{11} & O \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$. 对任意 $\alpha \in A$，由 $T_1(\alpha) \in \Gamma$ 知 $zT_1(\alpha)z^{-1} \in \Gamma$. 于是

$$zT_1(\alpha)z^{-1} = (zg_0)T_0(S\alpha)(zg_0)^{-1} = T_0(B_{22}S\alpha B_{11}^{-1}) \in \Gamma$$

迫使 $zT_1(\alpha)z^{-1} \in \mathrm{GL}(n, K)$，从而 $T_1(\alpha) \in \mathrm{GL}(n, K)$. ▌

由以上推论知，对 C_3 问题，引理 5.6.1 的条件 $T_1(\alpha) \in \mathrm{GL}(n, D)$ 可以改为 $T_1(\alpha) \in \Gamma$，结论仍成立.

在引理 5.4.5、5.4.6 中讨论了幺幂元素（包括平延和二平延）的共轭. 为了处理 $N = \Omega(n, K, \Delta)$ 的情形，我们还在下面的引理中讨论双曲旋转的共轭. 对每个 $\lambda \in K^*$，记

$$\Lambda_1(\lambda) = \mathrm{diag}(\lambda, I_{(\nu-1)}, \lambda^{-1}, I_{(n-\nu-1)}) \in O(n, K, \Delta).$$

它是 $O(n, K, \Delta)$ 的双曲旋转，将 $V(n, K) = \mathrm{Mat}_{1\times n}K$ 的自然基 $\{e_i | 1 \leq i \leq n\}$ 的基向量 $e_1, e_{\nu+1}$ 分别送到 $\lambda e_1, \lambda^{-1}e_{\nu+1}$，而将其余 $e_i (i \notin \{1, \nu+1\})$ 固定不动. 当 $\lambda \in K^{*2} = \{a^2 | a \in K^*\}$ 时，$\Lambda_1(\lambda) \in \Omega(n, K, \Delta)$.

对 $N = \Omega^+(4, 4)$ 和 $N = \Omega^+(4, 9)$ 这两种特别情形，证明下面的引理及定理 6.1.2 需要特别繁琐的专门处理，其中的推理

也没有多少普遍意义.故在此从略.因而在下面的引理中排除这两种情形,即排除 $|K| \leq 9$ 且 $n = 4$ 的情形.

引理 6.4.3 设 F 是域,K 是 $R = \mathrm{Mat}_r F$ 的子域,且包含 FI,$[K : F] = r \geq 2$,$N = \Omega(n, K, \Delta)$,$\nu = \nu(\Delta) \geq 2$,不讨论 $|K| \leq 9$ 且 $n = 4$ 的情形. 设 $g_0 \in \mathrm{GL}(n, R)\backslash\Gamma$,$Y = \langle N, g_0Ng_0^{-1}\rangle$,且 $Y \cap \mathrm{GL}(n, K) \leq G = GO(n, K, \Delta)$. 如果$\forall\lambda \in K^{*2}$,$\Lambda_1(\lambda) = \mathrm{diag}(\lambda, I_{(\nu-1)}, \lambda^{-1}, I_{(n-\nu-1)}) \in N$ 的共轭 $T_1(\lambda) = g_0\Lambda_1(\lambda)g_0^{-1} \in \Gamma$. 则存在引理 5.5.1 所要求的 $g_1 = (a_{ij})_{n\times n} \notin \Gamma$,$\langle N, g_1Ng_1^{-1}\rangle = Y$,且 $a_{1j} = a_{i,\nu+1} = 0$,$\forall i \geq 2, j \neq \nu + 1$.

证明 (6.4.3.1) λ 的选择:

由于 $r \geq 2$,$|K| \geq 4$,总可选 $\lambda \neq \pm 1$. 对这样的 λ,由于 $\Lambda_1(\lambda)^2 \neq I$,从引理 6.4.1 知:

$$T_1(\lambda) \in \Gamma \Longrightarrow T_1(\Lambda) \in \mathrm{GL}(n, K) \Longrightarrow T_1 \in \mathrm{GO}(n, K, \Delta).$$

我们按如下方式选定一个 λ:当 $F \neq F_2$、F_3、F_5(从而 $F^{*2} \not\subseteq \{\pm 1\}$)时,选 $\pm 1 \neq \lambda \in F^{*2}I \subset K^{*2}$. 当 $F = F_p$($p = 2$, 3 或 5)时,设 α 是域 K 的乘法群 K^* 的一个生成元,取 $\lambda = \alpha^2$、对所选定的这个 λ,记 $T_0 = \Lambda_1(\lambda)$,$T_1 = T_1(\lambda)$,并设 λ、λ^{-1}在 F 上的最小多项式分别为 $m_1(x)$、$m_2(x)$. 我们指出:$m_i(x) \in F[x]$ ($i = 1, 2$) 在 $K[x]$中可以分解为两两不同的一次因子的乘积. 事实上,当 $\lambda \in F^*$ 时,$m_i(x) \in F[x] \subset K[x]$ 本身就是一次的;而在 $\lambda \notin F$ 的情形,F 是有限域,从而是完全域,由 $F[\lambda] = F[\lambda^{-1}] = K$ 是域知 $m_i(x)$在 $F[x]$中不可约,它在 K 中有根(λ 或 λ^{-1}),从而在 $K[x]$中可分解为两两不同的一次因子的乘积.

我们证明:对按上述方式选取的 λ,除 $r = 2$ 且 $F = F_2$ 或 F_3 的情形外,都有 $m_1(x) \neq m_2(x)$.

当 $\lambda \in F^*$ 时,由 $\lambda \neq \pm 1$ 知 $\lambda \neq \lambda^{-1}$,当然有 $m_1(x) = x - \lambda \neq x - \lambda^{-1} = m_2(x)$. 设 $F = F_p$($p = 2$, 3 或 5)且 $\lambda = \alpha^2$,若 $m_1(x) = m_2(x)$,则 λ 与 λ^{-1}在 F 上共轭,存在自然数 $t < r$ 使 $\lambda^{-1} = \lambda^{p^t}$,从而 $1 = \lambda^{p^t+1} = \alpha^{2(p^t+1)}$,$(p^r - 1) | 2(p^t + 1)$. 当 $p = 2$

时，这导致 $(2^r-1)\mid(2^t+1)$，从而 $2^r-1\leq 2^t+1 \Longrightarrow 2^t(2^{r-t}-1)=2^r-2^t\leq 2 \Longrightarrow r=2,\ t=1$. 当 $p=3$ 或 5 时，$p^r-1\leq 2(p^t+1) \Longrightarrow p^t(p^{r-t}-2)\leq 3 \Longrightarrow p=3,\ r=2,\ t=1$. 这证明了：除 $r=2$ 且 $|F|\leq 3$（即 $K=F_4$ 或 F_9）的情形外，总有 $m_1(x)\neq m_2(x)$.

(6.4.3.2) $T_1(\lambda)$的性质：

由 $\mathrm{rank}_K(T_1-I)=\dfrac{1}{r}\mathrm{rank}_F(T_1-I)=\dfrac{1}{r}\mathrm{rank}_F(T_0-I)=2$，且 T_1 与 T_0 在 F 上有相同的最小多项式 $m(x)$.

$$m(x)=\begin{cases} m_1(x)m_2(x)(x-1), & \text{当 } m_1(x)\neq m_2(x); \\ m_1(x)(x-1), & \text{当 } m_1(x)=m_2(x). \end{cases}$$

由于 $m_i(x)$是 $K[x]$中两两不同的一次因子的乘积，且 $m_1(x)$，$x-1$ 没有公共根，当 $m_1(x)\neq m_2(x)$ 时，$m_1(x)$、$m_2(x)$、$x-1$ 没有公共根，可知 $m(x)\in F[x]$ 在 $K[x]$中可分解成两两不同的一次因子的乘积. T_1 在 K 上的最小多项式 $m_K(x)$是 $m(x)$的因子，也应是 $K[x]$中两两不同的一次因子的乘积. 因此，$T_1\in \mathrm{GL}(n, D)$在 $\mathrm{GL}(n, K)$中相似于对角阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)(\lambda_i\in K^*, \forall 1\leq i\leq n)$. 由 $\mathrm{rank}_K(T_1-I)=2$ 知恰有两个 $\lambda_i\neq 1$. 故 T_1 在 $\mathrm{GL}(n, K)$中相似于对角阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, I)$，且可适当调整 λ_1、λ_2 的顺序使 λ_1、λ_2 在 F 上的最小多项式分别等于 $m_1(x)$、$m_2(x)$，于是又易见 $\lambda_i\neq\pm 1$ 对 $i=1, 2$ 成立. $V(n, K)=\mathrm{Mat}_{1\times n}K$ 可分解为 $Ku_1\oplus Ku_2\oplus U_0$，使 T_1 将 $u_i(i=1, 2)$ 送到 $\lambda_i u_i$，且将所有的 $x\in U_0$ 固定不动.

我们有 $T_1\in \mathrm{GL}(n, K)\cap Y\leq \mathrm{GO}(n, K, \Delta)$. 当 $n\geq 5$ 时，由 $\dim_K\mathrm{Ker}(T_1-I)=n-2>n/2$，可应用引理 4.2.3 得 $T_1\in O(n, K, \Delta)$. 当 $n=4$ 时，如果 $T_1\notin O(4, K, \Delta)$，则由引理 4.2.3 知 $U_0=\mathrm{Ker}(T_1-I)$ 全迷向，且有 $1\neq\gamma\in K^*$ 及全奇异平面 U_1 使 $V=U_1\oplus U_0$ 使 T_1 将所有的 $x\in U_1$ 送到 γx. 这只有在 $m(x)=m_1(x)(x-1)$ 且 $m_1(x)=m_2(x)$ 也是 γ 在 F 上的最小多

项式时才可能发生. 此时 $F = F_2$ 或 F_3,恰是引理中排除的 $|K| \leq 9$ 且 $n = 4$ 的情形,不予考虑.

因此,总可以设 $T_1 \in O(n, K, \Delta)$. 由 $Ku_1 \oplus Ku_2 = \mathrm{Im}(T_1 - I) = (\mathrm{Ker}(T_1 - I))^{\perp} = U_0^{\perp}$ 知 $U_0 \cap U_0^{\perp} = 0$,U_0 非退化,从而 $Ku_1 \oplus Ku_2$ 非退化. 对于 $i = 1$、2, 由 $\lambda_i \neq \pm 1$ 及 $Q(u_i) = Q(u_iT_1) = Q(\lambda_i u_i) = \lambda_i^2 Q(u_i)$ 得 $Q(u_i) = 0$. 再由 $Ku_1 \oplus Ku_2$ 非退化得 $f(u_1, u_2) \neq 0$. $T_1 \in O(n, K, \Delta)$迫使 $\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$. 即 T_1 是双曲旋转. 存在 $z \in N$ 将 Ku_1、Ku_2 分别送到 Ke_1、$Ke_{\nu+1}$. 于是 $z^{-1}T_1z = \Lambda_1(\lambda_1)$.

(6.4.3.3) g_1 **的存在性:**

前面已证明 $z^{-1}T_1z = \Lambda_1(\lambda_1)$ 对某个 $z \in N$ 成立. 令 $g_2 = z^{-1}g_0 = (b_{ij})_{n\times n} \in GL(n, R)\backslash\Gamma$. 则 $g_2\Lambda_1(\lambda)g_2^{-1} = z^{-1}T_1z = \Lambda_1(\lambda_1)$, 即 $g_2\Lambda_1(\lambda) = \Lambda_1(\lambda_1)g_2$. 比较最后这个等式两端的矩阵元素知:

$$\forall j \notin \{1, \nu+1\} \text{ 有} b_{1j} = \lambda_1 b_{1j},\ b_{\nu+1,j} = \lambda_2 b_{\nu+1,j},$$
$$b_{j1}\lambda = b_{j1},\ \ b_{j,\nu+1}\lambda^{-1} = b_{j,\nu+1}.$$

这证明了 $b_{ij} = b_{ji} = 0$ 对于 $i \in \{1, \nu+1\}$ 和 $j \notin \{1, \nu+1\}$ 成立. 又 $b_{1,\nu+1}\lambda^{-1} = \lambda_1 b_{1,\nu+1}$, 从而 $b_{1,\nu+1}m_1(\lambda^{-1}) = m_1(\lambda_1)b_{1,\nu+1} = 0$; $b_{\nu+1,1}\lambda = \lambda_2 a_{\nu+1,1}$, 从而 $b_{\nu+1,1}m_2(\lambda) = m_2(\lambda_2)b_{\nu+1,1} = 0$.

当 $m_1(x) \neq m_2(x)$ 时, $m_1(\lambda^{-1})$、$m_2(\lambda_1)$ 都是 K 中非零元,从而是可逆元,可得 $b_{1,\nu+1} = b_{\nu+1,1} = 0$. 此时 g_2 就是所要求的 g_1.

以下设 $m_1(x) = m_2(x)$. 我们选 $\lambda \notin F$, 从而 $K = F[\lambda]$. 记

$$B_1 = (b_{ij})_{i,j\in\{1,\nu+1\}} \in \mathrm{Mat}_2 R,$$

则

$$B_1 \mathrm{diag}(\lambda, \lambda^{-1})B_1^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2).$$

由于 λ, λ^{-1}, λ_1, λ_2 在 F 上的最小多项式都是 $m_1(x)$,它们在 Galois 群 $\mathrm{Gal}K/F$ 下共轭,可分别写成 $\lambda^{\sigma_i} = \sigma_i\lambda\sigma_i^{-1}$, $\sigma_i \in \mathrm{Gal}K/F$, $1 \leq i \leq 4$. 记 $B = \mathrm{diag}(\sigma_3^{-1}, \sigma_4^{-1})B_1\mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$, 则 $B(\lambda I)B^{-1} = \lambda I$. B 中心化 λI 从而中心化 $KI = F[\lambda]I$,$B \in GL(2, K)$.

$B_1 = \mathrm{diag}(\sigma_3, \sigma_4)B \cdot \mathrm{diag}(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1})$ 的每个分量 $b_{ij} \in (K^* \rtimes \mathrm{Gal}K/F) \cup \{0\}$，$b_{ij}$ 为零或可逆. 如果有某个这样的 $b_{ij} = 0$，则选适当的置换阵 P_1、$P_2 \in N$ 并用 $P_1 g_2 P_2$ 代替 g_2 可化为 $b_{1,\nu+1} = 0$ 的情形，从而可使 $g_1 = g_2$ 符合要求.

以下设 $b_{ij} \in K^* \rtimes \mathrm{Gal}K/F < \mathrm{GL}(2,R)$ 对 i、$j \in \{1,\nu+1\}$ 成立. 已经知道 $b_{ij} = b_{ji} = 0$ 对 $i \in \{1,\nu+1\}$ 且 $j \notin \{1,\nu+1\}$ 成立，这也就是说：g_2 定驻子空间 $W_1 = Ke_1 \oplus Ke_{\nu+1}$ 及 $W_2 = \bigoplus_{i \notin \{1,\nu+1\}} Ke_i$. 注意，$W_1 = V(2, K) = V(2r, F)$，$W_2 = V(n-2, K) = V((n-2)r, F)$. 对任意 $P_1 \in \mathrm{GL}(2, R)$，$P_2 \in \mathrm{GL}(n-2, R)$，我们记 $P = (p_{ij})_{n\times n} = P_1 \times P_2 \in \mathrm{GL}(n, R)$，使

$$P_1 = (p_{ij})_{i,\ j \in \{1,\ \nu+1\}},\ P_2 = (p_{ij})_{i,\ j \notin \{1,\ \nu+1\}},$$

且 $p_{ij} = p_{ji} = 0$, $\forall i \in \{1, \nu+1\}$, $j \notin \{1, \nu+1\}$，则 P_1、P_2 分别代表 W_1、W_2 上的 F-线性变换 φ_1、φ_2，而 P 则代表 $V = W_1 \oplus W_2$ 上的 F-线性变换 φ，它定驻 W_1、W_2 且在 W_1、W_2 上分别诱导出 φ_1、φ_2. 反过来，每个定驻 W_1、W_2 的 $P \in \mathrm{GL}(n, R)$ 都可写成上述形式 $P = P_1 \times P_2$. 特别，g_2 写为 $g_2 = B_1 \times B_2$. 对 $i = 1,2$，在此约定 $\Omega(W_i)$ 代表 $\Omega(n, K, \Delta)$ 在 W_i 上的限制，即 $\Omega(W_1) = \Omega(2, K, \Delta_1)$，$\Omega(W_2) = \Omega(n-2, K, \Delta_2)$，$\Delta_1 \times \Delta_2 = \Delta$.

如果有 $\gamma_0 \in \Omega(W_2)$ 使 $B_2\gamma_0 B_2^{-1} \notin \mathrm{GL}(n-2, K)$，取 $\gamma = 1_{W_1} \times \gamma_0$，则 $g_1 = g_2\gamma g_2^{-1} = 1_{W_1} \times (B_2\gamma_0 B_2^{-1}) \in Y \setminus \Gamma$，且由 g_1 定驻 e_1、$e_{\nu+1}$ 及 W_2 知它的第$(1, j)$和第$(i, \nu+1)$元 $(j \geq 2, i \neq \nu + 1)$ 全为零，符合要求.

设上述 γ_0 不存在. 即对所有的 $\gamma_0 \in \Omega(W_2)$ 都有

$$B_2\gamma_0 B_2^{-1} \in \mathrm{GL}(n-2, K),$$

$$g_3(\gamma_0) = g_2(1_{W_1} \times \gamma_0)g_2^{-1} \in \mathrm{GL}(n, K) \cap Y$$

$$\leq \mathrm{GO}(n, K, \Delta).$$

且由 g_3 在非退化子空间 W_1 上诱导出单位变换 1_{W_1} 知 $g_3 \in O(n,$

$K, \Delta)$. 于是 $g_3|_{W_2} = B_2\gamma_0 B_2^{-1} \in O(W_2)$. 这说明 $B_2\Omega(W_2)B_2^{-1} \leq O(W_2)$. 由于 $n = 4$ 的情形已排除，故只考虑 $n \geq 5$ 的情形. 此时 $\dim_K W_2 \geq 3$，这迫使 B_2 具有形式 $B_2 = \sigma P_2$，$\sigma \in \mathrm{Gal}K/F$，$P_2 \in \mathrm{GO}(W_2)$. P_2 所代表的 W_2 上的变换 φ_2 满足 $f(x\varphi_2, y\varphi_2) = \beta f(x, y)$，$Q(x\varphi_2) = \beta Q(x)$，$\forall x、y \in W_2$，其中 $\beta \in K^*$ 是由 φ_2 决定的一个常数. 取 $P_1 = \mathrm{diag}(1, \beta) \in \mathrm{GL}(2, K)$. 则 $P = P_1 \times P_2 \in \mathrm{GO}(n, D, \Delta)$，$PNP^{-1} = N$. 取 $g_3 = g_0 P^{-1}$，则 $g_3 \notin \Gamma$，$g_3 N g_3^{-1} = g_0 N g_0^{-1}$，从而 $\langle N, g_3 N g_3^{-1}\rangle = Y$. 且 $g_3 = C_1 \times C_2$，其中 $C_1 = B_1 P_1^{-1}$，而 $C_2 = B_2 P_2^{-1} = \sigma I_{(n-2)}$ 定驻 Ke_i，$\forall i \notin \{1, \nu + 1\}$. 取 $z_1 \in N$ 将 $e_1 \mapsto e_2, e_{\nu+1} \mapsto e_{\nu+2}, e_2 \mapsto -e_1, e_{\nu+2} \mapsto -e_{\nu+1}$，并定驻其余 e_i，则 $g_1 = z_1^{-1} g_3 z_1 \notin \Gamma$ 且 $\langle N, g_1 N g_1^{-1}\rangle = Y$. 又 g_1 定驻所有的 Ke_i $(\forall i \notin \{2, \nu + 2\})$ 且定驻 $W_1 z_1 = Ke_2 \oplus Ke_{\nu+2}$，特别在 $g_1 = (c_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{GL}(n, R)$ 中 $c_{1j} = c_{i,\nu+1} = 0$ 对所有的 $j \neq 1, i \neq \nu + 1$ 成立. g_1 恰如所需. ▌

§ 6.5　U′(n, K, h, L)的扩群

本节定出 $N = \mathrm{U}'(n, K, h, L)(\nu_L(h) \geq 2)$在 $\mathrm{GL}(nr, F)$中的扩群，即证明定理 6.1.2. 仍先取 $V = V(n, K)$ 的标准酉基 $\mathscr{E} = \{e_i | 1 \leq i \leq n\}$ 将 V 写成行向量空间 $\mathrm{Mat}_{1\times n}K$，使 $h(x, y) = x\Delta\bar{y}^T$，矩阵 $\Delta \in \mathrm{Mat}_n K$ 具有标准形，而 $V(n, K)$上相应的内积 $f(x,y) = xH\bar{y}^T$，$H = \Delta + \rho\bar{\Delta}^T$. 于是 N 在基 $\mathscr{E}$ 下被写成矩阵群 $\mathrm{U}'(n, K, \Delta, L) \subset \mathrm{Mat}_n K$，通过右乘作用于 $\mathrm{Mat}_{1\times n}K$ 上. 进一步写 $K \subset R = \mathrm{Mat}_r F$，则 $N < \mathrm{GL}(n, K)$ 成为 $\mathrm{GL}(n, R) = \mathrm{GL}(nr, F)$ 的子群. 我们假定 $N < X \leq \mathrm{GL}(n, R)$ 且 $X \not\leq \Gamma = \mathrm{GL}(n, K) \rtimes \mathrm{Cal}(K/F)$，并且 $X \cap \Gamma \trianglerighteq N$. 我们设法在这样的假定下找到一个 $N_E = \mathrm{SL}(nd, E)$ 或 $\mathrm{U}'(nd, E, \Delta_E, L_E)$使 $N < N_E \leq X$ 且 $K \supsetneqq E \supseteq F$，即可完成定理的证明.

$N = \Omega^+(4, 4)$ 和 $N = \Omega^+(4, 9)$ 这两个特别情形下的证明

需要专门的繁琐的推理，在此从略. 因此，在下面将假定 $N \neq \Omega^+(4, 4)$、$\Omega^+(4, 9)$.

引理 6.5.1 对满足上述假定的子群 X，一定存在 $g_1 = (A_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{GL}(n, R)\backslash\Gamma$ 使得 $g_1 N g_1^{-1} < X$，且满足：

(1) 当 $L \neq 0$ 时，$A_{1j} = 0, \forall 2 \leq j \leq n$;

(2) 当 $L = 0$ 时，$A_{1j} = A_{2j} = 0$, $\forall 3 \leq j \leq n$, 或 $A_{1j} = A_{i,\nu+1} = 0$, $\forall j \neq 1$, $i \neq \nu + 1$.

证 当 $L \neq 0$ 时记 $\tilde{r} = r$；当 $L = 0$ 时记 $\tilde{r} = 2r$. 对任意自然数 $k \leq \tilde{r}$，记

$$W_k = \{(a_1, \cdots, a_k, 0, \cdots, 0) \in \mathrm{Mat}_{1\times nr}F\},$$

并对 $k = 0$ 定义 W_0 为 $\mathrm{Mat}_{1\times nr}F$ 的零向量组成的子空间. 总可选 $g_0 \in X_{W_k}\backslash\Gamma$(即 $g_0 \in X\backslash\Gamma$ 定驻 W_k)使 $k \leq \tilde{r}$ 最大. 若 $k = \tilde{r}$，则 $g_1 = g_0$ 即为引理所需. 设 $k < \tilde{r}$，我们可推出矛盾.

我们记 $g_0 = (A_{ij})_{n\times n}, g_0^{-1} = (\tilde{A}_{ij})_{n\times n}$, $A_{ij}, \tilde{A}_{ij} \in R = \mathrm{Mat}_r F$, $\forall i$、j. 并将 g_0 的第 i 行记为 u_i.

情况 1 $L \neq 0$, 即 $N = \mathrm{TU}(n, K, \Delta, L)$.

当 $k = 0$ 时，存在 $z \in N$ 将 g_0 的第一行 u_1 送进 $Ke_\nu \oplus Ke_{2\nu}$；当 $1 \leq k < r$ 时，g_0 的前 k 行除前 k 个分量外都是 0，从而这些行向量都含于 Ke_1. 如果 $f(e_1, u_{k+1}) \neq 0$，则存在 $g \in N$ 将 e_1、u_{k+1} 分别送进 Ke_ν 和 $Ke_{2\nu}$. 如果 $f(e_1, u_{k+1}) = 0$，则存在 $g \in N$ 定驻 e_1 (从而定驻 g_0 的前 k 行)且将 g_0 的第 $(k+1)$ 行 u_{k+1} 送进 $Ke_\nu \oplus Ke_{2\nu}$. 总之，在上述所有情况下都存在 $z \in N$ 将 g_0 的前 $k+1$ 行送到子空间 $Ke_1 \oplus Ke_\nu \oplus Ke_{2\nu}$ 之中，从而 $g_0 z = (B_{ij}^{(r)})_{n\times n}$ 的块 $B_{1,\nu+1}$ 的前 $k+1$ 行都是零. 对每个 $0 \neq s \in L$，有 $T_{\nu+1,1}(s) \in N, T(s) = (g_0 z)T_{\nu+1,1}(s)(g_0 z)^{-1} \in X_{W_{k+1}}$. k 的极大性迫使 $T(s) \in \Gamma$. 由推论 5.4.4(或 6.4.2)知 $T(s) \in \mathrm{GL}(n, K)$，再由推论 5.6.2 知存在 $z_1 \in N$，使 $g_1 = z_1 g_0 z = (C_{ij}^{(r)})_{n\times n} \in X\backslash\Gamma$ 使 $C_{1j} = 0, \forall j \geq 2$, g_1 定驻 $Ke_1 = W_r$，与 $k < r$ 的最大性相矛盾，如所欲证.

情况 2 $N = \Omega(n, K, \Delta)$，但略去 $N = \Omega^+(4, 4)$ 或 $\Omega^+(4,$

9）的情形.

情况 2.1 $k \le r$，且存在 $z \in N$ 将 g_0 的前 $k+1$ 行送进子空间 $\bigoplus_{i \ne 2, \nu+2} Ke_i$.

这包括了下列三种情形：

(1) $k = 0$，此时存在 $z \in N$ 将 g_0 的第一行送进 $Ke_1 \oplus Ke_{\nu+1}$.

(2) $1 \le k \le r$ 且 $\nu \ge 3$，此时存在 $z \in N$ 固定 e_1 且将 g_0 的第 $(k+1)$ 行 u_{k+1} 送进 $Ke_1 \oplus Ke_3 \oplus Ke_{\nu+3}$.

(3) $1 \le k \le r$ 且 $f(e_1, u_{k+1}) \ne 0$，此时存在 $z \in N$ 固定 e_1 且将 u_{k+1} 送进 $Ke_1 \oplus Ke_{\nu+1}$.

在上述情形下，$g_0 z = (B_{ij}^{(r)})_{n \times n} \in X$ 的前 $k+1$ 行都含于 $\bigoplus_{i \ne 2, \nu+2} Ke_i$，从而 $g_0 z$ 的块 B_{12}、$B_{1,\nu+2}$ 的前 $(k+1)$ 行都是零. 对任一 $\pm 1 \ne \lambda \in K^{*2}$，有

$$\Lambda_2(\lambda) = \mathrm{diag}(I^{(r)}, \lambda^{(r)}, I^{((\nu-1)r)}, \lambda^{-1}, I^{((n-\nu-2)r)}) \in N,$$

从而 $\Lambda = (g_0 z)\Lambda_2(\lambda)(g_0 z)^{-1} \in X_{W_{k+1}}$. k 的最大性迫使 $\Lambda \in \Gamma$. 存在置换阵 $P_0 = P_{12} P_{\nu+1,\nu+2} \in N$ 将引理 6.4.3 所说的 $\Lambda_1(\lambda) = \mathrm{diag}(\lambda^{(r)}, I^{((\nu-1)r)}, \lambda^{-1}, I^{((n-\nu-2)r)}) \in N$ 共轭到 $\Lambda_2(\lambda)$，即 $\Lambda_2(\lambda) = P_0 \Lambda_1(\lambda) P_0^{-1}$. 于是 $\Lambda = g_2 \Lambda_1(\lambda) g_2^{-1} \in \Gamma$ 对 $g_2 = g_0 z P_0 \in X \backslash \Gamma$ 成立. 由引理 6.4.3 知，在 $N \ne \Omega^+(4, 4)$、$\Omega^+(4, 9)$ 的假定之下，总存在 $g_1 = (C_{ij})_{n \times n} \in \mathrm{GL}(n, R) \backslash \Gamma$ 使 $g_1 N g_1^{-1} < Y$，且 $C_{ij} = 0$，$\forall i \in \{1, \nu+1\}, j \notin \{1, \nu+1\}$. 恰如所需.

情况 2.2 其余情形：$k \ge r+1$，或 $1 \le k \le r$，$\nu = 2$ 且 $f(e_1, u_{k+1}) = 0$.

对每个 $\theta \in K^*$，取正交二平延

$$T(\theta) = T_{\nu+1,2}(\theta) T_{\nu+2,1}(-\theta) \in N,$$

并考虑 $g(\theta) = g_0 T(\theta) g_0^{-1} \in X$. 注意 $g(\theta) - I = (C_{ij}^{(r)})_{n \times n}$ 的块 $C_{ij} = -A_{i,\nu+2}\theta \widetilde{A}_{1j} + A_{i,\nu+1}\theta \widetilde{A}_{2j}$. 特别地

$$\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & \cdots & C_{2n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{1,\nu+1} & A_{1,\nu+2} \\ A_{2,\nu+1} & A_{2,\nu+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -\theta \\ \theta & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \cdots & \tilde{A}_{1n} \\ \tilde{A}_{21} & \cdots & \tilde{A}_{2n} \end{pmatrix}.$$

由于 $g_0 \in X_{W_k}$，$\begin{pmatrix} A_{1,\nu+1} & A_{1,\nu+2} \\ A_{2,\nu+1} & A_{2,\nu+2} \end{pmatrix}$ 的前 k 行为零，从而 $\begin{pmatrix} C_{1j} \\ C_{2j} \end{pmatrix}$ $(1 \leq j \leq n)$ 的前 k 行全都为零. 即 $g(\theta)(\forall \theta \in K)$ 将 W_k 中的向量全部固定不动. 如能选 $\theta \in K^*$ 使 $g(\theta)$ 定驻 $X_{W_{k+1}}$，则 k 的最大性迫使 $g(\theta) \in \Gamma$. 如能进一步使 $g(\theta) \in \mathrm{GL}(n, K)$，则可用引理 5.6.1 及推论 5.6.2 得出所需的结论.

当 $k \geq r+1$ 时，$(C_{11} \quad \cdots \quad C_{1n})$ 等于零，$(C_{21} \quad \cdots \quad C_{2n})$ 的前 $k-r$ 行也都等于零. 在此可选 $\theta_0 \in K^*$ 将 $A_{2,\nu+1}$ 的第 $(k-r+1)$ 行 $\vec{a} \in \vec{K} = \mathrm{Mat}_{1\times r}F$ 送到

$$\vec{a}\theta_0 = (*, 0, \cdots, 0),$$

从而 $(-A_{2,\nu+2}\theta_0 \quad A_{2,\nu+1}\theta_0)$ 的第 $k+1-r$ 行的最后 $r-1$ 个分量全为 0. $g(\theta_0) - I$ 的第 $(k+1)$ 行也就是

$$(C_{21} \quad \cdots \quad C_{2n}) = (-A_{2,\nu+2}\theta_0 \quad A_{2,\nu+1}\theta_0) \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \cdots & \tilde{A}_{1n} \\ \tilde{A}_{21} & \cdots & \tilde{A}_{2n} \end{pmatrix}$$

的第 $(k+1-r)$ 行，是 $g_0^{-1} \in X_{W_k}$ 的前 $r+1$ 行的 F-线性组合，因而含于 W_k. 这说明 $g(\theta_0) \in W_{W_{k+1}}$. 由 k 的最大性得 $g(\theta_0) \in \Gamma$. $g(\theta_0)$ 的第 $(1,1)$ 块等于 $I \in K^*$，故 $g(\theta_0) \in \mathrm{GL}(n, K)$. 由 $\mathrm{rank}_K(T(\theta_0) - I) = 2$ 知 $\mathrm{rank}_K(g(\theta_0) - I) = 2$. $U = \mathrm{Im}(g(\theta_0) - I)$ 是 2 维 K-空间，等于

$$(\mathrm{Im}(T_0(\theta_0) - I))g_0^{-1} = (Ke_1 \oplus Ke_2)g_0^{-1}.$$

即 U 等于 g_0^{-1} 的前 $2r$ 行所张成的 F 空间. 特别，U 包含 g_0^{-1} 的前 k 行. 由 g_0^{-1} 定驻 W_k 知 g_0^{-1} 的前 k 行在 F 上张成 $W_k \subset U$. 再由 $k \geq r+1$ 知 W_k 在 K 上张成 $Ke_1 \oplus Ke_2 \subseteq U$. 这迫使 $U = Ke_1 \oplus Ke_2$，即 $(Ke_1 \oplus Ke_2)\, g_0^{-1} = Ke_1 \oplus Ke_2$，$g_0^{-1}$ 定驻 $W_{2r} = Ke_1 \oplus Ke_2$，从而 g_0 定驻 W_{2r}，$k = 2r = \bar{r}$，如所欲证.

下面考虑剩下的情形 $1 \leq k \leq r$, $\nu = 2$ 且 $f(e_1, u_{k+1}) = 0$. 当 $k \leq r-1$ 时, $f(e_1, u_{k+1}) = 0$ 意味着 g_0 的块 A_{13}的前 $k+1$ 行都是零. 此时设 $\vec{\alpha} \in \mathrm{Mat}_{1\times r}F(\alpha \in K)$ 是 A_{14}的第 $(k+1)$ 行,记 $U = \{\theta \in K \mid \vec{\alpha}\,\theta$ 的最后 $r-k$ 个分量全为 $0\}$. 当 $k = r$ 时 $f(e_1, u_{k+1}) = 0$ 意味着 A_{23}的第一行为零,此时我们取 $U = K$. 在两种情形下 U 都是 F 上非零的向量空间,且 $\dim_F U = k$ (当 $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$)或 $\dim_F U = \dim_F K = r$ (当 $\vec{\alpha} = \vec{0}$). 任取 $0 \neq \theta_0 \in U$, 则

$$E = \theta_0^{-1}U = \{\theta_0^{-1}\theta \mid \theta \in U\} \supseteq \{0, 1\}.$$

容易验证 $g(\theta) = g_0 T(\theta) g_0^{-1} \in X_{W_{k+1}}$ 对所有的 $\theta \in U$ 成立,由 k 的最大性得 $g(\theta) \in \Gamma$. 即 $g(\theta_0 a) \in \Gamma$ 对所有的 $a \in E$ 成立. 特别 $g(\theta_0 a) \in \Gamma$ 对所有的 $a \in F$ 成立. 当 $F \neq F_2$ 时,由引理 6.4.2 知 $g(\theta_0 a) \in \mathrm{GL}(n, K)$ 对所有的 $a \in F$ 成立,再用引理 5.6.1 和推论5.6.2即可得到所需的结论. 当 $F = F_2$ 时,由于已有 $L = 0$, 当 $|U| > 2$ 从而 $E \supsetneqq \{0, 1\}$ 时,仍可由引理 6.4.2、5.6.1 和推论 5.6.2得到所需结论.

现在剩下的情形是 $|U| = 2$. 这仅当 $F = F_2$, $k = 1$, 且 $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ 时才有可能. 此时 $U = \{0, \theta_0\}$. 如果 $g(\theta_0) \in \mathrm{GL}(n, K)$, 则 $g(\theta_0) - I = (C_{ij})_{n\times n}$ 的块 $C_{ij} \in K$, $\forall i, j$. 但

$$(C_{11} \quad \cdots \quad C_{1n}) = (A_{14} \quad A_{13}) \begin{pmatrix} \theta_0 & O \\ O & \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \cdots & \tilde{A}_{1n} \\ \tilde{A}_{21} & \cdots & \tilde{A}_{2n} \end{pmatrix}. \tag{6.5.1}$$

由 $k = 1$ 知$(A_{14} \quad A_{13})$的第一行为零,从而$(C_{11}, \cdots, C_{1n})$的第一行为零, $C_{1j} \in K (1 \leq j \leq n)$ 迫使 $C_{1j} = 0$. 又(6.5.1)式右端最后一个矩阵由 $g_1^{-1} \in \mathrm{GL}(nr, F)$ 的前 $2r$ 行组成,在 F 上线性无关. 而矩阵 $\begin{pmatrix} \theta_0 & O \\ O & \theta_0 \end{pmatrix}$ 可逆,故$(C_{11}, \cdots, C_{1n})$为零迫使 $A_{14} = A_{13} = 0$. 从而

A_{14}的第二行 $\vec{\alpha}=\vec{0}$，产生矛盾. 故 $g(\theta_0)\in\Gamma\backslash \mathrm{GL}(n, K)$，引理6.4.1的例外情形成立. 即 $n=4, g(\theta_0)=P^{-1}\sigma P=(P^{-1}P^{\sigma^{-1}})\sigma\in \mathrm{GL}(n, K)\sigma$，$\sigma$ 是 $\mathrm{Gal}K/F$ 中唯一的二阶元. 这也迫使 r 是偶数，σ 的固定子域 $K_\sigma=\{\theta\in K|\theta^\sigma=\theta\}=F_{2^{r/2}}$，$[K:K_\sigma]=2$. 此时 $g(\theta_0)\in\Gamma$ 的块全具有形式 $\theta\alpha(\theta\in K)$. 由 $g(\theta_0)$的第$(1, j)$块 $C_{1j}(2\le j\le n)$ 的第一行为零知 $C_{1j}=0$，而由第$(1, 1)$块 $I+C_{11}$ 的第一行为$(1, 0, \cdots, 0)$知 $I+C_{11}=\sigma$. 可重新选取 K/F 的基 $\{\varepsilon_j|1\le j\le r\}$，使 $\{\varepsilon_j|1\le j\le r/2\}$ 是 K_σ/F 的基，全被 σ 固定不动. 这样就化成了 C_{11}的前 $r/2$ 行为零的情形. (6.5.1)式左端的 $(C_{11},\cdots,C_{1n})$的前 $r/2$ 行为零，从而(A_{14},A_{13})的前 $r/2$ 行为零. 但已假设 A_{14}的第二行不为零. 这迫使 $r=2$，即 $N=\Omega^+(4, 4)$. 这是我们预先约定不在这里讨论的情形. 至此即完成了引理的证明. ▌

定理 6.1.2 的证明

设 $N=\mathrm{U}'(n, K, h, L)\le X\le \mathrm{GL}(nr, F)$. 取 K 与 F 之间一个尽可能小的子体 E，使 $N_E=\mathrm{U}'(nd, E, h_E, L_E)\le X$ 对某个 L_E 成立，这里 $d=\dim_E K$. 并且选取 L_E 使之最大，不妨用 N_E 代替 N，使如下的假设成立：

假设 1　$N\le \mathrm{U}'(nd, E, h_E, L_E)\le X$ 当且仅当 $E=K$ (从而 $d=1$)，且 $L_E=L$.

设与 h 相伴的内积是 $f=h+\rho\bar{h}$，从而 $N\le \mathrm{U}(n, K, f)$. 如果 $X_K=X\cap \mathrm{GL}(n, K)$ 不正规化 N，则当 $X_K\not\le \mathrm{GU}(n, K, f)$ 时，由定理 4.1.1 知 $X\ge \mathrm{SL}(n, K)$，这样的 X 已经在定理 6.1.1 中定出，其证明见 §6.2. 而在其余情形下 $X_K\le \mathrm{GU}(n, K, f)$，由定理 4.1.1 知存在 $L_1\supsetneqq L$ 使 $X_K\trianglerighteq \mathrm{U}'(n, K, h, L_1)$，这与 L 的最大性相矛盾. 因此，还有下面的假设成立：

假设 2　$X\cap \mathrm{GL}(n, K)$ 正规化 N，从而含于 $\mathrm{GU}(n, K, h, L)$.

如果 X 含于 $\Gamma=\mathrm{GL}(n, K)\rtimes \mathrm{Gal}K/F$，则 $X\trianglerighteq N$，定理已成

立. 若不然,我们要找出 N 在 X 中的一个扩群 $N_E = \mathrm{U}'(nd, E, h_E, L_E)$, 使之引出与原假设矛盾.

为了利用第 5 章所准备的各个引理,我们按照 § 5.1 所说方式将群 N 和 X 矩阵化. 即:取 K 的左 F-基 $\mathscr{Z} = \{\zeta_1, \cdots, \zeta_r\}$, 将每个 $\alpha \in K$ 在 K 上引起的右乘变换 $\alpha_R: \theta \mapsto \theta\alpha$ 在这组基下写成矩阵 $\alpha^{(r)} \in \mathrm{Mat}_r F$, 用来代表 α. 这就将 K 嵌入 $R = \mathrm{Mat}_r F$ 中成为子体. 再取 $V = V(n, K)$ 的标准酉基 $\mathscr{E}_1 = \{e_1, \cdots, e_n\}$, 将 N 写成矩阵群 $\mathrm{U}'(n, K, \Delta, L)$, 并且按上述嵌入映射 $K \to R$ 将 N 看成 $\mathrm{GL}(n, R) = \mathrm{GL}(nr, F)$ 的子群. 构造 V 的 F-基 $\mathscr{E} = \mathscr{Z}\mathscr{E}_1 = \{e_{ij} = \zeta_j e_i \mid i, j\}$, 并在这组基下将 V 写成 $\mathrm{Mat}_{1\times nr} F$, 将 $\mathrm{GL}(nr, F)$ 中的元素写成 F 上 nr 阶方阵. 则每个 $g \in N$ 在 F 上的矩阵由它在 K 上的矩阵 $(\theta_{ij})_{n\times n}$ 中将每个 $\theta_{ij} \in K$ 换成相应的矩阵 $\theta_{ij}^{(r)} \in \mathrm{Mat}_r F$ 而得到.

由引理 6.5.1, 存在 $g_1 = (A_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{GL}(n, R) \backslash \Gamma$ 使得 $g_1 N g_1^{-1} < X$, 且满足:

(1) 当 $L \neq 0$ 时, $A_{1j} = 0, \forall 2 \leq j \leq n$;

(2) 当 $L = 0$ 时, $A_{1j} = A_{2j} = 0, \forall 3 \leq j \leq n$, 或 $A_{1j} = A_{i,\nu+1} = 0, \forall j \neq 1, i \neq \nu + 1$.

记 $Y = \langle N, g_1 N g_1^{-1} \rangle$, 则 $Y \leq X$. N 和 g_1 符合引理 5.5.1 的要求. 并且由于 K 是 F 的扩体, 且 $r = \dim_F K \geq 2$, $|K| \geq |F|^2$, $K \neq F_2$, 按引理 5.5.1 的结论, 在 Y 中可找到一个元素 $T = T_{21}(C_0) T_{\nu+1,\nu+2}(\rho B_0) \in \mathrm{GL}(n, R)$, 使 B_0、$C_0 \notin K$, 且 $B_0 = C_0$ 或 $B_0 + C_0 \in L$ 成立. 我们希望在此基础上利用引理 5.7.3. 为此, 还需计算 $\mathrm{SL}(\nu, K)$ 与 $T_{21}(C_0)$ 生成的群 Z_0. 由定理 6.1.1 知, 当 $\mathrm{SL}(\nu, K) \neq \mathrm{SL}(2, 4)$ 时, 存在 K 的真子体 $E \supseteq F$, $d = \dim_E K \geq 2$, 使 $Z_0 = \mathrm{SL}(\nu d, E)$ 或 $Z_0 = \mathrm{Sp}(2d, E)$ ($\nu = 2$ 且 K 是域). 当 $\mathrm{SL}(\nu, K) = \mathrm{SL}(2, 4)$ 时, 取 $\theta \in K = F_4$ 使 $\theta \in \mathrm{Mat}_2 F$ 的第一行与 C_0 相同, 则 $T_{21}(C_0) T_{21}(\theta) = T_{21}(C_1) \in Z_0$, 其中 $C_1 = C_0 + \theta$ 的第一行为零. 但由 $C_0 \notin K$ 知 $C_1 \neq 0$. 故 $\mathrm{rank}_F C_1 = 1$, $T_{21}(C_1) \in Z_0$ 是 $\mathrm{SL}(4, 2)$ 中的平延, 于是定理 6.1.1 的结论(iii)不可能成

立，Z_0 仍是 SL(4, 2)或 Sp(4, 2).

由于 $B_0 = C_0$ 或 $B_0 + C_0 \in L$，群 $\langle \mathrm{SL}(\nu, K), T_{12}(B_0) \rangle$ 也等于 $Z_0 = \mathrm{SL}(\nu d, E)$ 或 $\mathrm{Sp}(2d, E)$. N 与 T 都含于 $\mathrm{SL}(nd, E)$，它们生成的群 Y 也就含于 $\mathrm{SL}(nd, E)$. 用 E 代替 F，从而 d 代替 r，则引理 5.7.3 所要求的条件全部满足了. 于是由引理 5.7.3 知，下面的结论之一成立：

(a) Y 包含某个 $N_E = \mathrm{U}'(nd, E, \Delta_E, L_E)$；

(b) $N = \mathrm{SU}(4, K, H)$，$d = 2$，K 是 E 的二次扩域，$J \neq 1$，$K_J = E$，$H = \Delta - \Delta^T$，Y 包含 $\Omega_7(E)$，$\Omega_7(E)$ 是 $V(8, E, Q_E)$ 的一个非奇异向量在 $G = \Omega(8, E, Q_E) > N$ 中的稳定子群 $\Omega(7, E)$ 在 G 的某个外自同构下的不可约象.

(c) $N = \Omega(4, K, \Delta, E)$，$d = 2$，$K$ 是特征 2 的非完全域，$K^2 \subseteq E$，Y 包含 $G = \Omega^+(8, E)$ 的不可约子群 $\Omega_7(E)$，$\Omega_7(E)$ 仍如(b)所描述.

如果上述结论(a)成立，就导致与我们的假设 1 相矛盾.

剩下只须考虑上述(b)或(c)成立的情况. 即 $X \geq Y \geq \Omega_7(E)$ 的情形. 如果 X 正规化 $\Omega_7(E)$，则定理 6.1.2 结论(iii)成立. 设 X 不正规化 $\Omega_7(E)$. 我们证明这必然导致 X 包含 $\Omega(8, E, Q_E)$，仍导致与假设 1 相矛盾. 此证明比较长，我们把它安排在下一节，不感兴趣的读者可以不看，直接接受它的结论就行了. ▌

§6.6　Ω_7 的扩群

首先重新叙述 Ω_7 的定义及其一些有用的性质.

设 E 是任意域，$G = \Omega^+(8, E) = \Omega(8, E, Q)$ 作用于 $V = V(8, E, Q)$ 上，其中 $\nu(Q) = 4$. 在 §2.3 中介绍了 G 的旋量表示. 选取 V 的基 $\{u_1, \cdots, u_4, v_1, \cdots, v_4\}$ 将 V 写成行向量空间，使 $Q(x) = x\Delta x'$，Δ 具有标准形式 $\begin{bmatrix} O & I^{(4)} \\ O & O \end{bmatrix}$. 设 C 是 (V, Q) 生成的 Clifford 代数，eC^+ 是 $e = u_1u_2u_3u_4 \in C^+$ 在 C^+ 中生成的右理想，是

E 上的 8 维空间. 将 G 按 §2.3 所介绍的方式作用于 eC^+ 上,就得到表示 ϕ: $G \to \mathrm{SL}(eC^+) = \mathrm{SL}(8, E)$, ϕ 的象是作用于 eC^+ 上的一个 $\Omega^+(8, E)$,因而 ϕ 可以看作 $\Omega^+(8, E)$ 的自同构. 具体来说,将 G 的每个根元素 $t_{u,w}(Q(u) = 0 = (u, w))$ 对应于 C 中的乘法可逆元 $1 + wu$,它在 eC^+ 上的右乘作用 $e\alpha \mapsto e\alpha(1+wu)$ 是一个 E-线性变换,就等于 $\phi(t_{u,w})$. 由于所有的根元素生成 G,这也就可以得到 G 中所有元素在 ϕ 下的象. 取 eC^+ 的 E-基

$$B = \{e, ev_3v_4; ev_1v_3, ev_1v_4;$$

$$ev_1v_2, ev_1v_2v_3v_4; ev_2v_3, ev_2v_4\},$$

将 eC^+ 写成行向量空间 $\mathrm{Mat}_{1\times 8}E$,同时将 ϕG 的元素写成矩阵,则 $G = \Omega(8, E, \Delta)$ 被同构地映到

$$\phi(G) = \Omega(8, E, \Delta_1),$$

其中

$$\Delta_1 = \Delta(I^{(4)} \otimes H_0) = \begin{pmatrix} O & \mathrm{diag}(H_0, H_0) \\ O & O \end{pmatrix},$$

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

非奇异向量 $w = u_3 + v_3$ 在 G 中的定驻子群 G_w 也就是作用于 V 的 7 维正则子空间 $w^\perp$ 上的 $\Omega(w^\perp) = \Omega(7, E, Q_1)$, Q_1 是 Q 在 $w^\perp$ 上的限制,具有极大 Witt 指数 3. G_w 当然是 G 的可约子群,而且在定理 3.6.3 和 3.6.4 中已经证明它的正规化子是 G 的极大子群. $\phi(G_w)$ 的正规化子当然仍是 G 的极大子群,但它却是 G 的不可约子群. 我们将 $\phi(G_w)$ 记作 Ω_7. 或为了强调它是 E 上的群,记作 $\Omega_7(E)$.

在 §2.3 中,对 $\mathrm{char}E = 2$ 的情形写出了 Ω_7 的矩阵形式. 这里不难对具有任意特征的域 E 写出 Ω_7 的矩阵形式如下:

Ω_7 可由下面的矩阵生成:

$$T_{ij}(B)T_{j+2,\,i\pm2}(\mp\overline{B})(1\leq j\leq 2,\ i\notin\{j,\ j+2\},$$

其中

$$B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & a\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_2E,\ \overline{B}=\begin{pmatrix}a & -b\\ -c & a\end{pmatrix},$$

a、b、$c\in E$ 可以任意取值.

上述全体 B 的集合可以写成 $U=M^+(2,\ E)\Lambda_0^{-1}$，其中 $M^+(2,\ E)$ 是 E 上全体二阶对称方阵的集合，$\Lambda_0=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 是可逆对称方阵. 而 $\overline{B}=H_0B'H_0^{-1}$，其中 $H_0=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ 是交错方阵. 这样，Ω_7 就可按引理 5.7.3 的方式重新描述为：Ω_7 由 $N_1=\mathrm{Sp}(4,\ E,\ H_1)\otimes I^{(2)}$ 和所有的 $\mathrm{diag}(P,\ P^\sigma)$ 生成，其中 $H_1=H_0\otimes I^{(2)}$ 是具有标准形式的 4 阶交错方阵，P 取遍 $Z_1=\mathrm{Sp}(4,\ E,\ H_0\otimes\Lambda_0)$，

$$P^\sigma=(I^{(2)}\otimes H_0)(P')^{-1}(I^{(2)}\otimes H_0)^{-1}.$$

而且，当 P 取遍 $\mathrm{GSp}(4,\ E,\ H_0\otimes\Lambda_0)$ 时，所有的 $\mathrm{diag}(P,\ P^\sigma)$ 也都含于 Ω_7.

由 $\Lambda_0H_0\Lambda'_0=\gamma H_0$ 对 $\gamma=\det\Lambda_0$ 成立，故 $H_0(\Lambda'_0)^{-1}H_0^{-1}=\gamma^{-1}\Lambda_0$，$\Lambda=\mathrm{diag}(\Lambda_0,\ I^{(2)},\ \gamma^{-1}\Lambda_0,\ I^{(2)})\in O(8,\ E,\ \Delta_1)$. Λ 在 $\mathrm{GL}(8,E)$ 上的共轭作用 $I_\Lambda:A\mapsto\Lambda^{-1}A\Lambda$ 将 Ω_7 的扩群 $\Omega(8,\ E,\ \Delta_1)$ 和子群 $N_1=\mathrm{Sp}(4,\ E,\ H_1)\otimes I^{(2)}$ 都不变，将 Ω_7 同构地映到 $\tilde{\Omega}_7=\Lambda^{-1}\Omega_7\Lambda$. 而 $\mathrm{diag}(P,\ P^*)$ $(P\in\mathrm{Sp}(4,\ E,\ H_0\otimes\Lambda_0))$ 被变为 $\mathrm{diag}(A,\ A^*)(A\in\mathrm{Sp}(4,\ E,\ H_0\otimes I^{(2)})$，特别，$\Omega_7$ 的生成元 $T_{ij}(B)T_{j+2,\,i\pm2}(\mp\overline{B})(1\leq j\leq 2,\ i\notin\{j,\ j+2\},B\in M^+(2,\ E)\Lambda_0^{-1})$ 被变为 $\tilde{\Omega}_7$ 的生成元 $T_{ij}(B)T_{j+2,\,i\pm2}(\mp\overline{B})(1\leq j\leq 2,\ i\notin\{j,\ j+2\},\ B\in M^+(2,\ E))$. 用 $\tilde{\Omega}_7$ 代替 Ω_7，就化为了 $\Lambda_0=I$ 的情形. 反过来，也可以化为 Λ_0 取 $\mathrm{GL}(2,\ E)$ 中任意对称方阵的情形.

由此可见，Ω_7 的前述定义中的 Λ_0 可以换成 E 上任意 2 阶可逆对称方阵. 但交错方阵 $H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 可以永不改变. 任意给定了一个 Λ_0，就得到一个相应的 $U = M^+(2, E)\Lambda_0^{-1}$，而所有的 $T_{ij}(B)T_{j+2, i\pm 2}(\mp \overline{B})(1 \leq j \leq 2, i \notin \{j, j+2\}, B \in U)$ 就生成一个相应的 Ω_7，其中 $\overline{B} = H_0 B' H_0^{-1}$ 的定义与 Λ_0 的选取无关. 这样的 Ω_7 也可以由 $N_1 = \mathrm{Sp}(4, E, H_1)$ 和全体 $\mathrm{diag}(P, P^\sigma)$ $(P \in \mathrm{GSp}(4, E, H_0 \otimes \Lambda_0))$ 生成，其中 $P^\sigma = H_0(P')^{-1}H_0^{-1}$. 当 Λ_0 取不同的可逆对称方阵时，所得到的不同的 Ω_7 在正交群 $O(8, E, \Delta_1)$ 中相互共轭. 因此，在讨论 Ω_7 的扩群时，可以任意选取 Λ_0.

例如，本章 §6.5 中 $\Omega_7(E)$ 是作为 $N = \mathrm{SU}(4, K, H)$ 或 $\Omega(4, K, \Delta, E)$ 的扩群出现的，其中 K 是 E 的二次扩域. 取 K 在 E 上的基 $\{1, \omega\}$，在 $N = \mathrm{SU}(4, K, H)$ 的情况下选取 ω 为 E 上不可约多项式 $f(x) = x^2 - x + \delta$ 的零点，则 K 嵌入 $\mathrm{Mat}_2 E$ 成为

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b\delta & a+b \end{pmatrix} \middle| a, b \in E \right\} \subset M^+(2, E)\Lambda_0^{-1},$$

其中 $\Lambda_0 = \mathrm{diag}(1, -\delta)$. 易见 $\mathrm{SU}(4, K, H)$ 含于这个 Λ_0 所对应的 $\Omega_7(E)$. 而在 $N = \Omega(4, K, \Delta, E)$ 的情形下，K 是特征 2 的非完全域，选 ω 为不可约多项式 $f(x) = x^2 + \delta$ 的零点，其中 δ 是 E^* 中的非平方元，则

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b\delta & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in E \right\} \subset M^+(2, E)\Lambda_0^{-1},$$

Λ_0 为 $\mathrm{diag}(1, \delta)$. $\Omega(4, E, \Delta, E)$ 同样含于 Λ_0 所对应的 $\Omega_7(E)$.

为叙述方便起见，以下在研究 Ω_7 的扩群时，将一律假设已经取 $\Lambda_0 = I$. 于是 Ω_7 由

$$N_1 = \mathrm{Sp}(4, F, H_1) \otimes I$$

和所有的 $\mathrm{diag}(P, P^\sigma)(P \in \mathrm{Sp}(4, E, H_1))$ 生成，而 Ω_7 的生成元

$T_{ij}(B)T_{j+2,i\pm 2}(\mp \overline{B})$ 中 B 的取值范围为全体对称方阵.

对每个 $P\in \mathrm{GL}(2, E)$,记

$$P^* = (P')^{-1}, \mu(P) = \mathrm{diag}(P, P^*, \mathrm{diag}(P, P^*)^\sigma),$$

则由 $\mathrm{diag}(P, P^*)\in \mathrm{Sp}(4, E, H_0\otimes I^{(2)})$知 $\mu(P)\in \Omega_7(E)$. 特别当 $P\in \mathrm{SL}(2, E) = \mathrm{Sp}(2, E, H_0)$ 时 $(\mathrm{diag}(P, P^*))^\sigma = \mathrm{diag}(P, P^*)$, 因而 $\mu(P) = \mathrm{diag}(P, P^*, P, P^*)\in \Omega_7(E)$.

我们还要用到 $\Omega_7(E)$的如下性质:

引理 6.6.1　设矩阵群 $G = \Omega(8, E, \Delta_1)$ 和 $M = \Omega_7 < G$ 如上所述. G 通过右乘作用于 $V = \mathrm{Mat}_{1\times 8}E$ 上,成为关于二次型 $Q(x) = x\Delta_1 x'$ 的 $\Omega(V, Q)$. 则如下结论成立:

(1) M 在 $V(8, E, Q_E)$的非零奇异向量集合上可迁;

(2) $G = \Omega(8, E, Q_E)$ 的两个正交二平延如果都含于 M,则它们在 M 中相互共轭;

(3) 如果 $M < X \leq \mathrm{GO}(8, E, Q_E)$, 且 X 不正规化 M,则 $X\geq G$;

(4) 如果 $g\in \Omega_7(E)$ 具有准下三角形式 $g = (A_{ij})_{2\times 2}$, 其中 $A_{ij}\in \mathrm{Mat}_4 E$, $A_{12} = 0$, 则 $A_{11}\in \mathrm{GSp}(4, E, H_1)$, 而 $A_{22} = A_{11}^\sigma = H_0(A_{11}')^{-1}H_0^{-1}$.

证明　设 $\{e_i | 1\leq i\leq 8\}$ 是 V 的自然基.

(1) 只须证明:对任一奇异向量 $u = (a_1, \cdots, a_8)$, 存在 $z\in M$ 将 $u\mapsto e_1$.

如果 $(a_1, \cdots, a_4) = (0, \cdots, 0)$, 则 M 的子群 $M_1 = \mathrm{Sp}(4, E, H_1)\otimes I^{(2)}$ 中有置换矩阵 z_1 将 $u\mapsto uz_1 = (a_5, \cdots, a_8, 0, \cdots, 0)$. 存在辛方阵 $P\in \mathrm{Sp}(4, F, H_1)$将$(a_5, \cdots, a_8)\mapsto(1, 0, 0, 0)$. 于是 $z_2 = \mathrm{diag}(P, P^\sigma)\in M$ 将 $uz_1\mapsto e_1$.

设 $\alpha = (a_1, \cdots, a_4)\neq (0, \cdots, 0)$, 存在 $P\in \mathrm{Sp}(4, F, H_1)$ 将 $\alpha\mapsto(1, 0, 0, 0)$. 取 $z_1 = \mathrm{diag}(P, P^\sigma)\in M$, 则 $uz_1 = (1, 0, 0, 0, b_5, \cdots, b_8)$. 由 $Q(uz_1) = 0$ 知 $b_6 = 0$. 存在 2 阶对称方阵 B, 使它的第一行为(b_7, b_8). 取

$$z_2 = T_{13}(-b_5 I^{(2)})T_{14}(-B)T_{23}(-\overline{B}) \in M,$$

则 $uz_1z_2 = e_1$.

(2) 存在 $\widetilde{G} = \Omega^+(8, E)$ 到 G 的同构 ϕ,使 $M = \Omega_7 = \phi(\widetilde{G}_w)$, $\widetilde{G}_w$ 是某个非奇异向量 w 在 $\widetilde{G}$ 中的定驻子群. G 的正交二平延都是 $\widetilde{G}$ 的正交二平延在 ϕ 下的象. 如果 G 的两个正交二平延 T_1、T_2 同时含于 M,则 $\phi^{-1}(T_1)$、$\phi^{-1}(T_2)$ 是 $\widetilde{G}_w$ 中两个正交二平延,在 $\widetilde{G}_w$ 中共轭. 这说明 T_1、T_2 在 M 中共轭.

(3) 取 $g \in X$ 不正规化 M,则 g 将 M 中某个正交二平延 T 共轭到 $T_1 = g^{-1}Tg \notin M$. 考虑(2)中所述的同构 ϕ: $\widetilde{G} \to G$,则 $\widetilde{T}_1 = \phi^{-1}(T_1)$ 是 $\widetilde{G}_w$ 之外的正交二平延. 由定理 3.6.3 和 3.6.4 知 $\langle \widetilde{T}_1, \widetilde{G}_w \rangle = \widetilde{G}$, 从而 $\langle T_1, M \rangle = G \leq X$.

(4) 由 $g \in \Omega(8, E, \Delta_1)$ 知 $A_{22} = A_{11}^{\sigma} = H_0(A'_{11})^{-1}H_0^{-1}$.

g 与所有的 $\mathrm{diag}(P, P^{\sigma})(P \in \mathrm{GSp}(4, E, H_1))$ 生成 M 的一个子群 M_1,由准下三角阵组成. 若 $A_{11} \notin \mathrm{GSp}(4, E, H_1)$,则 A_{11} 与 $\mathrm{GSp}(4, F, H_1)$生成的子群包含 $\mathrm{SL}(4, E)$. 于是对于每个 $P \in \mathrm{SL}(4, E)$,存在一个准下三角阵 $g(P) = (B_{ij})_{2\times 2} \in M_0$ 使它的对角部分 $\mathrm{diag}(A_{11}, A_{22}) = \mathrm{diag}(P, P^{\sigma})$. 对每个 $C \in \mathrm{Mat}_4 E$,记
$T(C) = \begin{bmatrix} I & O \\ C & I \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(8, E)$ 及 $T'(C) = \begin{bmatrix} I & C \\ O & I \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(8, E)$.
记 $S = \{C \in \mathrm{Mat}_4 E \mid T(H_0 C) \in M\}$. 则由 $M < \Omega(8, E, \Delta_1)$ 知 $S \subseteq M_0(4, E)$. 当然 $S \neq 0$,且对每个 $C \in S$ 和 $P \in \mathrm{SL}(4, E)$ 有

$$g(P)T(H_0C)g(P)^{-1} = T(H_0(PCP')) \in M_1.$$

即 S 在 $\mathrm{SL}(4, E)$的相合下不变. 由引理 5.3.8 知 $S = M_0(4, E)$ 由全体 4 阶交错方阵组成. 且对任意 $C \in S$, 用 $N_1 = \mathrm{Sp}(4, F, H_1) \otimes I < M$ 中适当的置换阵对 $T(H_0C) \in M$ 作共轭,可得 $T'(H_0C) \in M$. 由引理 5.3.11 知所有的 $T(H_0C)$、$T'(H_0C)$ $(C \in M_0(4, E))$ 生成 $G = \Omega(8, E, \Delta_1)$. 但当然 G 不能含于 M,

产生矛盾. ▌

现在可以进入本节的主题,研究 $\Omega_7(E)$的扩群.

为了本章的需要,我们不仅要定出 $\Omega_7(E)$在$\mathrm{GL}(8, E)$中的扩群,而且需要定出 $\Omega_7(E)$在 $\mathrm{GL}(8r, F)$中的扩群,其中 F 是 E 的子群且 $[E:F]=r$. 为此,我们将 E 在适当的基下写成 $\mathrm{Mat}_r F$ 的不可约子体,从而将 $\mathrm{GL}(8, E)$写成 F 上的矩阵群 $\mathrm{GL}(8r, F)$.

下面的引理说明,对 $\Omega_7(E)$在 $\mathrm{GL}(8r, F)$中的扩群 X,如果 X 不正规化 Ω_7,则 $X\geq G=\Omega(8, E, \Delta_1)$. 这样,$X$ 就可由前面各节已证明的结果得出来.

引理 6.6.2 设 $\Omega_7(E)<\Omega(8, E, \Delta_1)$如上所述,$F$ 是 E 的子域且 $[E:F]=r$, 并认为 $E\subset\mathrm{Mat}_r F$. 若 $\mathrm{GL}(8r, F)$的子群 X 包含 $\Omega_7(E)$而不正规化 $\Omega_7(E)$,则 $X\geq\Omega(8, E, \Delta_1)$.

证明 记 $M=\Omega_7(E)$,$G=\Omega(8, E, \Delta_1)$. 在行向量空间 $V=\mathrm{Mat}_{1\times8}E$ 上定义二次型 $Q_E(x)=x\Delta_1 x'$, 将矩阵群 G 通过右乘作用看作(V, Q)上的 $\Omega(8, E, Q_E)$.

记M在$\mathrm{GL}(8,E)\rtimes\mathrm{Gal}\,E/F$中的正规化子为$\Gamma$. 设$\Omega_7(E)<X\leq\mathrm{GL}(8r, F)$,且 $X\not\leq\Gamma$, 需要证明的结论是 $X\geq G$.

若 $X\cap\mathrm{GO}(8, E, \Delta_1)$ 不正规化 $\Omega_7(E)$,则由引理 6.6.1(3)已经得到 $X\geq G$.

因此,以下只考虑 $X\cap\mathrm{GO}(8, E, \Delta_1)$正规化 $\Omega_7(E)$的情况.

以下将把 $\mathrm{GL}(8r, F)$中的元素写成分块形式 $(A_{ij})_{4\times4}$, 使所有的块 $A_{ij}\in\mathrm{Mat}_{2r}F$.

(6.6.2.1) *X 中存在 $g_1=(A_{ij})_{4\times4}\notin\Gamma$, 使 $A_{1j}=0$ 对 $j=2$, 3, 4 成立.*

对自然数 $k\leq 2r$, 记

$$W_k=\{(a_1, \cdots, a_k, 0, \cdots, 0)\in\mathrm{Mat}_{1\times8r}F\}$$

为 $\mathrm{Mat}_{1\times8r}F$ 的前 k 个自然基向量张成的 F-空间. 并设 X_{W_k} 为 W_k 在 X 中的稳定子群. 并对 $k=0$ 定义 $W_k=0$. 则可选 $g_1\in X_{W_k}\backslash\Gamma$ 使非负整数 $k\leq 2r$ 取最大值,需要证明的是 $k=2r$.

若不然，设 $k < 2r$. 对每个自然数 i，将 g_1 的第 i 行记为 u_i. 并将 $A_{1j}(1 \leq j \leq 4)$ 的第 i 行记作 u_{ij}. 则 $u_{ij} \in \mathrm{Mat}_{1\times 2r}F$，$u_i = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4})$.

由于 g_1 定驻 W_k，当 $1 \leq i \leq k$ 时，u_{i2}、u_{i3}、u_{i4}都为零. 存在辛方阵 $P \in \mathrm{Sp}(4, E, H_1)$ 使 $(u_{k+1,3}, u_{k+1,4})P$ 的前 $2r$ 个 F-分量全为零. 取 $z = \mathrm{diag}(P^{\sigma-1}, P) \in M$，则 $gz = (B_{ij})_{4\times 4} \in X\backslash\Gamma$ 中 B_{13} 的前 $k+1$ 行全为零. 于是对每个 $s \in E^*$ 有 $g_2(s) = (g_1 z)T_{31}(sI) \cdot (g_1 z)^{-1} \in X_{W_{k+1}}$. k 的最大性迫使所有的 $g_2(s) \in \Gamma$. 但 $\mathrm{rank}_E(T_{31}(sI) - I) = 2 < 8/2$. 由引理 6.4.1 知 $g_2(s) \in \mathrm{GL}(8, E)$，从而 $g_2(s) \in \Gamma \cap \mathrm{GL}(8, E) = \mathrm{GO}(8, E, \Delta_1)$. 按我们的假定，$g_2(s)$正规化 $\Omega_7(E)$，否则，X 已经包含 G. 又 $g_2(s)$是幺幂元，由引理 4.2.3(2)知 $g_2(s) \in O(8, E, \Delta_1)$. 由 $(g_2(s) - I)^2 = 0$ 及 $\mathrm{rank}_E(g_2(s) - I) = 2$ 知$g_2(s)$是正交二平延，或在 $\mathrm{char}E = 2$ 的情况下是两个相互交换的正交平延的乘积. 若有一个 $s \in E^*$ 使 $g_2(s)$ 是正交二平延，则 $g_2(s) \in M$. 由引理 6.6.1(2)知存在 $z_1 \in M$ 将 $g_2(s)$共轭到 M 的正交二平延 $T_{31}(I) \in M$，即

$$T_{31}(I) = z_1 g_2(s) z_1^{-1} = (z_1 g_1 z)T_{31}(sI)(z_1 g_1 z)^{-1}.$$

这迫使 $g_3 = z_1 g_1 z = (C_{ij})_{4\times 4} \in X\backslash\Gamma$ 的块 $C_{1j} = 0$，其中 $j = 2, 3, 4$，用 g_3 代替 g_1 就达到目的. 设 $\mathrm{char}E = 2$，且所有的 $g_2(s)(s \in E^*)$ 都是两个相互交换的正交平延的积. 特别 $g_2(1) = \rho_{x, Q(x)^{-1}}\rho_{y, Q(y)^{-1}}$，其中 x、y 是相互正交的非奇异向量. 当 $E \neq F_2$ 时，可选 $s \in E^*$ 使 $s \neq 1$，于是

$$g_2(s) = \rho_{x, sQ(x)^{-1}}\rho_{y, sQ(y)^{-1}} \notin O(8, E, Q_E),$$

产生矛盾. 当 $E = F_2$ 时 $g_2(1)$与单位元组成 $\Omega(8, E, Q_E)$的短根子群. 但由 §3.4 知道 $\Omega_7(E)$不含短根子群，因而 $g_2(1)$不可能正规化 $\Omega_7(E)$，仍有矛盾.

(6.6.2.2) 将 $\mathrm{GL}(4, \mathrm{Mat}_r F)$ 中形如

$$g = \begin{pmatrix} I & O & O & O \\ B_{21} & I & O & O \\ B_{31} & B_{32} & I & B_{34} \\ B_{41} & O & O & I \end{pmatrix}$$

的全体矩阵组成的集合记作 Y_0. 则存在 $g \in Y_0$, $gMg^{-1} < X$ 且 $g \notin M$.

由于(6.6.2.1),存在 $g_1 = (A_{ij})_{4\times 4} \in X\backslash\Gamma$,使 $A_{1j} = 0$ 对 $j = 2, 3, 4$ 成立. 记 $g_1^{-1} = (\tilde{A}_{ij})_{4\times 4}$, 则 $g_1^{-1} \in X\backslash\Gamma$, 并且 $\tilde{A}_{1j} = 0$ 对 $j = 2, 3, 4$ 成立. 在此基础上取 $g_2 = g_1 T_{31}(I) g_1^{-1} \in X$, 则

$$g_2 = \begin{pmatrix} I & O & O & O \\ B_{21} & I & O & O \\ B_{31} & O & I & O \\ B_{41} & O & O & I \end{pmatrix} \in Y_0,$$

其中 $B_{i1} = A_{i3}A_{11}^{-1}$ (对 $i = 2, 3, 4$). $g_2 \in X$ 当然使 $g_2 M g_2^{-1} < X$. 如果 $g_2 \notin M$, 则 g_2 即为所求. 设 $g_2 \in M$, 则 $B_{21} = B_{41} = 0$, 且 $B_{31} = sI$ 对某个 $s \in E^*$ 成立. 这迫使 g_1 的块满足条件: $A_{i3} = 0$ (对 $i = 2, 4$), $A_{33} = sA_{11}$.

记 $U = M^+(2, E)$ 为 E 上全体 2 阶对称方阵组成的集合. 则对任意的 $B \in U$, $T(B) = T_{21}(B)T_{34}(-\overline{B}) \in M$, 并且 $\tilde{T}(B) = T_{41}(B)T_{32}(\overline{B}) \in M$. 于是 $g_3(B) = g_1 T(B) g_1^{-1}$ 和 $g_4(B) = g_1 \tilde{T}(B) g_1^{-1}$ 都含于 X, 当然都将 M 共轭到 X, 且 $g_3(B)$ 和 $g_4(B)$ 都具有 Y_0 所要求的矩阵形式. 如果能选 $B \in U$ 使 $g_3(B) \notin M$ 或 $g_4(B) \notin M$, 则达到了目的.

若不然,设所有的 $g_3(B)$、$g_4(B)$ 都含于 M. 我们来看 g_1 应满足什么样的条件.

注意, $g_3(B)$ 中的第$(i, 1)$-块 $B_{i1} = A_{i2}BA_{11}^{-1}$, 对 $i = 2, 4$, 按照引理 6.6.1(4), $g_3(B) \in M$ 迫使 $T_{21}(B_{21}) \in \mathrm{Sp}(4, E, H_1)$, 从而 $A_{22}BA_{11}^{-1} \in M^+(2, E)$. M 的子群 $N_1 = \mathrm{Sp}(4, E, H_1) \otimes I$ 含

有置换阵

$$P_{24}=\begin{pmatrix}I & O & O & O\\ O & O & O & I\\ O & O & I & O\\ O & -I & O & O\end{pmatrix}.$$

$P_{24}g_3(B)P_{24}^{-1}\in M$ 也含于 Y_0，其中的第(2,1)-块就是 $g_3(B)$ 的块 $B_{41}=A_{42}BA_{11}^{-1}$，它也应含于 U. 对 $g_4(B)$ 作同样的讨论知它的第 $(i,1)$-块 $A_{i4}BA_{11}^{-1}(i=2,4)$ 也都含于 U.

可见 $A_{ij}BA_{11}^{-1}\in U$ 对 i、$j\in\{2,4\}$ 和所有的 $B\in U$ 成立. 因而

$$C(B)=A\begin{pmatrix}BA_{11}^{-1} & O\\ O & BA_{11}^{-1}\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_4E$$

对 $A=\begin{pmatrix}A_{22} & A_{24}\\ A_{42} & A_{44}\end{pmatrix}$ 和每个 $B\in U$ 成立. 由 $g_1\in Y_0$ 是可逆矩阵知 A 是可逆矩阵. 因此 $C(I)\in \mathrm{GL}(4,E)$. 于是 $C(I)^{-1}C(B)=\mathrm{diag}(A_{11}BA_{11}^{-1},\ A_{11}BA_{11}^{-1})\in \mathrm{Mat}_4E$ 对所有的 $B\in U$ 成立. 即 $A_{11}BA_{11}^{-1}\in \mathrm{Mat}_2E,\forall B\in U$. 进而 $A_{11}CA_{11}^{-1}\in \mathrm{Mat}_2E$ 对 U 生成的环 R 中所有矩阵 C 成立. 但 U 生成的环 $R=\mathrm{Mat}_2E$，可见 A_{11} 正规化 R，从而正规化 R 的中心 $EI^{(2)}$. 行向量空间 $\mathrm{Mat}_{1\times 2}E$ 是 $EI^{(2)}$ 作用下的可约的齐次模. 因而可以用引理 2.6.2 得出 $A_{11}=(p_{ij}\pi^{-1})_{2\times 2}=P\otimes\pi^{-1}$. 其中每个 p_{ij} 含于 E 在 Mat_rF 中的中心化子，因而 $P=(p_{ij})_{2\times 2}\in \mathrm{GL}(2,E)$，而 $\pi^{-1}\in \mathrm{GL}(r/2,F)$ 正规化 E. $\mu(P)=\mathrm{diag}(P,P^*,\mathrm{diag}(P,P^*)^\sigma)\in M$. 不妨取 $\mu(P)^{-1}g_1\in X\backslash\Gamma$ 代替 g_1，从而用 $P^{-1}A_{11}$ 代替 A_{11}，化为 $A_{11}=\mathrm{diag}(\pi^{-1},\pi^{-1})$ 的情形. π^{-1} 的共轭作用诱导出 E 的自同构 π: $\alpha\mapsto\alpha^\pi=\pi^{-1}\alpha\pi$. 已经知道 $D(B)=DBA_{11}^{-1}\in U$ 对每个 $D=A_{ij}(i,j\in\{2,4\})$ 和 $B\in U$ 成立. 取 $B=I$ 可知 $D(I)=DA_{11}^{-1}=D\pi\in U$, $D=D(I)\pi^{-1}$, $D(B)=D(I)\pi^{-1}B\pi=D(I)B^\pi\in U$. $D(I)\in U$ 具有形式 $D(I)=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$. 取 $B=\mathrm{diag}(1,0)\in U$，则 $D(B)=$

$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \in U$，这迫使 $b=0$，即 $D(I)=\mathrm{diag}(a, c)$. 再取 B 为 U 中的任意非对角阵，则 $D(B)=D(I)B^{\pi} \in U$ 迫使 $D(I)=\lambda I$，$\lambda \in E$. 从而 $D=\lambda\pi^{-1}$. 也就是说：g_1 的块 $A_{ij}(i, j \in \{2, 4\})$ 具有形式 $A_{ij}=\lambda_{ij}\pi^{-1}$，$\lambda_{ij} \in E$. 而由这四个块所组成的 g_1 的子矩阵 A 具有形式 $A=A_1 \otimes \pi^{-1}$，其中 $A_1=(\lambda_{ij}I^{(2)})_{i, j\in\{2,4\}} \in \mathrm{GL}(2, EI^{(2)}) < \mathrm{GL}(4, E)$. 记 $A_1=A_0\mathrm{diag}(1, \lambda_0)$ 使 $A_0 \in \mathrm{SL}(2, EI^{(2)})$，$\lambda_0=\det A_1$. N 的子群 $\langle T_{42}(sI^{(2)}), T_{24}(sI^{(2)}) \mid s\in E\rangle$ 在 $Ke_1 \otimes Ke_3$ 上诱导出单位变换，而在 $Ke_2 \otimes Ke_4$ 上诱导出 $\mathrm{SL}(2, EI^{(2)})$，其中存在元素 g_0 在 $Ke_2 \oplus Ke_4$ 上诱导出 A_0. 用 $g_0^{-1}g_1 \in X\backslash\Gamma$ 代替 g_1 可化为 $A_1=\mathrm{diag}(1, \lambda_0)$ 的情形. 即 $A_{24}=A_{42}=0$，$A_{22}=D_0\pi^{-1}=D_0A_{11}$，而 $A_{44}=\lambda_0A_{22}$. 由于 $g_3(B) \in M$ 的块 $B_{21}=A_{22}BA_{11}^{-1}=D_0B^{\pi}$ 与 $B_{34}=-A_{33}\overline{B}A_{44}^{-1}=-s\lambda_0^{-1}\overline{B}^{\pi}D_0^{-1}$ 之间应满足条件 $B_{34}=-\overline{B}_{21}$，可得到 $\lambda_0=s$. 因此 $A_{44}=sI$.

记 $\gamma=\mathrm{diag}(A_{11}, \cdots, A_{44})$. 根据 $A_{ii}(1 \leq i \leq 4)$ 满足的上述条件，可以验证 γ 将 $M=\Omega_7(E)$的生成元

$$T_{ij}(B)T_{2+j,2+i}(-\overline{B}),\ T_{i,2+j}(B)T_{j,2+i}(\overline{B}),$$

$$T_{2+i,j}(B)T_{2+j,i}(\overline{B})\ (\text{其中 } i\text{、}j \text{ 是 } 1\text{、}2 \text{ 的置换})$$

仍然共轭到 M 中. 因此 $\gamma^{-1}M\gamma=M$，$g_1\gamma^{-1}M\gamma g_1=M$. 用 $g_1\gamma^{-1}$代替 g_1，在保持 $g_1 \notin \Gamma$ 及 $g_1Mg_1^{-1}=M$ 的同时，化为 $A_{ii}=I(\forall 1 \leq i \leq 4)$ 的情形，这样的 g_1 本身就已具有 Y_0 所要求的矩阵形式，恰是本步骤需要的 g.

(6.6.2.3) *存在 $T_0=T_{21}(B_1)T_{34}(-C_1) \in X\backslash M$ 使 $B_1+C_1 \in EI^{(2)}$ 或 $B_1=C_1$.*

由(6.6.2.2)，存在 $g_1=(B_{ij})_{4\times4} \in Y_0\backslash M$ 使 $g_1Mg_1^{-1} < X$，其中 $B_{ii}=I(\forall i)$ 且 $B_{ij}=0(\forall i \neq j, i \neq 3 \text{ 且 } j \neq 1)$. 由此出发来找出本步骤所要的 T_0.

只要能找到

$$g = T_{21}(B_1)T_{34}(-C_1)T_{31}(A_1) \in \mathrm{SL}(4, \mathrm{Mat}_r F)$$

满足条件(a)、(b)、(c)，则按照引理 5.5.1 的步骤(5.5.1.4)中同样的推理过程可以化为 $A_1 = 0$，以及化为 $B_1 + C_1 \in EI^{(2)}$ 或 $B_1 = C_1$ 的情形.

如果 $g_0 = T_{21}(B_{21})T_{34}(B_{34}) \notin M$，则 $B_{21} \notin U$ 或 $B_{34} \notin U$ 或 $B_{34} \neq -\overline{B_{21}}$ 三者中至少有一个成立. 此时

$$\begin{aligned} g_2 &= T_{42}(I)g_1T_{42}(-I)g_1^{-1} \\ &= T_{41}(B_{21})T_{32}(-B_{34})T_{31}(B_{34}B_{21}) \in X\backslash M. \end{aligned}$$

用 g_2 代替 g_1 可化为 $B_{21} = B_{34} = 0$ 的情形. 而当 $g_0 \in M$ 时，用 $g_0^{-1}g_1$ 代替 g_1，仍可使 $B_{21} = B_{34} = 0$.

因此，不妨一开始就设 $B_{21} = B_{34} = 0$. 于是可用引理 5.5.1 的证明步骤(5.5.1.4)中的推理过程得出如下结论：

当 $T_{41}(B_{41})T_{32}(B_{32}) \notin M$ 且 $B_{41} + B_{32} \in EI$ 时，由(5.5.1.4)的推理 4 得 $g = T_{21}(B_{41})T_{34}(-B_{32})T_{31}(B_{31}) \in X$. 且当 $E \neq F_2$（即 $N \neq \mathrm{SU}(4, 2^2)$）时，由推理 3 知还可使 $B_{31} = 0$. $T_0 = g$ 恰如所需.

在剩下的情况中，当 $z_0 = T_{41}(B_{41})T_{32}(B_{32}) \in M$ 时，可用 $z_0^{-1}g_1$ 代替 g_1 化为 $g_1 = T_{31}(B_{31})$的情形. 当 $B_{41} + B_{32} = A_1 \notin EI$ 时，由(5.5.1.4)的推理 2 知 $T_{31}(A_1) \in X\backslash M$，可用来代替 g_1. 总之，可设 g_1 具有形式 $g_1 = T_{31}(C)$，$C \notin EI$. 由推理 1 及推理 4 可得 $g = T_{21}(C)T_{34}(-C)T_{31}(C) \in X$，且当 $E \neq F_2$ 时 $\tilde{g} = T_{21}(C)T_{34}(-C) \in X$. 如果 $\tilde{g} \notin M$，则 $T_0 = \tilde{g}$ 已符合要求. 否则，$C \in U$ 且 $\overline{C} = C$. 这迫使 C 具有形式 $C = \begin{pmatrix} a & b \\ \delta b & a \end{pmatrix}$ 且 $\mathrm{char}E = 2$. 取 $P = T_{21}(1) \in \mathrm{SL}(2, E)$，则 $\mu(P) = \mathrm{diag}(P, P^*, P, P^*) \in M$. 于是以

$$\mu(P)T_{31}(C)\mu(P)^{-1} = T_{31}(PCP^{-1})$$

代替 $T_{31}(C)$，且 $PCP^{-1} \notin U$，化为已解决的情形.

(6.6.2.4) $X \geq G = \Omega(8, E, \Delta_1)$. 引理结论成立.

取满足(6.6.2.3)所述条件 $T_0 = T_{21}(B_1)T_{34}(-C_1) \in X \backslash M$. 再取 $Y = \langle M, T_0 \rangle \leq X$. 并与引理5.7.3同样定义 Y 的子群 $Y_1 = \{\mathrm{diag}(A, B) \in Y | A, B \in \mathrm{GL}(4r, F)\}$ 以及 Y_1 到 $\mathrm{GL}(4r, F)$ 中的映射 φ_1、φ_2，将每个 $g = \mathrm{diag}(A, B) \in Y_1$ 分别映到 $\varphi_1(g) = A$ 和 $\varphi_2(g) = B$. 记 $Z_1 = \varphi_1(Y_1) = \varphi_2(Y_1)$.

$Y_1 \cap M$ 包含所有的 $\mathrm{diag}(A, A^o)(A \in \mathrm{GSp}(4, E, H_1))$，并包含 T_0，可见 $Z_1 \geq \langle \mathrm{GSp}(4, E, H_1), T_{21}(B_1) \rangle$. Z_1 是 $\mathrm{Sp}(4, E, H_1)$ 在 $\mathrm{GL}(2r, F)$ 中的扩群. 当 $E = F$ 时，利用定理4.1.1(或定理3.2.1)，当 $E \neq F$ 时利用定理6.1.2，可知在 E 与 F 之间存在中间域 E_1，使 $Z_1 \trianglerighteq Z_{01} = \mathrm{SL}(4d, E_1)$ 或 $Z_1 \trianglerighteq Z_{01} = \mathrm{Sp}(4d, E_1)$ 成立，其中 $d = [E : E_1]$.

如果存在 $g_0 = \mathrm{diag}(A, I) \in \mathrm{Ker}\varphi_2$ 使 $A \notin E_1 I$，则 g_0 在 Y_1 中的全体共轭生成一个子群 $X_1 \leq \mathrm{Ker}\varphi_2$，其中 $\varphi_1(X_1)$ 是由 A 在 Z_1 中的所有的共轭所生成的 Z_1 的正规子群，故 $\varphi_1(X_1) \geq Z_{01} \geq \mathrm{Sp}(4, E, H_1)$. 对于 $\mathrm{Mat}_{2r}F$ 的单位阵 I 有 $T(I) = \begin{pmatrix} I & O \\ I & I \end{pmatrix} \in N_1 < M < Y$. 对每个 $P \in \mathrm{Sp}(4, E, H_1) \leq \varphi_1(X_1)$，有 $g = \mathrm{diag}(P, I) \in X_1 < Y$，$g^{-1}T(I)g = T(P) \in Y$，从而 $T(C) \in Y$ 对 $\mathrm{Sp}(4, F, H_1)$ 生成的加群 Mat_4E 中所有的矩阵 C 成立. 并且 N_1 可将每个这样的 $T(C)$ 共轭到 $T'(C) = \begin{pmatrix} I & C \\ O & I \end{pmatrix}$. 由引理5.3.1知所有这些 $T(C)$，$T'(C)$ 生成 $\mathrm{SL}(8, E) \leq X$，当然就有 $X \geq \Omega(8, E, \Delta_1)$.

同样，如果存在 $\mathrm{diag}(I, A) \in \mathrm{Ker}\varphi_1$，使 $A \notin E_1 I$，也导致 $X \geq \mathrm{SL}(8, E)$.

注意，当 $d \geq 2$ 时，Z_1 的子群 $\mathrm{GSp}(4, E, H_1)$ 不正规化 $\mathrm{Sp}(4d, E_1)$. 可见 $Z_{01} = \mathrm{Sp}(4d, E_1)$ 仅当 $d = 1$，$E_1 = E$ 时才有可能成立，但这意味着 $Z_1 = \mathrm{GSp}(4, E, H_1)$ 包含 $T_{21}(B_1)$ 及

$T_{12}(-C_1)$，迫使 B_1、$C_1 \in U$. 但由 $\mathrm{diag}(T_{21}(B_1), T_{12}(-C_1)) \notin M$ 知 $C_1 \neq \overline{B}_1$. 此时可取 $g_0 = \mathrm{diag}(T_{21}(\overline{C}_1), T_{12}(-C_1)) \in M$，得到一个 $g_0^{-1}T_0 = T_{21}(B_0) \in \mathrm{Ker}\varphi_2$，其中 $B_0 \neq 0$. 按已经证明过的结论，这导致 $X \geq \mathrm{SL}(8, E)$.

在剩下的情形里，$\varphi_2(\mathrm{Ker}\varphi_1)$和 $\varphi_1(\mathrm{Ker}\varphi_2)$都含于 $E_1 I$，且 $Z_1 = \mathrm{SL}(4d, E_1)$.

下面将矩阵 A 在 E_1 上的转置记作 A'. 由引理 5.7.3 的证明步骤(5.7.3.2)和(5.7.3.3)可知：存在 $Z_{01} = \mathrm{SL}(4d, E_1)$ 的自同构 $\sigma_1: A \mapsto \widetilde{\Lambda}(A^*)^{-1}\widetilde{\Lambda}^{-1}$，使 $\mathrm{diag}(A, A^{\sigma_1}) \in \Phi(Y_1)$ 对所有的 $A \in Z_{01}$ 成立. 其中 $A^* = A^{\tau_1}$，τ_1 是 E_1 的二阶自同构，$\widetilde{\Lambda} \in \mathrm{GL}(d, E_1)$ 满足条件 $\widetilde{\Lambda}^* = \varepsilon\Lambda, \varepsilon = \pm 1$. 但 σ_1 在 $\mathrm{Sp}(4, E, H_1) < Z_1$ 上的限制应等于 σ，将每个 $T_{21}(B)(B \in U)$ 送到 $T_{12}(-\overline{B})$. 对每个 $C \in \mathrm{Mat}_d E_1$ 记 $\psi(C) = \widetilde{\Lambda}C^*\widetilde{\Lambda}^{-1}$，则 $\psi(B_1)\psi(B_2) = \psi(B_2B_1)$. 且 $(T_{21}(B))^{\sigma_1} = T_{12}(-\psi(B))$，可见 $\overline{B} = \psi B$ 对所有的 $B \in U$ 成立. 进而对于 B_1、$B_2 \in U$ 有

$$\psi(B_1B_2) = \psi(B_2)\psi(B_1) = \overline{B_2}\,\overline{B_1} = \overline{B_1B_2},$$

$$T_{21}(B_1B_2)T_{34}(-\overline{B_1B_2}) \in Y_1.$$

这说明：对于 U 生成的环 $R_1 = \mathrm{Mat}_2 E$ 中的所有的矩阵 C，都有 $T_{21}(C)T_{34}(-\overline{C}) \in Y_1$. 选 $C_1 \in R_1$ 不是对称方阵，则 $T_{21}(C)T_{34}(-\overline{C}) \in X$ 含于 $G = \Omega(8, E, \Delta_1)$ 且不正规化 M. 由引理 6.6.1(3)知它与 M 生成 $G \leq X$. ▌

第 7 章

张量积结构的稳定子群

在本章中讨论 C_4 问题，即讨论作用于 $V = W \otimes_E U$ 上的 $\mathrm{SL}(W/E) \otimes \mathrm{SL}(U/K)$ 或其子群在 $\mathrm{GL}(V/F)$ 中的扩群，其中 K 是体，F 与 E 是 K 的子体，且在 K 中互为中心化子，U 与 W 分别是左 K-空间和右 E-空间，且 $\dim_K U = n$，$\dim_E W = r$，$\dim_F K = d$ 都是有限数，从而 $\dim_F V = nrd$. 按第 5 章 § 5.1 所述，可将 V 写成 $\mathrm{Mat}_{r\times n}K$，从而 $\Gamma_0 = \mathrm{GL}(W/E) \otimes \mathrm{GL}(U/K)$ 由全体相抵变换 $A_R \otimes B_L : v \mapsto BvA$ 组成，其中 A、B 分别取遍 $\mathrm{GL}(n, K)$、$\mathrm{GL}(r, E)$. 进一步，取 K 的左 F-基 $\mathscr{Z} = \{\zeta_t \mid 1 \leq t \leq d\}$ 并构造出 V 的左 F-基

$$\mathscr{E} = \{e_{ijt} = \zeta_t E_{ji} \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq r,\ 1 \leq t \leq d\}.$$

在基 $\mathscr{E}$ 下将 V 进一步写成行向量空间 $\mathrm{Mat}_{1\times nrd}F$，将 $G = \mathrm{GL}(V/F)$ 写成矩阵群 $\mathrm{GL}(nrd, F)$，则 $\Gamma_0 = \mathrm{GL}(n, K_R) \otimes \mathrm{GL}(r, E_L)$ 由矩阵 $A \in \mathrm{GL}(n, K_R)$ 与 $B \in \mathrm{GL}(r, E_L)$ 在 K 上的张量积 $A \otimes B$ 的全体组成.

我们的目的是定出 $\mathrm{SL}(n, K_R) \otimes \mathrm{SL}(r, E_L)$ 或其子群在 $G = \mathrm{GL}(nrd, F)$ 中的全体扩群.

我们将只处理 F 与 E 在 K 中生成的子体等于 K 的情形. 这包括如下两种重要的情形：(i) $F = K$，E 是 K 的中心；(ii) $E = K$，F 是 K 的中心. 事实上，我们主要讨论的是这两种情形的公共部分：K 是域，从而 $K = E = F$.

我们尽可能利用第 5 章关于 $\mathrm{SL}(n, D)$ 或 $\mathrm{U}'(n, D, \Delta, L)$ 在

$\mathrm{GL}(n, R)$中的扩群的一般性结果. 在本章中 $R = \mathrm{Mat}_{rd}F$, $D = I^{(r)} \otimes K_R$, $\mathrm{SL}(n, D) = \mathrm{SL}(n, K_R) \otimes I$, D^* 在 R^* 中的正规化子为 $N_R(D) = \mathrm{GL}(r, E_L) \cdot K_R \cdot (\mathrm{Gal}K/F)$, 中心化子为 $C_R(D) = \mathrm{GL}(r, E_L)$, $\Gamma = \Gamma_0 \cdot (\mathrm{Gal}K/F) = (\mathrm{GL}(n, K_R) \otimes \mathrm{GL}(r, E_L))(\mathrm{Gal}K/F)$, 当 $K = F$ 时 $\Gamma = \Gamma_0$.

§7.1 主 要 结 果

对于第 5 章所述的一般性问题, 考虑 $N_1 = \mathrm{SL}(n, D)$ 在 $\mathrm{GL}(n, R)$ 中的扩群 X 时, 首先猜出一个能正规化 N_1 而又尽可能大的子群 $\Gamma = \mathrm{GL}(n, D) \cdot N_R(D)$, 含于 Γ 的扩群就认为是已知的. 但 C_4 问题与此有所不同, 我们不是要直接定出 $N_1 = \mathrm{SL}(n, D) = \mathrm{SL}(n, K_R) \otimes I$ 的扩群, 而是要定出比 N_1 大得多的 $N = \mathrm{SL}(n, K_R) \otimes \mathrm{SL}(r, E_L)$ (或其子群)的扩群. 因此, 应该先猜出能正规化这个 N 而又尽可能大的子群.

在此约定: 当写 $v \in V$ 时, 总认为 v 是 F 上 nrd 维行向量, 而用$[v]$表示 v 所对应的 K 上 $r \times n$ 矩阵, 并记 $[V] = \{[v] | v \in V\} = \mathrm{Mat}_{r\times n}K$. 则$[V]$上的相抵变换 $[v] \mapsto B^T[v]A$ 在基 $\mathscr{E}$ 下的矩阵为 $A_R \otimes B_L$, 其中 $A_R \in \mathrm{GL}(n, K_R)$ 由在 $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ 中将每个矩阵元素 α 换成相应的 $\alpha_R \in K_R$ 而得到, 而 $B_L \in \mathrm{GL}(r, E_L)$ 由在 $B \in \mathrm{GL}(r, E)$ 中将每个元素 $\beta \in E$ 换成 β_L 而得到.

首先, 易见 $\Gamma = (\mathrm{GL}(n, K_R) \otimes \mathrm{GL}(r, E_L))(\mathrm{Gal}K/F)$ 正规化 N.

在此设 τ : $[v] \mapsto [v]^T$ 是 K 上矩阵的转置映射, 将 $[V] = \mathrm{Mat}_{r\times n}K$ 映到 $[V]^T = \mathrm{Mat}_{n\times r}K$. 特别当 $n = r$ 时 $[V] = [V]^T$, $\tau \in \mathrm{GL}(n^2d, F)$, 且易见 $\tau^2 = 1$, $\tau^{-1} = \tau$. 对一般的 n、r(包括 $n \neq r$ 和 $n = r$ 的情形), 由于 $[V]^T = \mathrm{Mat}_{n\times r}K$ 也可以在左 F-基 $\mathscr{E} = \{\zeta_t E_{ji} | 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n, 1 \leq t \leq d\}$ 下写成行向量空间, $[V]$与$[V]^T$ 都可以看成 $\mathrm{Mat}_{1\times nrd}F$, 从而可以认为 $\tau \in \mathrm{GL}(nrd, F)$, 并将 τ 写成 F 上的 nrd 阶方阵 $\tau = (A_{ij})_{n\times r}$, 其中每一块

$A_{ij}=E_{ji}^{(r\times n)}\otimes I^{(d)}\in \mathrm{Mat}_{rd\times nd}F$. 即 $A_{ij}=(\alpha_{kl}^{(d)})_{r\times n}$，其中 $\alpha_{ji}=I$ 是 d 阶单位阵，而其余 $\alpha_{kl}=O$ 都是 d 阶零方阵. 对任意的 $[v]=(\theta_{ij})_{r\times n}\in[V]=\mathrm{Mat}_{r\times n}K$，$A=(\alpha_{ij})_{n\times n}\in \mathrm{GL}(n,K)$ 和 $B=(\beta_{ij})_{r\times r}\in \mathrm{GL}(r,E)$，$[V]^T$ 上的 F-线性变换 $\tau^{-1}(A_R\otimes B_L)\tau$ 将 $[v]^T\mapsto[\tilde{v}]=(B[v]A)^T=(\tilde{\theta}_{ji})_{n\times r}$，其中

$$\tilde{\theta}_{ji}=\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}\beta_{ik}\theta_{kl}\alpha_{lj}=\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}\theta_{kl}(\alpha_{lj})_R(\beta_{ik})_L.$$

故
$$[\tilde{v}]=A_R^T[v]^TB_L,$$
$$\tau^{-1}(A_R\otimes B_L)\tau=B_L\otimes A_R.$$

这说明

$$\tau^{-1}(\mathrm{GL}(n,K_R)\otimes \mathrm{GL}(r,E_L))\tau=\mathrm{GL}(r,E_L)\otimes \mathrm{GL}(n,K_R).$$

如果 $n=r$ 且 K 是域，则 $K=E=F$，$K_R=E_L=F$，τ 正规化 $\Gamma=\mathrm{GL}(n,F)\otimes \mathrm{GL}(n,F)$，$\tau$ 也就正规化 N. 在 $n=r$ 且 K 是非交换体的情形，τ 将 $\Gamma_0=\mathrm{GL}(n,K_R)\otimes \mathrm{GL}(n,K_L)$ 共轭到 $\tilde{\Gamma}_0=\mathrm{GL}(n,K_L)\otimes \mathrm{GL}(n,K_R)$. 此时如果 K 还存在 F-反自同构 $J:\theta\mapsto\bar{\theta}$（即 J 是 K 的反自同构且在中心 F 上诱导出恒等变换 1_F），则 J 在 $[V]$ 上诱导出 F-线性变换（不妨仍记为 J）$[v]\mapsto\overline{[v]}$. 设 J 在 K 上作用的矩阵为 $J^{(d)}\in \mathrm{GL}(d,F)$，则它在 $[V]$ 上的作用的矩阵就是相应的"纯量阵"$J^{(nrd)}=I^{(nr)}\otimes J^{(d)}$. 对任意 $\alpha\in K$，容易验证 $J^{-1}\alpha_RJ=(\bar{\alpha})_L$，$J^{-1}\alpha_LJ=(\bar{\alpha})_R$. 可见 $J^{-1}K_RJ=K_L$，$J^{-1}K_LJ=K_R$，J 的共轭作用诱导出 K_R 与 K_L 之间的同构. J 在 $\mathrm{GL}(n^2d,F)$ 上的共轭作用 $g\mapsto J^{-1}gJ$ 将 $\Gamma_0=\mathrm{GL}(n,K_R)\otimes \mathrm{GL}(n,K_L)$ 映到

$$\tilde{\Gamma}_0=\mathrm{GL}(n,K_L)\otimes \mathrm{GL}(n,K_R)=\tau\Gamma_0\tau^{-1}.$$

于是 τJ 正规化 Γ_0 从而正规化 N. 当 K 是域时，K 的单位自同构 1_K 就是 F-反自同构，则 τ 就是在 τJ 中取 $J=1_K$ 的特殊情形. 总之，当 $n=r$ 且 K 有 F-反自同构 J 时，τJ 正规化 Γ_0 和 N，且

$(\tau J)^2 = J^2 \in \mathrm{Gal}K/F \leq \Gamma$，故 Γ 与 τJ 生成子群 $\Gamma_1 = \Gamma \cup \Gamma(\tau J)$ 正规化 Γ_0 及 N. 为了叙述的统一起见，在其余情形(即 $n \neq r$ 或 J 不存在)下，我们记 $\Gamma_1 = \Gamma$. 这个 Γ_1 是我们所能猜出的可正规化 N 的最大的子群. 事实上，由本章的定理可以看到，在所能解决的情形中，Γ_1 确实是 N 在 G 中的正规化子.

我们在前面先取定了体 K 及其子体 F、E，然后再将相抵变换群 $\Gamma_0 = \{[v] \mapsto B[v]A \mid A \in \mathrm{GL}(n, K), B \in \mathrm{GL}(r, E)\}$ 写成矩阵形式 $\mathrm{GL}(n, K_R) \otimes \mathrm{GL}(r, E_L)$. 反过来，也可以先从体 F 上的全方阵环 $R_1 = \mathrm{Mat}_d F$ 出发，取 R_1 的子体 K 使 $\mathrm{Mat}_{1\times d}F$ 是 1 维右 K-空间. 对任意自然数 $k \leq d$，K 中矩阵到它的第 k 行(或列)的映射都是 K 到 $\mathrm{Mat}_{1\times d}F$ (或 $\mathrm{Mat}_{d\times 1}F$) 的一一对应，并且是 F 上向量空间的同构. 将每个 $\theta \in K$ 的第一行记作 $\vec{\theta}$，并且将每个 $a \in F$ 与由条件 $\vec{\alpha} = (a, 0, \cdots, 0)$ 决定的 $\alpha \in K$ 等同起来，这样就将 F 嵌入 K 中成为 K 的子体. $\mathrm{Mat}_{1\times d}F$ 的标准基 $\{e_k \mid 1 \leq k \leq d\}$ 对应于 K 的一组左 F-基 $\mathscr{Z} = \{\zeta_k \mid 1 \leq k \leq d\}$ 使 $\vec{\zeta_k} = e_k$. 每个 $\alpha \in K$ 在 K 上的右乘作用 $\alpha_R: \theta \mapsto \theta\alpha$ 在基 $\mathscr{Z}$ 下的矩阵就是 α 本身. 故 $K_R = K$. 设 E 是 F 在 K 中的中心化子，则 E_L 就是 F_L 在 K_L 中的中心化子，也就是 $K_R = K$ 在 $\mathrm{Mat}_d F$ 中的中心化子. 根据以上分析，只须在取定 $\mathrm{Mat}_d F$ 的子体 K 后简单地取 $K_R = K$，E_L 是 K 在 $\mathrm{Mat}_d F$ 中的中心化子，再定义 $\Gamma_0 = \mathrm{GL}(n, K_R) \otimes \mathrm{GL}(r, E_L)$ 即可. 当 $d = 1$ 即 $K = F$ 时，E_L 当然就是 K 的中心. 当 F 是域时，F 在 K 中的嵌入象为全体纯量阵组成的域 $FI^{(d)}$，此时 $E_L = K_L$，$\mathrm{Mat}_{1\times d}F$ 也是 1 维右 K_L-空间. 因此，也可一开始就取 K_L 作为 K，从而 K_R 变成 K_L. 根据这个原理，当 F 是域时，如果 $n < r$，可用 $\Gamma_0 = \mathrm{GL}(n, K_R) \otimes \mathrm{GL}(r, K_L)$ 在 $\tau \in \mathrm{GL}(nrd, F)$ 下的共轭 $\tau^{-1}M\tau = \mathrm{GL}(r, K_L) \otimes \mathrm{GL}(n, K_R)$ 代替 Γ_0，让 K_L 与 K_R 互相代替，r 与 n 也互相代替，化成 $n > r$ 的情形. 只要定出 $\tau^{-1}M\tau$ 在 $\mathrm{GL}(nrd, F)$ 中的全部扩群，Γ_0 在 $\mathrm{GL}(nrd, F)$ 中的扩群也就都知道了. 因此，在 F 是域(即 $K = E$) 时总不妨设 $n \geq r$.

以下叙述本章的主要定理.

关于线性群的张量积 $N = \mathrm{SL}(n, K_R) \otimes \mathrm{SL}(r, E_L)$ 在 G 中的扩群 X,我们的猜测是:除少数例外情形,这样的扩群 X 或者含于 Γ_1 因而正规化 N,或者包含 $\mathrm{SL}(V/F) = \mathrm{SL}(nrd, F)$. 由此结论立即推出:$\Gamma_1$ 就是 N 在 Γ 中的正规化子. 下面的定理 7.1.1 指出,在相当广泛的情形下,这一猜测是正确的.

定理 7.1.1a 设 K 是体,F 与 E 是 K 的子体,且 F 是 E 在 K 中的中心化子,E 与 F 在 K 中生成的子体等于 K. 设

$$n > r,\ d = \dim_F K,\ N = \mathrm{SL}(n, K_R) \otimes \mathrm{SL}(r, E_L),$$

$$\Gamma = (\mathrm{GL}(n, K_R) \otimes \mathrm{GL}(r, E_L))(\mathrm{Gal} K/F).$$

如果 $N \leq X \leq \mathrm{GL}(nrd, K)$, 则下列结论之一成立:

(i) $N \trianglelefteq X \leq \Gamma$;

(ii) $X \trianglerighteq \mathrm{SL}(nrd, F)$;

(iii) $r = 2,\ E = F_2,\ X \trianglerighteq \mathrm{SL}(n, K_1), K_1 = \{aI^{(2)} + b\omega \mid a, b \in K\}$ 是 $\mathrm{Mat}_2 K$ 的子环,其中 $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

定理 7.1.1b 设 K 是体,F 是 K 的中心,且 $d = \dim_F K < \infty$,n、$r \geq 2$,且排除 $n = r = 2$ 的情形. 并不妨设 $n \geq r$, $N = \mathrm{SL}(n, K_R) \otimes \mathrm{SL}(r, K_L) \leq X \leq \mathrm{GL}(nrd, F)$. 则下列结论之一成立. 其中 $\Gamma_1 = \Gamma$ 或 $\Gamma_1 = \Gamma \cup \Gamma \cdot (\tau J)$ 如前定义,而 $\Gamma = (\mathrm{GL}(n, K_R) \otimes \mathrm{GL}(r, K_L))(\mathrm{Gal} K/F)$.

(i) $N \trianglelefteq X \leq \Gamma_1$;

(ii) $N \trianglerighteq \mathrm{SL}(nrd, F)$;

(iii) $r = 2, K = F = F_2, X = \Gamma\mathrm{L}(n, 4)$.

注意,在定理 7.1.1b 中排除 $n = r = 2$ 的情形,这是因为:当 $K = F$ 是域时,

$$N = \mathrm{SL}(2, F) \otimes \mathrm{SL}(2, F) = \Omega(4, F, Q)(\nu(Q) = 2),$$

它在 $\mathrm{GL}(4, F)$中的扩群已在第 4 章定理 4.1.1 中定出了,而当 K

非交换时，$N=\mathrm{SL}(2, K_R)\otimes\mathrm{SL}(2, K_L)$ 则属于待解决的遗留问题.

以下对 F 是域的情形考虑两个酉群 $N_1\leq\mathrm{U}(n, F, H_1)$ 及 $N_2\leq\mathrm{U}(r, F, H_2)$的张量积 $N=N_1\otimes N_2$ 在 $G=\mathrm{GL}(nr, F)$ 中的扩群. 容易想到 N 与 Γ_1 之间的任一子群都是这样的扩群之一. 按几何语言，$\mathrm{U}(n, F, H_1)$也就是作用于行向量空间 $U=\mathrm{Mat}_{1\times n}F$ 上关于 ρ-Hermite 内积 $f_1(x, y)=xH_1\bar{y}'$ 的酉群 $\mathrm{U}(U, f_1)$，而$\mathrm{U}(r, F, H_2)$是作用于 $W=\mathrm{Mat}_{1\times r}F$ 上关于 ε-Hermite 内积 $f_2(x, y)=xH_2\bar{y}'$ 的酉群$\mathrm{U}(W, f_2)$. 将U的自然基记作$\mathscr{E}_1=\{e_i\mid 1\leq i\leq n\}$，$W$ 的自然基记作 $\mathscr{E}_2=\{\varepsilon_j\mid 1\leq j\leq r\}$. 记 $V=\mathrm{Mat}_{1\times nr}F$ 为 $V=U\otimes_F W$ 使 $\mathscr{E}=\{e_i\otimes\varepsilon_j\mid i, j\}$ 就是 $\mathrm{Mat}_{1\times nr}F$ 的自然基，则

$$f(u_1\otimes w_1, u_2\otimes w_2)=f_1(u_1, u_2)f_2(w_1, w_2)$$

定义了 V 上的 $(\rho\varepsilon)$-Hermite 内积 $f=f_1\otimes f_2$，$f(x, y)=x(H_1\otimes H_2)\bar{y}'$，而 $N=N_1\otimes N_2<\mathrm{U}(nr, F, H_1\otimes H_2)$. 当 N_1、N_2 都是辛群时还可进一步在 V 上定义与 f 相伴的二次型 Q 使 $f(x, y)=Q(x+y)-Q(x)-Q(y)$ 且所有的 $Q(u\otimes w)=0$，则有 $N\leq\Omega(nr, F, Q)$. 于是 $\mathrm{U}'(nr, F, H_1\otimes H_2)$或 $\Omega(nr, F, Q)$在 $\mathrm{GL}(nr, F)$中的扩群已由定理 4.1.1 定出，它们当然都是 N 的扩群. 我们猜测：除了这些明显的扩群外，N 一般就没有其他的扩群了，只有少数特别的情形可能例外. 下面的定理 7.1.2 和 7.1.3部分地解决了这一问题. 在 N_1、N_2 都是辛群的情形下，我们的结果较为完善，解决了几乎所有的情形，只有个别遗留问题. 但对 N_1、N_2 是其他酉群的情形，我们只在 N_1 或 N_2 的 Witt 指数较大的情形下完成了扩群的分类，遗留问题还较多.

下面的定理 7.1.2 解决了 N_1、N_2 都是辛群的情形. 按前面所述，不妨假定 $n\geq r$，注意，当 $n=r=2$ 时

$$N=\mathrm{Sp}(2, F, H_1)\otimes\mathrm{Sp}(2, F, H_2)$$

$$= \mathrm{SL}(2, F) \otimes \mathrm{SL}(2, F)$$

$$= \Omega(4, F, Q),$$

它的扩群已在第4章中定出了，故这里不需再考虑. 从而可设 $n \geq 4$.

定理 7.1.2　设 F 是域，n、r 是偶数，不妨设 $n \geq r$ 且 $n \geq 4$. 设

$$N = \mathrm{Sp}(n, F, H_1) \otimes \mathrm{Sp}(r, F, H_2) \leq X \leq \mathrm{GL}(nr, F),$$

当 $n = r \leq 6$ 且 $F = F_2$ 时，预先假定 $X \leq O(nr, F, Q)$. 则以下结论成立：

(i) $X \leq \Gamma_1$.

(ii) $X \trianglerighteq \mathrm{SL}(nr, F)$.

(iii) $X \trianglerighteq \Omega(nr, F, Q)$，或当 $\mathrm{char} F = 2$ 时，$X \trianglerighteq \Omega(nr, F, Q, L)$ 对 F 的某个 F^2-子空间 L 成立.

(iv) $F = F_2$，$r = 2$，X 正规化 F_4 上的典型群 $\mathrm{Sp}(n, 4)$ 或 $\mathrm{SU}(n, 2^2)$ 或 $\mathrm{SL}(n, 4)$.

(v) $\mathrm{char} F = 2$，$N_1 = \mathrm{Sp}(4, F) \otimes \mathrm{Sp}(2, F)$，$X \trianglerighteq \Omega_7$，其中 Ω_7 是 $\Omega(8, F, Q)$ $(\nu(Q) = 4)$ 的可约子群 $\Omega(8, F, Q)$ 在某个外自同构 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\Omega^+(8, F))$ 下的不可约象，σ 可由旋量表示而得到(见§2.3).

(vi) $\mathrm{char} F = 2$，$N_1 = \mathrm{Sp}(4, F) \otimes \mathrm{Sp}(4, F)$，$X \trianglerighteq \Omega_{10}$ 或 $X \trianglerighteq \Omega_9$，其中 Ω_{10} 和 Ω_9 分别是 $\Omega^+(10, F)$ 及其子群 $\Omega(9, F)$ 在某个单同态 $\sigma: \Omega^+(10, F) \to \mathrm{GL}(16, F)$ 下的不可约象，σ 可由旋量表示而得到(见§2.3).

定理 7.1.3　设 F 是域，n、$r \geq 2$，$\mathrm{U}(n, F, H_1)$ 与 $\mathrm{U}(r, F, H_2)$ 是关于 F 的同一个对合 $J: a \mapsto \bar{a}$ 的酉群，其 Witt 指数分别为 $\nu = \nu(H_1)$ 和 $\mu = \nu(H_2)$. 设 $N = N_1 \otimes N_2 \leq X \leq \mathrm{GL}(nr, F)$，其中 $N_1 \leq \mathrm{U}(n, F, H_1)$，$N_2 \leq \mathrm{U}(r, F, H_2)$ 满足下列条件之一：

(a) $\mathrm{char} F \neq 2$，$N_1 = \mathrm{Sp}(n, F, H_1)$，$N_2 = O(r, F, H_2)$，但

$n \leq r$ 且 $n \leq 6$ 的情形待解决；

(b) $N_1 = \mathrm{SU}(V_1, f_1)$，$N_2 = \mathrm{SU}(V_2, f_2)$，且 $\nu^2 > 2r$；

(c) $\mathrm{char}F \neq 2$，$N_1 = \Omega(V_1, f_1)$，$N_2 = \Omega(V_2, f_2)$，且 $\nu(\nu - 1) > 4r$.

则下列结论之一成立(其中(iv)～(vii)是在 r 或 F 很小时出现的特别情形).

(i) $X \leq \Gamma_1$.

(ii) $X \trianglerighteq \mathrm{U}'(nr, H_1 \otimes H_2)$.

(iii) $X \trianglerighteq \mathrm{SL}(nr, F)$.

(iv) N 和 X 都在 $V(nr, F)$上可约或非本原(仅对很小的 r 或 F 可能).

(v) $N_2 \leq \mathrm{U}(r, F, H_2) \leq \mathrm{GU}(V_2, \tilde{H}_2)$ 对某个 $\tilde{H}_2 \notin F^* H_1$ 成立，而 $X \trianglerighteq \mathrm{U}'(nr, H_1 \otimes \tilde{H}_2)$.

(vi) $r = 2$ 或 4，$N_2 \leq O(r, F, H_2)$ $(\nu(H_2) = 0)$ 在 $\mathrm{Mat}_r F$ 中生成 $FI^{(r)}$的一个 r 次扩体 D，X 正规化 $V(n, D)$上的某个典型群(酉群或线性群).

(vii) 条件(c)成立，且 $r = 4$，$\nu(H_2) = 2$，从而 $N_2 = \Omega(4, F, H_2) = \mathrm{Sp}(2, F, H_0) \otimes \mathrm{Sp}(2, F, H_0)$ 对 $H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 成立，$X \trianglerighteq \mathrm{Sp}(2n, H_1 \otimes H_0) \otimes \mathrm{Sp}(2, F)$ 或 $X \trianglerighteq \mathrm{SL}(2n, F) \otimes \mathrm{SL}(2, F)$.

由上述定理容易推出关于 C_4 类子群极大性的如下结论：

推论 7.1.4 设 $\mathrm{SL}(nr, F) \leq G \leq \mathrm{GL}(nr, F)$，且行列式集合 $\{\det g \mid g \in \Gamma_1 \cap G\} = \{\det g \mid g \in G\}$. 则 $\mathrm{SL}(n, F) \otimes \mathrm{SL}(r, F)$在 G 中的正规化子 M 等于 $\Gamma_1 \cap G$ 并且是 G 的极大子群，仅在下列情形下例外：

(i) $r = 2$，$F = F_2$；(ii) $n = r = 2$ 且 $\mathrm{char}F = 2$.

证明 极大性由定理 7.1.1b 推出. 在例外情形(i)下 $M = \Gamma_1 \cap G \lneq \Gamma\mathrm{L}(n, 4) \cap G \lneq G$；在例外情形(ii)下 $M = \Gamma_1 \cap G \lneq \mathrm{Sp}(4, F) \lneq G$. ▌

推论 7.1.5 $\mathrm{Sp}(n, F, f_1) \otimes \mathrm{Sp}(r, F, f_2)$的正规化子是$\Omega(nr, F, Q)$的极大子群，仅在下列情形下例外：

(i) $r = 2$ 且 $F = F_2$；(ii) $\mathrm{char}F = 2, n = 4, r = 2$ 或 4.

证明 由定理 7.1.2 可推出. ▌

推论 7.1.6 (1) 设 $\mathrm{char}F \neq 2$，且排除待解决的情形 $n \leq r$ 且 $n \leq 6$，则 $M = \mathrm{Sp}(n, F, H_1) \otimes O(r, F, H_2)$ 是 $G = \mathrm{Sp}(nr, F, H_1 \otimes H_2)$ 的极大子群，仅在下列情形下例外：(i) $r = 2$；(ii) $r = 3$ 且 $F = F_3$.

(2) $\mathrm{SU}(n, F, H_1) \otimes \mathrm{SU}(r, F, H_2)$($\nu = \nu(H_1)$ 满足条件 $\nu^2 > 2r$) 的正规化子 M 是 $G = \mathrm{SU}(nr, F, H_1 \otimes H_2)$ 的极大子群，仅当 $r = 2$ 且 $F = F_4$ 时例外.

(3) 设 $\mathrm{char}F \neq 2$，则

$\Omega(n, F, H_1) \otimes \Omega(r, F, H_2)$($\nu = \nu(H_1)$ 满足条件 $\nu(\nu - 1) > 4r$) 的正规化子 M 是 $G = \Omega(nr, F, H_1 \otimes H_2)$ 的极大子群，仅在下列情形下例外：

(i) $r = 2$；(ii) $r = 3$ 且 $F = F_3$.

证明 极大性由定理 7.1.3 推出. 例外情形下有如下的中间群 X 满足 $M \lneq X \lneq G$.

(1)、(3)的例外情形 $r = 2$：当 $\nu(H_2) = 1$ 时，$N_2 \leq O(2, F, H_2)$ 在 $V(2, F)$中仅有的两条迷向线 Fv_i $(i = 1, 2)$ 的集合上引起置换，M 在集合 $\{U_i = V(n, F) \otimes Fv_i \mid i = 1, 2\}$ 上引起置换，$X = \mathrm{Stab}\{U_1, U_2\}$. 当 $\nu(H_2) = 0$ 时，$N_2 \leq O(2, F, H_2)$在 $\mathrm{Mat}_2 F$ 中生成 $FI^{(2)}$的二次扩域 K，X 可取为 K 上空间结构 $V(n, K)$在 G 中的稳定子群(C_3 类子群).

(1)、(3)的例外情形 $N_2 \leq O(3, F_3, H_2)$：N_2 在 $V(3, F_3)$的一组两两正交且满足条件 $w_i H w_i' = 1 (\forall i = 1, 2, 3)$ 的非迷向线集合 $\{Fw_i \mid i = 1, 2, 3\}$ 上引起置换，M 引起 $\{W_i = V(n, F_3) \otimes Fw_i \mid i = 1, 2, 3\}$ 的置换，$X = \mathrm{Stab}\{W_1, W_2, W_3\}$.

(2) 的例外情形 $N_2 = \mathrm{SU}(2, 2^2) = \mathrm{SL}(2, 2)$：记

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2 F,\ K_1 = FI^{(2)} \oplus F\omega.$$

则 K_1 是 $R = \mathrm{Mat}_2 F$ 的子环，$X = \mathrm{SU}(2n, F, H_1 \otimes H_2) \cap \mathrm{Mat}_2 K_1$. ▌

§7.2 SL(n, K_R)⊗SL(r, E_L)中的元素在GL(nrd, F)中的共轭

在§5.4和§5.5中对SL(n, D)的元素在GL(n, R)中的共轭曾经作了一定的讨论，所得到的结果依赖于$N_R(D)$和$C_R(D)$的结构. 在将这些结果用于处理C_4问题时，需要作较多的补充.

第5章中的SL(n, D)在这里等于SL(n, K_R)$\otimes I$，在本节中将它记为$\mathscr{N}_1$. 并且记$N = \mathrm{SL}(n, K_R) \otimes \mathrm{SL}(r, E_L)$.

引理 7.2.1 设$n \geq 3$，$g_0 \in \mathrm{GL}(nrd, F) \backslash \Gamma_1$. 设$T_0 = A_0 \otimes I \in \mathscr{N}_1$，$A_0$是SL($n$, K_R)的平延，$T_1 = g_0 T_0 g_0^{-1}$. 如果$T_1 \in \Gamma_1$，则下列结论(i)或(ii)之一成立：

(i) $T_1 = A \otimes I \in \mathscr{N}_1$，$A$是SL($n$, K_R)的平延.

(ii) $T_1 = I \otimes B$，其中$B \in \mathrm{GL}(r, E_L)$满足rank $(B - I) = r/n$及$(B - I)^2 = 0$.

如果K是域从而等于F，且$n = r \geq 3$，则$T_1 \in \Gamma_1 \backslash \Gamma = \Gamma\tau$仅在下面的情形下才有可能：

(iii) $n = r = 3$，$K = F$且char$F = 2$，$T_1 = (I \otimes B)\tau(I \otimes B)^{-1}$，对某个$B \in \mathrm{SL}(3, F)$.

证明 当$T_1 \in \Gamma$时由引理5.4.2知(i)或(ii)成立.

以下只须对K是域且$n = r \geq 3$的情形进行证明：$T_1 \in \Gamma\tau$仅在情形(iii)下才有可能. 记$T_1 = (A \otimes B)\tau$，其中A、$B \in \mathrm{GL}(n, F)$. 则$T_1^2 = (A \otimes B)\tau(A \otimes B)\tau = AB \otimes BA \in \Gamma$. 但$T_1^2 = g_0 T_0^2 g_0^{-1}$，其中$T_0^2 = A_0^2 \otimes I$. 当char$F \neq 2$时，$A_0^2$仍是SL($n$, F)中的平延，由已证过的结论知(i)或(ii)至少有一个对T_1^2成立，即

AB 与 BA 中至少有一个是 F^*I 中的纯量阵. 如果 $AB = aI$, $a \in F^*$, 则 $B = aA^{-1}$, $BA = aI$. 反过来, $BA = aI \Rightarrow AB = aI$. 可见 $AB' = BA' = aI$ 对某个 $a \in F^*$ 成立. 于是 $T_1^2 = a^2 I$. 但 $(T_1^2 - I)^2 = 0$, 这迫使 $a^2 = 1, T_1^2 = I$ 从而 $T_0^2 = I$. 但这在 $\mathrm{char} F \neq 2$ 时是不可能的. 于是只剩下 $\mathrm{char} F = 2$ 的情形. 此时 $T_0^2 = I, T_1^2 = AB \otimes BA = I$, 仍导致 $AB = BA = aI$ 对某个 $a \in F^*$ 成立, 且 $a^2 = 1$ 从而 $a = 1, A = B^{-1}, T_1 = (B^{-1} \otimes B)\tau = (I \otimes B)\tau(I \otimes B)^{-1}$ 是 τ 的共轭. 由 $n(n-1)/2 = \mathrm{rank}_F(\tau - I) = \mathrm{rank}_F(T_1 - I) = 3$ 知这仅当 $n = 3$ 时才有可能. ▌

引理 7.2.2　设 K 是域从而等于 F, $n = r$. 如果 $g \in \Gamma_1$, 且有整数 $2 \leq k \leq n$ 使 g 定驻 V 的子空间 $W_k = \{(a_1, \cdots, a_k, 0, \cdots, 0) \in \mathrm{Mat}_{1\times n^2} F\}$, 则 $g \in \Gamma$, 且 g 定驻 W_n.

证明　若 $g \notin \Gamma$, 则 $g = (A_{ij})_{n\times n} \in \Gamma_1 \backslash \Gamma = \Gamma\tau$, $g\tau \in \Gamma$ 从而 $g\tau = A \otimes B = (a_{ij}B)_{n\times n}$, 对某一对 A、$B \in \mathrm{GL}(n, F)$, $A = (a_{ij})_{n\times n}$, g 定驻 W_k, 即 g 的前 k 行中前 k 个分量以外的分量都是 0, 特别所有的块 $A_{1j}(j \geq 2)$ 的前 k 行都是零. 对每个 $1 \leq l \leq n$, $a_{1l}B$ 的第 j 列 $(2 \leq j \leq n)$ 就是 A_{1j}的第 l 列, 其前 k 个元素为 0. $a_{1l}B$ 的前 k 行中第一个元素外都是 0, 且 $k \geq 2$, 故 $a_{1l}B$ 是奇异方阵. 由 B 可逆, 知 $a_{1l} = 0, a_{1l}B = O$. 由 $1 \leq l \leq n$ 的任意性知 $g\tau$ 奇异, 产生矛盾. 这就证明了 $g \in \Gamma$, g 具有形式 $g = A \otimes B = (a_{ij}B)_{n\times n}$. 对每个 $2 \leq j \leq n$, 由 $a_{1j}B = A_{1j}$ 前 k 行全为零知 $a_{1j}B$ 奇异, 从而 $a_{1j} = 0, A_{1j} = 0$ 对所有的 $j \geq 2$ 成立. 即 g 定驻 W_n. ▌

引理 7.2.3　设 $n \geq 3$, $n \geq r$. K 是体, F 与 E 是 K 的子体, 且 F 是 E 在 K 的中心化子. 当 $n = r$ 时还要求 $K = E$, 从而 F 是 K 的中心. 设 $g_0 \in \mathrm{GL}(nrd, F) \backslash \Gamma_1$, $Y = \langle \mathscr{N}_1, g_0 \rangle$ (当 $n > r$) 或 $Y = \langle N, g_0 \rangle$ (当 $n = r$), 其中

$$\mathscr{N}_1 = \mathrm{SL}(n, K_R) \otimes I < N = \mathrm{SL}(n, K_R) \otimes \mathrm{SL}(n, E_L).$$

对每个 $\alpha \in K_R$, 记

$$T_0(\alpha) = T_{n1}(\alpha) \otimes I \in \mathscr{N}_1, \; T_1(\alpha) = g_0 T_0(\alpha) g_0^{-1} \in Y.$$

设存在$\alpha\in K_R^*$使$T_1(\alpha)\in\Gamma_1$，当$\Gamma_1=\Gamma\cup\Gamma(\tau J)$时(即$n=r$且$K=E$有$F$-反自同构时)还要求至少下面两个条件之一成立：

(i) 有$\alpha\in K_R^*$使$T_1(\alpha)\in\Gamma$；

(ii) 有两个不同的$\alpha\in K_R^*$使$T_1(\alpha)\in\Gamma_1$.

则存在$g_1=(A_{ij}^{(r)})_{n\times n}\in Y\backslash\Gamma_1, A_{1j}=0, \forall 2\leq j\leq n$.

证明 按引理的假设，存在$\alpha_0\in K_R^*$使$T_1(\alpha_0)\in\Gamma_1$. 如果$\Gamma_1=\Gamma$，当然$T_1(\alpha_0)\in\Gamma$. 可以断言：在$\Gamma_1=\Gamma\cup\Gamma(\tau J)\neq\Gamma$的情形下，也总可选择$\alpha_0\in K_R^*$使$T_1(\alpha_0)\in\Gamma$. 在$\Gamma_1\neq\Gamma$的情形下，$\Gamma$是$\Gamma_1$的指数为2的正规子群，按引理假设有两个不同的$\alpha_i\in K_R^*(i=1, 2)$使$T_1(\alpha_i)\in\Gamma_1$. 如果$T_1(\alpha_i)\in\Gamma$对$i=1$或2成立，则已达到目的. 若不然，$T_1(\alpha_i)\in\Gamma(\tau J)$对$i=1$、2成立，$T_1(\alpha_0)=T_1(\alpha_1)T_1(\alpha_2)^{-1}\in\Gamma$对$\alpha_0=\alpha_1-\alpha_2\in K_R^*$成立.

因此，以下总可假设已选取了$\alpha_0\in K_R^*$使$T_1(\alpha_0)\in\Gamma$. 且可取$z_0=\mathrm{diag}(I_{(n-2)}, \alpha_0^{-1}, \alpha_0)\otimes I\in\mathscr{N}_1$，用$g_0z_0\in Y\backslash\Gamma_1$代替$g_0$，从而用$z_0^{-1}T_0(\alpha)z_0=T_{n1}(\alpha_0^{-1}\alpha)\otimes I=T_0(\alpha_0^{-1}\alpha)\in\mathscr{N}_1(\forall\alpha\in K_R)$代替$T_0(\alpha)$，也就是用$\alpha_0^{-1}\alpha$代替$\alpha$，化为$\alpha_0=1$的情形(注意，这里的1是$K_R\subset\mathrm{Mat}_dF$的幺元$I^{(d)}$，即$d$阶单位阵). 于是$T_1=T_1(1)=g_0T_{n1}(I^{(rd)})g_0^{-1}\in\Gamma$. 由引理7.2.1可知$T_1\in\mathscr{N}_1=\mathrm{SL}(n, K_R)\otimes I$或$T_1\in\mathscr{N}_2=I\otimes\mathrm{SL}(r, E_L)$成立.

如果可选$\alpha\in K_R^*$使$T_1(\alpha)\in\mathscr{N}_1$，则由引理5.4.1知所需的$g_1$存在，特别，当$T_1=T_1(1)\in\mathscr{N}_1$时$g_1$存在.

剩下的情况是$T_1=I\otimes B\in\mathscr{N}_2, B\in\mathrm{SL}(r, E_L)$满足条件$(B-I)^2=0$及$\mathrm{rank}_F(B-I)=r/n$. 但我们假定了$n\geq r$，故$r/n$是整数仅当$n=r$. 故$n>r$的情形已被解决. 只剩下$n=r$的情形. 此时按引理假设还有$K=E, F=Z(K)$. 在此情形下$\mathrm{rank}_F(B-I)=d, \mathrm{rank}_{K_L}(B-I)=1$，$B$是$\mathrm{SL}(n, K_L)$的平延. 存在$P\in\mathrm{SL}(n, K_L)$将$B$共轭到$P^{-1}BP=T_{n1}(I^{(d)})$，从而$z_1=I\otimes P\in\mathscr{N}_2$将$T_1$共轭到$I\otimes T_{n1}(I^{(d)})$. 用$z_1g_0\in Y\backslash\Gamma_1$代替$g_0$可设$T_1=I\otimes T_{n1}(I^{(d)})$，

$$(\tau g_0)T_0(1)(\tau g_0)^{-1} = \tau T_1\tau^{-1} = T_{n1}(I^{(d)}) \otimes I = T_0(1).$$

$\tau g_0 \in \mathrm{GL}(n^2d, F)$ 与 $T_0(1) = T_{n1}(I) \otimes I = T_{n1}(I^{(nd)})$ 交换，从而与 $C = T_0(1) - I = E_{n1}^{(n)} \otimes I^{(nd)}$ 交换.($C \in \mathrm{Mat}_{n^2d}F$ 的左下角的 nd 阶子方阵是单位阵，而其余部分都是 0). 我们不能说 $\tau g_0 \in Y$，也不能用 τg_0 代替 g_0. 但由 τg_0 的形式仍然能够得到关于 Y 的知识. 将 τg_0 写成分块形式 $\tau g_0 = (B_{ij})_{n\times n}$，所有的块 $B_{ij} \in \mathrm{Mat}_{nd}F$. 比较等式$(\tau g_0)C = C(\tau g_0)$两端的块，可知 $B_{1j} = B_{i1} = O$ 对所有的 $j \geq 2$ 和 $i \leq n-1$ 成立，并且 $B_{11} = B_{nn}$. 于是对所有的 $\alpha \in K_R$ 有

$$\begin{aligned} T_2(\alpha) &= (\tau g_0)T_0(\alpha)(\tau g_0)^{-1} \\ &= (\tau g_0)T_{n1}(I^{(n)} \otimes \alpha)(\tau g_0)^{-1} \\ &= T_{n1}(\varphi(\alpha)) \in \widetilde{Y}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= B_{11}(I^{(n)} \otimes \alpha)B_{11}^{-1}, \\ \widetilde{Y} &= \langle \widetilde{N}, (\tau g_0)N(\tau g_0)^{-1} \rangle \leq \tau Y \tau^{-1}, \\ \widetilde{N} &= \tau N \tau^{-1} = \mathrm{SL}(n, K_L) \otimes \mathrm{SL}(n, K_R). \end{aligned}$$

先设存在 $\alpha \in K_R^*$ 使 $\varphi(\alpha) \notin I \otimes K_L$，由引理 5.2.1 知 $\widetilde{Y} \geq \langle T_{n1}(\varphi(\alpha)), \widetilde{N} \rangle \in \mathrm{SL}(n, S)$ 对 $\mathrm{Mat}_{nd}F$ 的某个子环 $S \supsetneq I \otimes K_L$ 成立，且 S 被 $\mathrm{SL}(n, K_R)$正规化. 由引理 5.3.6 知 $S = \mathrm{Mat}_{nd}F$. 再由引理 5.3.1 得 $\widetilde{Y} \geq \mathrm{SL}(n^2d, F)$，从而 $Y \geq \tau^{-1}\widetilde{Y}\tau \geq \mathrm{SL}(n^2d, F)$. 这样的 Y 当然包含所说的 g_1.

以下设 $\varphi(\alpha) = B_{11}(I \otimes \alpha)B_{11}^{-1} = I \otimes \psi(\alpha) \in I \otimes K_L$ 对所有的 $\alpha \in K_R$ 成立，其中 $\psi(\alpha) \in K_L$ 由 α 唯一决定. $\psi: \alpha \mapsto \psi(\alpha)$是体 K_R 到 K_L 的单同态，且定驻 $FI^{(d)} \subset K_R$ 中所有的元素. 于是 ψ 也是 K_R 到 K_L 作为 F-向量空间的单同态. 但 K_R 与 K_L 在 F 上的维数相等，都等于 d. 因此 ψ 也是满射，因而是体 K_R 到 K_L 的同构. 对每个 $\theta \in K$，有唯一的 $\overline{\theta} \in K$ 使 $\psi(\theta_R) = \overline{\theta}_L$. 映射 $J: \theta \mapsto \overline{\theta}$ 是 K

的 F-反自同构. 于是 $J\tau$ 正规化 N, $(J\tau)g_0$ 正规化 Y 且不含于 Γ_1. 由 $\tau g_0=(B_{ij})_{n\times n}$ 的块 $B_{1j}=O(\forall j\geq 2)$ 知 $\tilde{g}_0=J\tau g_0=((I^{(n)}\otimes J)B_{ij})_{n\times n}\notin\Gamma_1$ 的所有的$(1, j)$-块 $(j\geq 2)$ 也都为零, $\tilde{g}_0^{-1}$ 也是如此. 于是由引理 5.2.1 知 Y 的子群

$$Y_0=\langle\mathscr{N}_1,\ \tilde{g}_0^{-1}\mathscr{N}_1\tilde{g}_0\rangle=\langle\mathscr{N}_1,\ g_0^{-1}\mathscr{N}_2 g_0\rangle$$

含有 $g_1=T_{n1}(C)$ 使 $C\notin I^{(n)}\otimes K_R$, $g_1\notin\Gamma_1$ 恰如所求. 从而完成了引理的证明. ▌

为了定出 $N=SL(n, K_R)\otimes SL(r, E_L)$ 在 $GL(nrd, F)$中的扩群 $X\not\leq\Gamma_1$, 我们千方百计地在 X 中寻找一个 $g_1=(A_{ij})_{n\times n}\notin\Gamma_1$ 使所有的块 $A_{1j}=O, \forall j\geq 2$, 也就是寻找 $g_1\in X\backslash\Gamma_1$ 定驻由 $V=\mathrm{Mat}_{1\times nrd}F$ 的前 rd 个自然基向量张成的子空间. 为了以后证明的需要, 对每个非负整数 $k\leq nrd$, 记 $W_k=\{(a_1, \cdots, a_{nrd})\in V\,|\,a_j=0,\ \forall j>k\}$ 为 $V=\mathrm{Mat}_{1\times nrd}F$ 的前 k 个自然基向量张成的子空间, 并考虑 W_k 在 X 中的稳定子群 X_{W_k}, 注意, $W_0=0$, $X_{W_0}=X$. 当然一开始并不知道 $g_1\in X_{W_{rd}}\backslash\Gamma_1$ 是否存在. 但总可以选 $g\in X_{W_k}\backslash\Gamma_1$ 使 k 最大. 如果 $k<rd$, 我们能推出矛盾, 从而证明只能 $k=rd$.

前面的引理讨论了 $\mathscr{N}_1=SL(n, D)$ (其中 $D=I\otimes K_R$) 中的平延 T_0 在 $g_0\in GL(nrd, F)\backslash\Gamma_1$ 下的共轭 T_1, 得出结论: 如果 T_1 掉进 Γ_1, 则 $k=rd$. 为了证明的需要, 我们还需考虑 N 中某些别的形式的元素在 $g_0\notin\Gamma_1$ 下的共轭, 并证明如果有这种共轭掉进 Γ_1, 则 k 值不会太小.

引理 7.2.4 设 $n=r\geq 3$, $K=E=F$ 是域, $\Gamma_1=\Gamma\cup\Gamma\tau$. 设 $g_0\in GL(n^2, F)\backslash\Gamma_1$, $N=SL(n, F)\otimes SL(n, F)$, $Y=\langle N, g_0\rangle$. 对每个下三角幂零矩阵 $S\in\mathrm{Mat}_nF$, 记 $T_0(S)=(I+S)\otimes I\in\mathscr{N}_1=SL(n, F)\otimes I$, $T(S)=g_0T_0(S)g_0^{-1}\in Y$. 如果存在 F 的子域 F_0, $[F:F_0]<\infty$, 以及由下三角幂零矩阵组成的 F_0-空间 M, 使 $T(S)\in\Gamma_1$ 对所有的 $S\in M$ 成立, 则: 除一个例外情形外, 存在 $\tilde{g}_1\in Y\backslash\Gamma_1$ 定驻 $\mathrm{Mat}_{1\times n^2}F$ 的前 k 个自然基向量张成的子

空间 W_k，使 $k \geq n/2$，特别 $k \geq 2$. 当 $\mathrm{char}F \neq 2$ 或 $|F_0| > 4$ 时还存在 $g_1 \in Y\backslash\Gamma_1$ 定驻 W_n. 例外情形是：$F_0 = F_2$，$|M| = 2$，且对唯一的 $0 \neq S \in M$ 有 $n = 2\mathrm{rank}S + 1$.

证明　先设存在下三角幂零矩阵 $S \neq 0$ 及 $1 \neq \lambda \in F_0^*$，使 $T(S)$，$T(\lambda S)$ 都含于 Γ，则由引理 5.4.6 知 $T(S) = A \otimes I$ 或 $T(S) = I \otimes A$，其中 $A \in \mathrm{SL}(n, F)$ 是幺幂矩阵. 当 $T(S) = A \otimes I$ 时，由引理 5.4.5 知存在 z、$z_1 \in \mathrm{SL}(n, F) \otimes I$ 使 $g_2 = zg_0z_1 = (B_{ij})_{n\times n} \in Y\backslash\Gamma_1$ 的块 $B_{1n} = 0$，再由引理 5.4.2 知存在 $g_1 = (C_{ij})_{n\times n} \in Y\backslash\Gamma_1$ 使 $C_{1j} = 0, \forall j \geq 2$，即 g_1 定驻 $W_n = Fe_1 \otimes W$. 当 $T(S) = I \otimes A = \tau(A \otimes I)\tau^{-1}$ 时，$T_0(S) = (g_0^{-1}\tau)(A \otimes I)(g_0^{-1}\tau)^{-1}$. 由引理 5.4.5 知存在 z、$z_1 \in \mathrm{SL}(n, F) \otimes I$ 使 $zg_0^{-1}\tau z_1 = (B_{ij})_{n\times n} \notin \Gamma_1$ 的块 $B_{1n} = 0$. 再由引理 5.4.2 知 $Y_1 = \langle N, (zg_0^{-1}\tau z_1)N(zg_0^{-1}\tau z_1)^{-1}\rangle$ 包含 $g_1 \notin \Gamma_1$ 定驻 $Fe_1 \otimes W$. 但 $Y_1 = \langle N, g_0^{-1}Ng_0\rangle \leq Y$，于是 $g_1 \in Y_{Fe_1\otimes W}\backslash\Gamma_1$.

再设 F 是特征 2 的有限域，并且存在下三角幂零阵 $S \neq 0$ 使 $T(S) \in \Gamma$. 取最大的整数 $t \geq 0$ 使 $\tilde{S} = S^{2^t} \neq 0$. 则 $\tilde{S}^2 = 0$ 且 $T(\tilde{S}) = T(S)^{2^t} \in \Gamma$. 用 $\tilde{S}$ 代替 S，不妨设 $S^2 = 0$，$T(S)^2 = I$. 记 $T(S) = A \otimes B$，A、$B \in \mathrm{GL}(n, F)$，则由 $A^2 \otimes B^2 = T(S)^2 = T(S^2) = I$ 知 $A^2 = aI$，$B^2 = a^{-1}I$ 对某个 $a \in F^*$ 成立. 由 F 是有限域(因而是完全域)知存在 $b \in F^*$ 使 $b^2 = a$，由 $A^2 = aI = b^2I$ 得 $(b^{-1}A)^2 = I$. 用 $b^{-1}A$、bB 分别代替 A、B，可设 $A^2 = B^2 = I$，因而 d_1、$d_2 \leq n/2$ 对 $d_1 = \mathrm{rank}(A - I)$，$d_2 = \mathrm{rank}(B - I)$ 成立. 于是存在 P、P_1、$P_2 \in \mathrm{SL}(n, F)$ 使 $S_0 = P^{-1}SP \in \mathrm{Mat}_nF$ 除第 $(n, n-1)$ 元素为 1 外，最后两列其他的元素全为 0，$S_1 = P_1(A - I)P_1^{-1}$ 的第一行为零，$S_2 = P_2(B - I)P_2^{-1}$ 的前 $n - d_2$ 行为零. 取 $z = P \otimes I$，$z_1 = P_1 \otimes P_2$，$g_2 = z_1g_0z = (B_{ij})_{n\times n}$，则

$$g_2((I + S_0) \otimes I)g_2^{-1} = (I + S_1) \otimes (I + S_2),$$

$$g_2(S_0 \otimes I) = ((I + S_1) \otimes (I + S_2) - I)g_2.$$

将最后这个等式两端的矩阵分块，使每块属于Mat_nF，比较两端的第(1, $n-1$)块得$B_{1n}=S_2B_{1,n-1}$，可知B_{1n}的前$n-d_2$行为零. 于是对所有的$s\in F^*$都有$T_2(s)=g_2T_{n1}(SI^{(n)})g_2^{-1}\in Y_{W_k}$，其中$k=n-d_2\geq n/2$，特别$k\geq 2$. 如果有$s\in F^*$使$T_2(s)\notin\Gamma_1$，则$\tilde{g}_1=T_2(s)$即为所求. 否则，所有的$T(s)\in\Gamma_1$且$T(s)$定驻$W_k$, $k\geq 2$. 由引理7.2.3知存在$g_1\in Y\backslash\Gamma_1$定驻$Fe_1\otimes W=W_n$.

以下只须找出前面所述的$S\neq 0$和$\lambda\neq 1$使$T(S)$、$T(\lambda S)\in\Gamma$. 或在$\mathrm{char}F=2$且$|F|<\infty$时，使$T(S)\in\Gamma$.

如果$\mathrm{char}F$是奇素数p，则对任意$0\neq S\in M$，由$T(S)$幺幂知$T(S)^{p^t}=I$对某个$t\geq 1$成立. 如果$T(S)\in\Gamma\tau$，由p^t是奇数知$T(S)^{p^t}\in\Gamma\tau$, $T(S)^{p^t}\neq I$，出现矛盾. 这说明$T(S)\in\Gamma$. 由$0\neq S\in M$的任意性可知$T(\lambda S)\in\Gamma$对$\lambda=-1\neq 1$也成立.

设$\mathrm{char}F=0$，则F_0是无限域. 任取$0\neq S_0\in M$: 如果有两个不同的λ_0、$\lambda_1\in F_0^*$使$T(\lambda_iS_0)\in\Gamma(i=0, 1)$，取$S=\lambda_0S_0$, $\lambda=\lambda_1\lambda_0^{-1}\neq 1$，则$\lambda_1S_0=\lambda S$, $T(S)$、$T(\lambda S)\in\Gamma$，恰如所需. 如果$S_0^2=0$，取$S_1=2S_0\neq 0$，则$T(S_0)\in\Gamma_1\Longrightarrow T(S_1)=T(S_0)^2\in\Gamma\Longrightarrow T(2S_1)=T_0(S_1)^2\in\Gamma$. 即$T(S_1)$、$T(\lambda S_1)\in\Gamma$对$F_0^*$的元素$\lambda=2\neq 1$成立. 剩下的情形是：$S_0^2\neq 0$，且至多只有一个$\lambda_0\in F_0^*$使$T(\lambda_0S)\in\Gamma$，而$T(\lambda S_0)\in\Gamma\tau$对所有的$\lambda\in F_0^*\backslash\{\lambda_0\}$成立. 由$|F_0^*|=\infty$，可选$\lambda_1$、$\lambda_2\in F_0^*$使$\lambda_i\neq\pm\lambda_j$对$i=1, 2, j=0, 1, 2$ $(j\neq i)$. 对$i=1$、2有$(I+\lambda_iS_0)(I-\lambda_iS_0)=I-\lambda_i^2S_0^2$，从而由$T(\pm\lambda_iS_0)\in\Gamma\tau(i=1, 2)$得

$$T(\lambda_iS_0)T(-\lambda_iS_0)=T(-\lambda_i^2S_0^2)\in\Gamma.$$

我们有$S_0^2\neq 0$，且由$\lambda_2\neq\pm\lambda_1$知$\lambda_2^2\neq\lambda_1^2$. 仍化为已解决的情况.

现在只剩下$\mathrm{char}F=2$的情形.

如果存在$0\neq S\in M$使$S^2\neq 0$，则对所有的$\lambda\in F_0^*$，由$T(\lambda S)\in\Gamma_1$得$T(\lambda^2S^2)\in\Gamma$. 特别取$\lambda=1$得$T(S^2)\in\Gamma$. 当$F_0\neq F_2$时还可取$1\neq\lambda_1\in F_0^*$，从而$\lambda_1^2\neq 1$，由$T(S^2)$、$T(\lambda_1^2S^2)\in\Gamma$导出$g_1$存在. 当$F_0=F_2$时，由$[F:F_0]<\infty$知$F$

是特征2的有限域，按前面所证，可由 $T(S^2) \in \Gamma$ 导出 $\tilde{g}_1$ 存在.

设 $S^2 = 0, \forall S \in M$. 任取 $0 \neq S \in M$，对每个 $\lambda \in F_0$，将 $T(\lambda S) \in \Gamma_1$ 在商群 $\Gamma_1/\Gamma \cong \{1, \tau\}$ 中的象记作 $\varphi(\lambda)$，则 φ 是 F_0 的加群到二阶群 $\{1,\tau\}$ 中的同态，同态核 $\mathrm{Ker}\varphi = \{\lambda \in F_0 | T(\lambda S) \in \Gamma\}$. 当 $F_0 \neq F_2$ 从而 $|F_0| \geq 4$ 时 $|\mathrm{Ker}\varphi| \geq 2$，即存在 $0 \neq \lambda \in F_0$ 使 $T(\lambda S) \in \Gamma$. 此时不妨用这个 λS 代替 S 使 $T(S) \in \Gamma, 1 \in \mathrm{Ker}\varphi$. 如果 $|F_0| > 4$，即 $|F_0| \geq 8$，则 $|\mathrm{Ker}\varphi| \geq 4$，存在 $\lambda \in \mathrm{Ker}\varphi \backslash \{0, 1\}$. 由 $T(S)$、$T(\lambda S) \in \Gamma$ 知引理所要求的 g_1 存在. 当 $|F_0| = 4$ 时 $|F| < \infty, T(S) \in \Gamma$ 导致引理所述的 $\tilde{g}_1$ 存在. 在剩下的情形里 $F_0 = F_2$，从而 $|F| < \infty$，只要找到一个下三角幂零阵 $S \neq 0$ 使 $T(S) \in \Gamma$ 即可. 如果 $|M| > 2$，存在两个不同的非零 S_1、$S_2 \in M$. 如果 $T(S_i) \in \Gamma$ 对 $i = 1$ 或 2 成立，已如所愿. 否则，$T(S_i) \in \Gamma\tau$ 从而 $T(S) = T(S_1)T(S_2) \in \Gamma$ 对 $S = S_1 + S_2 + S_1S_2$ 成立. 且 $T(S_1) \neq T(S_2) = T(S_2)^{-1} \Longrightarrow T(S) \neq I \Longrightarrow S \neq 0$. 唯一剩下的情形是 $|M| = 2, M = \{0, S_1\}$. 在此情形下，记 $T(S_1) = (A \otimes B)\tau$，$A$、$B \in \mathrm{GL}(n, F)$，则 $T(S_1)^2 = AB \otimes BA = I \Longrightarrow AB = BA = aI$ 对某个 $a \in F^*$，且 $AB \otimes BA = a^2 I \Longrightarrow a = 1$. 于是 $A = B^{-1}, T(S_1) = (B^{-1} \otimes B)\tau = (I \otimes B)\tau(I \otimes B)^{-1}, n \cdot \mathrm{rank}S_1 = \mathrm{rank}(\tau - I) = n(n-1)/2, n = 2\mathrm{rank}S_1 + 1$，属于引理所说的唯一的例外情况. ▌

引理 7.2.5　设 $K = E, F = Z(K), n = r \geq 3, d = \dim_F K$, $N = \mathrm{SL}(n, K_R) \otimes \mathrm{SL}(n, K_L)$. 设 $T_0 = A_0 \otimes B_0 \in N$ 是平延的张量积（意思是：A_0、B_0 分别是 $\mathrm{SL}(n, K_R)$、$\mathrm{SL}(n, K_L)$ 的平延），$T_1 = g_0 T_0 g_0^{-1}$ 是 T_0 在某个 $g_0 \in \mathrm{GL}(n^2 d, F)$ 下的共轭，则 $T_1 - I$ 幂零且在 F 上的秩等于 $2(n-1)d$. 如果 $T_1 \in \Gamma$，则 $T_1 \in N$ 并且也是平延的张量积，从而与 T_0 在 N 中也共轭.

证明　N 可将 $T_0 = A_0 \otimes B_0$ 共轭到

$$\tilde{T}_0 = T_{n1}(I^{(d)}) \otimes T_{n1}(I^{(d)}).$$

易见$\tilde{T}_0 - I$幂零(事实上$(\tilde{T}_0 - I)^3 = 0$)，且$\mathrm{rank}_F(\tilde{T}_0 - I) = 2(n-1)d$. 而$T_1$与$\tilde{T}_0$在$GL(n^2d, F)$中共轭，故$T_1 - I$幂零，且$F$-秩也为$2(n-1)d$.

设$T_1 \in \Gamma$，即$T_1 = (A \otimes B)\sigma = (\alpha_{ij}B\sigma)_{n\times n}$，其中$A = (\alpha_{ij})_{n\times n} \in GL(n, K_R)$，$B = (\beta_{ij})_{n\times n} \in GL(n, K_L)$，$\sigma \in \mathrm{Gal}K/F$. 首先要指出：$T_1$不可能具有形式$A \otimes I \in \mathcal{N}_1$或$I \otimes B \in \mathcal{N}_2$. 若不然，例如设$T_1 = A \otimes I$，则$2(n-1)d = \mathrm{rank}_F(T_1 - I) = n\mathrm{rank}_F(A - I)$，$\mathrm{rank}_{K_R}(A - I) = \mathrm{rank}_F(A - I)/nd = 2 - 2/n$不是整数(因$n \geq 3$)，产生矛盾. 同理，$T_1$也不可能具有形式$I \otimes B$.

每个$z = P_1 \otimes P_2 \in N$将$T_1 = (A \otimes B)\sigma$共轭到$T_2 = (A_2 \otimes B_2)\sigma$，其中$A_2 = P_1A({}^{\sigma}P_1)^{-1}$，$B_2 = P_2A({}^{\sigma}P_2)^{-1}$，${}^{\sigma}P_1 = \sigma P_1\sigma^{-1} \in SL(n, K_R)$，${}^{\sigma}P_2 = \sigma P_2\sigma^{-1} \in SL(n, K_L)$. T_2与T_0仍在$GL(n^2d, F)$中共轭. 如果能证明$T_2 \in N$是平延的张量积，则T_1也是. 这就使我们可用任意的$P_1A({}^{\sigma}P_1)^{-1}$、$P_2A({}^{\sigma}P_2)^{-1}$分别代替$A$、$B$，而不影响证明的正确性.

我们断言，可用适当的$PA({}^{\sigma}P)^{-1}(P \in SL(n, K_R))$代替$A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$，使$A$不是对角阵. 如果$A$本身就不是对角阵，则无须代替. 设$A = \mathrm{diag}(\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{nn})$是对角阵. 如果对角元$\alpha_{ii}$不全相等，$\alpha_{ii} \neq \alpha_{11}$对某个$i \neq 1$成立. 取$P = T_{1i}(I^{(d)})$，则$A_2 = PA({}^{\sigma}P)^{-1}$的第$(1, i)$-分量为$\alpha_{ii} - \alpha_{11} \neq 0$，$A_2$不是对角阵，用它代替$A$即可. 设$A$的所有的对角元$\alpha_{ii}$全部相等，记为$\alpha$，$A = \alpha I$. 如果$\alpha\sigma$中心化$K_R^*$，从而含于$K_R^*$的中心化子$K_L$，则$T_1 = (\alpha I \otimes B)\sigma = I \otimes (\alpha\sigma)(\sigma^{-1}B\sigma)$，其中$\alpha\sigma \in K_L^*$，$\sigma^{-1}B\sigma \in GL(n, K_L)$，从而$T_1 = I \otimes B_1 \in \mathcal{N}_2$对$B_1 = (\alpha\sigma)(\sigma^{-1}B\sigma)$成立. 但前面已证明这不可能. 因此$\alpha\sigma$不能中心化$K_R^*$，存在$\theta \in K_R$与$\alpha\sigma$不交换. 取$P = T_{12}(s) \in SL(n, K_R)$，则$A_2 = PA({}^{\sigma}P)^{-1}$的第$(1, 2)$-分量为$\theta\alpha - \alpha\sigma\theta\sigma^{-1} = (\theta(\alpha\sigma) - (\alpha\sigma)\theta)\sigma^{-1} \neq 0$，$A_2$不是对角阵，用它来代替$A$即可.

以下可设$A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$不是对角阵. 用$A$在适当的置换阵

$P \in \mathrm{SL}(n, FI^{(d)}) < \mathrm{SL}(n, K_R)$ 下的共轭 $PAP^{-1} = PA({}^{\sigma}P)^{-1}$ 代替 A 可化为 $\alpha_{12} \neq 0$ 的情形. 再取

$$P = \mathrm{diag}(\alpha_{12}^{-1}, 1, \alpha_{12}, I_{(n-3)}) \in \mathrm{SL}(n, K_R)$$

可将 α_{12}化为 1. 又取

$$P = I - \alpha_{11}^{\sigma} E_{21} - \alpha_{13}^{\sigma} E_{23} - \cdots - \alpha_{1n}^{\sigma} E_{2n}$$

可将 $\alpha_{1j}(j \neq 2)$ 都化为零. 再取

$$P = I - \alpha_{32} E_{31} - \cdots - \alpha_{n2} E_{n1}$$

可将 $\alpha_{i2}(i \geq 3)$都化为零.

同样,可用适当的 $PB({}^{\sigma}P)^{-1}(P \in \mathrm{SL}(n, K_L))$ 代替 $B = (\beta_{ij})_{n\times n}$, 化为 $\beta_{12} = 1$ 且所有 $\beta_{1j} = \beta_{i2} = 0(j \neq 2, i \geq 3)$ 的情形.

现在

$$T_1 - I = \begin{pmatrix} -I & B\sigma & O & \cdots \\ \alpha_{21}B\sigma & \alpha_{22}B\sigma - I & \alpha_{23}B\sigma & \cdots \\ \vdots & O & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}B\sigma & \cdots & \cdots & \alpha_{nn}B\sigma - I \end{pmatrix}.$$

如果 A 中有 α_{12}、α_{21}以外的非对角元 $\alpha_{ij} \neq 0(i \neq j, \{i, j\} \neq \{1, 2\})$, 则由 $T_1 - I$ 的上述表达式可以看出 $\mathrm{rank}_F(T_1 - I) \geq \mathrm{rank}_F(B\sigma) + \mathrm{rank}_F(\alpha_{ij}B\sigma) = 2nd > 2(n-1)d$, 这与 $\mathrm{rank}_F(T_1 - I) = 2(n-1)d$ 相矛盾. 这迫使 $\alpha_{ij} = 0$ 对所有的 $i \neq j$, $\{i, j\} \neq \{1, 2\}$ 成立. 由 T_1 可逆,知 $\alpha_{ii} \neq 0$, $\forall 3 \leq i \leq n$, 且 $\alpha_{21} \neq 0$.

对每个 $3 \leq t \leq n$, 由 $B = (\beta_{ij})_{n\times n}$ 的非对角元 $\beta_{12} = 1 \neq 0$ 知 $\alpha_{tt}B\sigma - I = (\alpha_{tt}\beta_{ij}\sigma)_{n\times n} - I$ 的(1, 2)-块 $\alpha_{tt}\sigma$ 的 F-秩为 d,从而 $\mathrm{rank}_F(\alpha_{tt}B\sigma - I) \geq d$. 于是

$$\begin{aligned} 2(n-1)d &= \mathrm{rank}_F(T_1 - I) \\ &= \mathrm{rank}_F \begin{pmatrix} -I & B\sigma \\ \alpha_{21}B\sigma & \alpha_{22}B\sigma - I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{t=3}^{n} \operatorname{rank}_F(\alpha_{tt}B\sigma - I) \geq nd + (n-2)d$$
$$= 2(n-1)d.$$

这迫使

$$\operatorname{rank}_F \begin{pmatrix} -I & B\sigma \\ \alpha_{21}B\sigma & \alpha_{22}B\sigma - I \end{pmatrix} = nd,$$

且 $\operatorname{rank}_F(\alpha_{tt}B\sigma - I) = d$, $\forall 3 \leq t \leq n$. 对每个 $3 \leq t \leq n$, 有

$$\alpha_{tt}B\sigma - I = \begin{pmatrix} -I & \alpha_{tt}\sigma & O & \cdots \\ \alpha_{tt}\beta_{21}\sigma & \alpha_{tt}\beta_{22}\sigma - I & \alpha_{tt}\beta_{23}\sigma & \cdots \\ \vdots & O & \ddots & \vdots \\ \alpha_{tt}\beta_{n1}\sigma & \cdots & \cdots & \alpha_{tt}\beta_{nn}\sigma - I \end{pmatrix}$$

的秩为 d,而它的第(1, 2)-块 $\alpha_{tt}\sigma$ 的秩已经达到 d,故其中除左上角处在(i, j)-位置($1 \leq i$, $j \leq 2$)的四块以外,所有的块都是零. 特别所有的 $\beta_{ij} = 0$, $(i \neq j, \{i, j\} \neq \{1, 2\})$, 且 $\alpha_{tt}\beta_{ii}\sigma - I = 0$ 对所有的 $3 \leq i \leq n$ 成立. 对给定的 $i \geq 3$, $\alpha_{tt} = \sigma^{-1}\beta_{ii}$ 与 $t \geq 3$ 的选取无关,故所有的 $\alpha_{tt}(t \geq 3)$ 取同一个值 α. 同理,所有的 $\beta_{ii}(i \geq 3)$ 取同一个值 β. 于是 $\sigma = \beta^{-1}\alpha^{-1}$ (注意 $\alpha \in K_R^*$ 与 $\beta \in K_L^*$ 交换), $T_1 = (A \otimes B)\sigma = A\alpha^{-1} \otimes B\beta^{-1}$, 可用 $A\alpha^{-1}$、$B\beta^{-1}$分别代替 A、B 化为 $T_1 = A \otimes B$ 的情形, $\sigma = 1$, 并且 $\alpha_{ii} = 1$ 和 $\beta_{ii} = 1$ 对 $3 \leq i \leq n$ 成立. 现在 A、B 都具有准对角形式 $\operatorname{diag}(C, I, \cdots, I)$, 其中 $C \in \mathrm{Mat}_{2d}F$. 由准对角阵 $T_1 - I = \operatorname{diag}(\cdots, B - I, \cdots)$ 幂零知 $B - I$ 幂零. 又 $\operatorname{rank}_F(B - I) = d$, 故 B 是 SL(n, K_L)中的平延. 将这一结论用于

$$\tau T_1 \tau = B \otimes A \in \tau N \tau = \mathrm{SL}(n, K_L) \otimes \mathrm{SL}(n, K_R)$$

知 A 是 SL(n, K_R)的平延,如所欲证. ▌

引理 7.2.6 设 $K = E = F$ 是域, n、$r \geq 2$, $g_0 \in \mathrm{GL}(nr, F) \backslash \Gamma_1$. 对自然数 $m < n$ 及 $S \in \mathrm{Mat}_{(n-m)\times m}K$, 记

$$T_0(S) = \begin{pmatrix} I^{(m)} & O \\ S & I \end{pmatrix} \otimes I^{(r)} \in \mathscr{N}_1 = \mathrm{SL}(n, F) \otimes I,$$

$$T_1(S) = g_0 T_0(S) g_0^{-1}.$$

如果存在 $\mathrm{Mat}_{(n-m)\times m}F$ 的一个加法子群 M,使 $T_1(S) \in \Gamma_1$ 对所有的 $S \in M$ 成立,则下列结论之一成立:

(i) 所有的 $T_1(S)(S \in M)$同时含于 $\mathscr{N}_1 = \mathrm{SL}(n, F) \otimes I$.

(ii) 所有的 $T_1(S)(S \in M)$同时含于 $\mathscr{N}_2 = I \otimes \mathrm{SL}(r, F)$.

(iii) $\mathrm{char}F = 2, |M| = 2, T_1(S) = A \otimes B \in N$ (对 $0 \neq S \in M$),其中 $A \neq I, B \neq I$. 且当 F 是完全域,或当 $T_1(S)$的第一行等于$(1, 0, \cdots, 0)$时,可选 $A^2 = I$, $B^2 = I$,此时设矩阵 $A-I$、$B-I$ 的秩分别为 t_1、t_2,则

$$r\mathrm{rank}S = \mathrm{rank}(T_1(S) - I) = t_1 r + t_2 n - 2t_1 t_2.$$

(iv) $\mathrm{char}F = 2, |M| = 2, T_1(S) \in \Gamma\tau$ (对 $0 \neq S \in M$),这仅当 $n = r = 2\mathrm{rank}S + 1$ 时才可能发生,且此时 $T_1(S) = (I \otimes B)\tau(I \otimes B)^{-1}$ 成立,对某个 $B \in \mathrm{GL}(n, F)$.

证明 首先,当 $\mathrm{char}F \neq 2$ 时,对加法子群 M 必有 $|M| > 2$,故上述 $M = 2$ 的情形(iii)和(iv)只可能对 $\mathrm{char}F = 2$ 发生. 事实上,对 $\mathrm{char}F \neq 2$ 的情形,只要有一个 $S_0 \neq 0$ 使 $T_1(S_0) \in \Gamma_1$,则对 S_0 生成的加法子群 M 中的所有矩阵 $S = kS_0$ (k 是任意整数)都有 $T_1(S) = T_1(S_0)^k \in \Gamma_1$. 所以当 $\mathrm{char}F \neq 2$ 时,只需要求有一个 $S_0 \neq 0$ 使 $T_1(S_0) \in \Gamma_1$,则引理条件中的 M 存在且 $|M| > 2$.

由 $T_0(S)$的相应性质易推知 $T_1(S)$的下列性质: $(T_1(S) - I)^2 = 0$, $\mathrm{rank}(T_1(S) - I) = r\mathrm{rank}S$,且对 S_1、$S_2 \in M$ 有

$$T_1(S_1)T_1(S_2) = T_1(S_1 + S_2) = T_1(S_1) + T_1(S_2) - I.$$

我们还需指出,如果有 $0 \neq S_1$、$S_2 \in M$ 使 $T_1(S_1) = A \otimes I \in \mathscr{N}_1$, $T_1(S_2) = I \otimes B \in \mathscr{N}_2$,则 $T_1(S_1 + S_2) = A \otimes B$ 既不含于 $\mathscr{N}_1$ 也不含于 $\mathscr{N}_2$. 因此,要证明引理的结论(i)或(ii)成立,只须证明每个 $T_1(S)(S \in M)$含于 $\mathscr{N}_1$ 或 $\mathscr{N}_2$.

先设所有的$T_1(S) \in \Gamma = \mathrm{GL}(n, F) \otimes \mathrm{GL}(r, F)$.

如果存在$1 \neq \lambda \in F^*$，使得对每个$S \in M$有$\lambda S \in M$,则可根据引理5.4.6,由$T_1(S)$、$T_1(\lambda S)$推出$T_1(S) \in \mathscr{N}_1$或$T_1(S) \in \mathscr{N}_2$. 进而所有的$T_1(S)$同时含于$\mathscr{N}_1$或同时含于$\mathscr{N}_2$,结论(i)或(ii)成立. 特别当$\mathrm{char}F \neq 2$时,取$\lambda = 2$即满足要求. 故$\mathrm{char}F \neq 2$时,引理结论(i)或(ii)总是成立. 当$\mathrm{char}F = 2$时,如果M是F的某个子域$E \neq F_2$上的向量空间,则取$1 \neq \lambda \in E^*$即可.

剩下的情况是:$\mathrm{char}F = 2$, 且M不是任何子域$E \neq F_2$上的向量空间. 当然M可以认为是F_2上的向量空间.

对任一$0 \neq S \in M$, 记$T_1(S) = A \otimes B$. 如果A是对角阵$\mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$,则$T_1(S) = \mathrm{diag}(a_1 B, \cdots, a_n B)$. 不妨用$a_1 B$代替$B$,用$a^{-1}A$代替$A$,化为$a_1 = 1$的情形. 由$T_1(S)^2 = \mathrm{diag}(B^2, \cdots, a_n^2 B^2) = I$知所有的$a_i = 1$,$T_1(S) = I \otimes B$, 其中$B^2 = I$. 如果$B$是对角阵,则由$B^2 \otimes A^2 = \tau^{-1}(A^2 \otimes B^2)\tau = I$同样可得$T_1 \in \mathrm{SL}(n, F) \otimes I$.

设有$S \in M$使$T_1(S_1) = A \otimes B$中的A与B都不是对角阵. 由$T_1(S)^2 = A^2 \otimes B^2 = I$知$A^2 = aI$和$B^2 = a^{-1}I$对某个$a \in F^*$成立. 如果$|M| = 2$, 则$S$是$M$中唯一的非零矩阵. 当$T_1(S)$的第一行为$(1, 0, \cdots, 0)$时显然可以取$a = 1$,$A^2 = I$,$B^2 = I$. 当$F$是完全域时,存在$\lambda \in F^*$使$\lambda^2 = a$. 用$\lambda^{-1}A$、$\lambda B$分别代替$A$、$B$,仍可使$A^2 = I$,$B^2 = I$. 记$t = \mathrm{rank}S$, $t_1 = \mathrm{rank}(A - I)$, $t_2 = \mathrm{rank}(B - I)$, 则有$P_1 \in \mathrm{GL}(n, F)$, $P_2 \in \mathrm{GL}(r, F)$分别将$A$、$B$共轭到

$$A_0 = P_1 A P_1^{-1} = \begin{pmatrix} I & O & O \\ O & I & O \\ I^{(t_1)} & O & I \end{pmatrix},$$

$$B_0 = P_1 B P_1^{-1} = \begin{pmatrix} I & O & O \\ O & I & O \\ I^{(t_2)} & O & I \end{pmatrix},$$

于是 $tr = \mathrm{rank}(T_0(S) - I) = \mathrm{rank}(A_0 \otimes B_0 - I) = t_1r + t_2n - 2t_1t_2$. 引理结论(iii)成立.

在 $\mathrm{char}F = 2$ 但 $|M| > 2$ 的情形,我们证明:如果所有的 $T_1(S)(S \in M)$ 含于 Γ,则引理的结论(i)或(ii)仍成立.若不然,则有 $S_1 \in M$ 使 $T_1(S_1) = A_1 \otimes B_1$ 中的 A_1、B_1 都不是对角阵.由于 $|M| > 2$,还有 $0 \neq S_2 \in M$ 使 $S_2 \neq S_1$,从而 $S_3 = S_1 + S_2 \neq 0$. 对 $t = 1, 2, 3$ 分别记

$$T_1(S_t) = A_t \otimes B_t,\ A_t = (a(t)_{ij})_{n\times n}.$$

则

$$T_1(S_3) = T_1(S_1)T_1(S_2) = I + T_1(S_1) + T_1(S_2),$$

$$T_1(S_1) + T_1(S_2) + T_1(S_3) = I.$$

比较等式两端对应的块,得

$$\sum_{t=1}^{3} a(t)_{ij}B_t = 0\ (\forall i \neq j),\quad \sum_{t=1}^{3} a(t)_{ii}B_t = I\ (\forall i).$$

如果 B_1、B_2 在 F 上线性相关,$B_2 = \lambda B_1$ 对某个 $\lambda \in F^*$ 成立,不妨写 $T_1(S_2) = \lambda A_2 \otimes B_1$ 代替 $A_2 \otimes B_2$,化为 $B_2 = B_1$ 的情形.先设 A_3 不是对角阵,则有 $i \neq j$ 使

$$a(3)_{ij} \neq 0,\ B_3 = a(3)_{ij}^{-1}(a(1)_{ij} + a(2)_{ij})B_1 \in FB_1,$$

可设 $B_3 = B_1$. 再由 $(a(1)_{11} + a(2)_{11} + a(3)_{11})B_1 + I = 0$ 可知 $B_1 \in F^*I$,这与原假设 B_1 不是对角阵相矛盾.再设 A_3 是对角阵,从而可设 $A_3 = I$, $B_3^2 = I$. 此时,对所有的 $i \neq j$ 有 $a(1)_{ij}B_1 = a(2)_{ij}B_1$,从而 $a(1)_{ij} = a(2)_{ij}$, A_1 与 A_2 的非对角部分相等.而对每个 $1 \leq i \leq n$, $B_3 = (a(1)_{ii} + a(2)_{ii})B_1 + I$, $I = B_3^2 = (a(1)_{ii} + a(2)_{ii})^2B_1^2 + I$,这又迫使 $a(1)_{ii} = a(2)_{ii}$. 于是 $A_1 = A_2$, $T_1(S_1) = T_1(S_2)$, $T(S_3) = I$,这与原假定 $S_3 \neq 0$ 相矛盾.如果 B_1 与 B_3(或 B_2 与 B_3)线性相关,同样也产生矛盾.

现在设 $B_t(t = 1, 2, 3)$ 在 F 上两两线性无关.如果对于 $i \neq$

j, $a(t)_{ij}(t=1, 2, 3)$ 这三个元素中有一个为 0,而另外两个不全为 0,从而全不为 0,则等式 $\sum_{t=1}^{3} a(t)_{ij}B_t = 0$ 说明 B_1、B_2、B_3 中有两个在 F 上线性相关,产生矛盾. 故对给定的 $i\neq j$, A_1、A_2、A_3 的第(i,j)-元同时为 0 或者同时不为 0. 由 A_1 为非对角阵知 A_2、A_3 都不是对角阵. 对 $\tau^{-1}(A_t\otimes B_t)\tau = B_t\otimes A_t$ 作同样的讨论,知 B_1、B_2、B_3 在同一个非对角位置的元素同时为 0 或同时不为 0, B_1、B_2、B_3 都不是对角阵. 任意取定 $k\neq l$ 使 $a(t)_{kl}\neq 0, \forall t=1,2,3$. 不妨记 $a(t)_{kl}^{-1}A_t\otimes a(t)_{kl}B_t$ 代替 $A_t\otimes B_t$, 使 $a(t)_{kl}=1(t=1, 2, 3)$, 于是 $B_3 = B_1 + B_2$, 并且对任意的 $i\neq j$, 由 $a(3)_{ij}B_1 + a(3)_{ij}B_2 = a(3)_{ij}B_3 = a(1)_{ij}B_1 + a(2)_{ij}B_2$ 及 B_1、B_2 在 F 上线性无关知 $a(3)_{ij}=a(1)_{ij}=a(2)_{ij}$. 即 A_1、A_2、A_3 这三个矩阵的非对角部分完全相同. 对 $B_t\otimes A_t$ 作同样的讨论可知 B_1、B_2、B_3 的非对角部分也完全相同. 但由 $B_3 = B_1 + B_2$ 及 B_1、B_2 的非对角部分相同推出 B_3 的非对角元应当全为 0,B_3 应是对角阵(由 B_1、B_2、B_3 的非对角部分相同还推出 B_1、B_2、B_3 都是对角阵),产生矛盾.

这证明了:当 $|M|>2$ 时且所有的 $T_1(S)\in\Gamma(\forall S\in M)$ 时,每个 $T_1(S)\in\Gamma(S\in M)$ 只能含于 $\mathscr{N}_1=\mathrm{SL}(n, F)\otimes I$ 或 $\mathscr{N}_2 = I\otimes\mathrm{SL}(r, F)$. 从而所有的 $T_1(S)$ $(S\in M)$ 同时含于 $\mathscr{N}_1$ 或同时含于 $\mathscr{N}_2$,引理结论(i)或(ii)成立.

以下设存在 $S_1\in M$ 使 $T_1(S_1)\in\Gamma\backslash\Gamma_1$. 此时 $n=r$, $\Gamma_1 = \Gamma\cup\Gamma\tau$, $T_1(S_1)=(A\otimes B)\tau\in\Gamma\tau$. $T_1(S_1)^2 = T_1(2S_1) = AB\otimes BA\in\Gamma$. 当 $\mathrm{char}F\neq 2$ 时, $T_1(2S_1)^2 = T_1(2(2S_1))$ 也含于 Γ,这导致 $AB\otimes BA$ 含于 $\mathrm{SL}(n, F)\otimes I$ 或 $I\otimes\mathrm{SL}(n, F)$, 从而 $AB = BA = I$. 但由于 $2S_1\neq 0$,$T_1(2S_1)\neq I$, 产生矛盾. 故 $T_1(S_1)\in\Gamma_0\tau$ 仅当 $\mathrm{char}F=2$ 时才有可能. 此时 $T_1(S_1)^2 = I$, 即 $(A\otimes B)\tau(A\otimes B)\tau = AB\otimes BA = I$, AB、$BA\in F^*I$, 从而 $AB=BA=aI\,(a\in F^*)$. 且 $AB\otimes BA = a^2I = I$, 故 $a=1$,$A=B^{-1}$. 于是 $T_1(S_1) = (I\otimes B)\tau(I\otimes B)^{-1}$ 与 τ 共轭,$n\cdot\mathrm{rank}S_1 = \mathrm{rank}(T_1(S_1)-I) = \mathrm{rank}(\tau - I) = n(n-1)/2$, $n = 2\mathrm{rank}S_1 + 1$. 如果 $|M|=2$,

则引理结论(iv)已成立.

以下设 $\mathrm{char}F=2$ 且 $|M|>2$，我们证明不可能有 $S_1\in M$ 使 $T_1(S_1)\in\Gamma\tau$. 若不然，按上面所证，有 $B_0\in\mathrm{SL}(n,F)$ 使

$$T_1(S_1)=(I\otimes B_0)\tau(I\otimes B_0)^{-1}.$$

不妨用 $(I\otimes B_0)^{-1}g_0$ 代替 g_0，从而用 $(I\otimes B_0)^{-1}T_1(S)(I\otimes B_0)$ 代替 $T_1(S)$，$\forall S\in M$，化为 $T_1(S_1)=\tau$ 的情形. 在 M 中另取非零的 $S_2\neq S_1$，则 $S_1+S_2\neq 0$. 如果 $T_1(S_2)\in\Gamma\tau$，则 $T_1(S_1+S_2)=T_1(S_1)T_1(S_2)\in\Gamma$. 故总可选 $0\neq S_2\in M$ 使 $T_1(S_2)\in\Gamma$. 记 $T_1(S_2)=A\otimes B$，则由 $T_0(S_1)$ 与 $T_0(S_2)$ 可交换知 $T_1(S_1)=\tau$ 与 $T_1(S_2)=A\otimes B$ 可交换. 即 $A\otimes B=\tau^{-1}(A\otimes B)\tau=B\otimes A$. 从而 $B=cA$ 对某个 $c\in F^*$ 成立. 且由 $(T_0(S_2)-I)(T_0(S_1)-I)=0$ 知 $(T_1(S_2)-I)(T_1(S_1)-I)=0$，即 $(c(A\otimes A)-I)\times(\tau-I)=0$. 我们有 $T_1(S_2)^2=c^2(A^2\otimes A^2)=I$，故 $A^2=c^{-1}I$. 取 F 的一个扩域 K_1 使存在 $\lambda\in K_1^*$ 满足 $\lambda^2=c$. 记 $A_1=\lambda A\in\mathrm{SL}(n,K_1)$，则 $T_1(S)=A_1\otimes A_1$，$A_1^2=I$. 记 $t_1=\mathrm{rank}(A_1-I)$. 则存在 $P_0\in\mathrm{GL}(n,K_1)$ 将 A_1 共轭到

$$A_0=P_1A_1P_1^{-1}=\begin{pmatrix} I & O & O\\ O & I & O\\ I^{(t_1)} & O & I\end{pmatrix}.$$

用 $P_0\otimes P_0$ 对等式 $(A_1\otimes A_1-I)(\tau-I)=0$ 两端作共轭得 $(A_0\otimes A_0-I)(\tau-I)=0$，即 $(A_0\otimes A_0-I)\tau=A_0\otimes A_0-I$. 于是对任意的 $v\in\mathrm{Mat}_{1\times n^2}F$ 有 $v(A_0\otimes A_0-I)\tau=v(A_0\otimes A_0-I)$. 将 v 写成矩阵 $[v]\in\mathrm{Mat}_nF$ 的形式，则

$$(A_0'[v]A_0-[v])'=A_0'[v]A_0-[v].$$

即 $A_0'[v]A_0-[v]$ 是对称方阵. 但显然可选 n 阶方阵 $[v]$ 使 $A_0'[v]A_0-[v]$ 不对称. 例如，当 $t_1\geq 2$ 时取 $[v]=E_{1n}$，则 $A_0'[v]A_0-[v]=E_{n-t_1+1,n}$ 不是对称方阵. 当 $t_1=1$ 时取 $[v]=$

E_{12},则$A_0'[v]A_0-[v]=E_{n2}$不是对称阵.这就证明了当$|M|>2$时,所有的$T_1(S)\in\Gamma$.引理结论(i)或(ii)成立.从而引理得证. ▌

§ 7.3 SL(n, K_R)⊗SL(r, E_L)的扩群

本节证明定理 7.1.1a 和 7.1.1b,即定出

$$N = \mathrm{SL}(n,\ K_R) \otimes \mathrm{SL}(r,\ E_L)$$

在 GL(nrd, F)中的扩群.按定理假设,我们只解决以下情形:

(1) (定理 7.1.1a) $n > r \geq 2$, K 是任意体,F、E 是 K 的子体, $\dim_F K = d < \infty$, F 是 E 在 K 中的中心化子(注意,在这里并不需要要求 E 反过来是 F 的中心化子),且 F 与 E 在 K 中生成的子体等于 K.

(2) (定理 7.1.1b) $K = E$, F 是 K 的中心,n, $r \geq 2$, 且排除 $n = r = 2$ 的情形.当 $n < r$ 时,可用

$$\tau^{-1}N\tau = \mathrm{SL}(r,\ K_L) \otimes \mathrm{SL}(n,\ K_R)$$

代替 N 化为 $n > r$ 的情形.因此不妨设 $n \geq r$. 又因 $n > r$ 的情形已在(a)中处理,故这里只处理 $n = r \geq 2$ 的情形,且当 K 为非交换体时,设 $n = r \geq 3$.

设 X 是 N 在 GL(nrd, K)中的任一扩群,如果 $N \trianglelefteq X \leq \Gamma_1$,则定理已成立.故设 $X \not\leq \Gamma_1$. 只要能从 X 中找到

$$g_1 = (A_{ij})_{n\times n} \notin \Gamma_1 \text{ 使 } A_{1j} = 0 \text{ 对所有的 } 2 \leq j \leq n \text{ 成立},$$

则由下面的引理可立即得出定理的结论.

引理 7.3.1 设 K、E、F 如上所述,$n \geq 3$,

$$N = \mathrm{SL}(n,\ K_R) \otimes \mathrm{SL}(r,\ E_L) < X \leq \mathrm{GL}(nrd, F).$$

如果存在 $g_1 = (A_{ij})_{n\times n} \in X\backslash\Gamma_1$, 使 $A_{1j} = 0$ 对所有的 $2 \leq j \leq n$ 成立,则下列结论之一成立:

(i) $X \trianglerighteq \mathrm{SL}(nrd,\ F)$;

(ii) $r = 2, E = F_2, K = F, X \trianglerighteq \mathrm{SL}(n, K_1)$，其中 $K_1 = \{aI^{(2)} + b\omega | a, b \in F\}$ 是 Mat_2F 的子环，式中 $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

证明 由引理 5.2.1 知 $X \geq \mathrm{SL}(n, S)$，S 是 $R = \mathrm{Mat}_{rd}F$ 的子环并且真包含 $I^{(r)} \otimes K_R$. 且由 X 在 $\mathcal{N}_2 = I \otimes \mathrm{SL}(r, K_L)$ 的共轭下不变，知 S 被 $\mathrm{SL}(r, K_L)$ 正规化. 由引理 5.3.6 知 $S = \mathrm{Mat}_{rd}F$，或当 $r = 2$ 且 $E = F_2$ 时 $S = K_1$. 在前一种情形下 $X \trianglerighteq \mathrm{SL}(nrd, F)$，结论(i)成立. 在后一种情形下 $X \geq \mathrm{SL}(n, K_1)$. 如果 $X \trianglerighteq \mathrm{SL}(n, K_1)$，则结论(ii)成立. 否则，$X$ 不含于 $\mathrm{SL}(n, K_1)$在 $\mathrm{GL}(n, R)$中的正规化子 Γ_2. 如果 F^* 不含三阶元 $\theta \neq 1$ 使 $\theta^3 = 1$，从而 $\theta^2 + \theta + 1 = 0$，则 K_1 是 FI 的扩体，且 $\dim_F K_1 = 2$，由第 6 章定理 6.1.1，即得 $X \geq \mathrm{SL}(2n, F)$. 现设存在 $1 \neq \theta \in F^*$ 使 $\theta^3 = 1$，K_1 中含有非零奇异方阵 $I + \theta\omega$，不是体. 如果可选这样的 θ 含于 F 的中心，也就是说，F 的中心含有一个子域 $F_2[\theta] \cong F_4$，则对任意 $i \neq j$，$\{T_{ij}(aI + a\theta\omega) | a \in F\} < \mathrm{SL}(n, K_1)$组成 $\mathrm{SL}(2n, F)$的一个根子群，X 的类型可由第 3 章定理 3.2.1 得出. 事实上，此时环 K_1 在 $\mathrm{GL}(2, F)$下共轭到 $\widetilde{K}_1 = \{\mathrm{diag}(a,b) | a, b \in F\}$，$\widetilde{K}_1$ 在 $\mathrm{Mat}_{1\times 2}F$ 上的作用可约，$\mathrm{SL}(n, K_1) = \mathrm{SL}(V_1/F) \times \mathrm{SL}(V_2/F)$ 对 V 的一个直和分解 $V = V_1 \oplus V_2$ 成立，其中 $\dim V_1 = \dim V_2 = n$. X 的子群 $\mathrm{SL}(n, K_1)(I^{(n)} \otimes \mathrm{SL}(2, F))$可将 V_1、V_2 互换. $\mathrm{SL}(n, K_1)$的正规化子 $\Gamma_2 = \mathrm{Stab}\{V_1, V_2\}$，当 $X \not\leq M$ 时，X 中有$\mathrm{SL}(2n, F)$中不定驻 V_1 或 V_2 的根子群. 由第 3 章中定理 3.7.2a即可知 $X \geq \mathrm{SL}(2n, F)$.

在 $X \geq \mathrm{SL}(n, K_1)$ 的其余情况下，我们需要在 $X \not\leq \Gamma_2$ 中找出 $g_2 = (B_{ij})_{n\times n} \notin \Gamma_2$ 使 $B_{1j} = 0$，$\forall j \geq 2$. 只要这样的 g_2 存在，就可以利用引理 5.2.1 得 $X \geq \mathrm{SL}(n, S)$ 对某个 $S \supsetneqq K_1$ 成立，仍有 $X \trianglerighteq \mathrm{SL}(2n, F)$，结论(i)成立. 为证明这个 g_2 的存在性，我们先从 X 中任取 $g_0 = (B_{ij})_{n\times n} \notin \Gamma_2$. 用适当的 $g_0 z_1 \in X \backslash \Gamma_2 (z_1 \in \mathrm{SL}(n, K_1))$ 代替 g_0，可使 $B_{1j} (j \geq 2)$ 的第一行全为零，再用适当

的 $\mathrm{diag}(1, z_2)(z_2\in\mathrm{SL}(n-1, K_1))$右乘 g_0，可使 $B_{1j}(j\geq 3)$ 的第二行也全为零. 特别 $B_{1n}=O$. 于是 $T_1(\alpha)=g_0T_{n1}(\alpha)g_0^{-1}=(C_{ij})_{n\times n}\in X$ 中 $C_{1j}=0$ 对所有的 $j\geq 2$ 成立，且 $C_{11}=I$. 如果能选 α 使 $T_1(\alpha)\notin\Gamma_2$，则 $g_2=T_1(\alpha)$ 符合要求. 否则，所有的 $T_1(\alpha)\in\mathrm{SL}(n, K_1)$，可用适当的 $z\in\mathrm{SL}(n, K_1)$ 将 $T_1(I)$共轭到 $T_{n1}(I)$或 $T_{n-1,2}(\beta_1)T_{n2}(\beta_2)(\beta_1, \beta_2\in K_1$ 且在 F 上的秩都为 1). 在前一种情形，由 $T_{n1}(I)=(zg_0)T_{n1}(I)(zg_0)^{-1}$ 知 $g_2=zg_0$ 符合要求. 后一种情况的讨论复杂一些，在此从略. ▌

以下只须在 $X\backslash\Gamma_1$ 中找出所需的 g_1. 我们分 $n>r$ 和 $n=r$ 两种情形来证明 g_1 的存在性. 总可选 $g_1\in X_{W_k}\backslash\Gamma_1$ 使非负整数 $k\leq rd$ 最大，其中 X_{W_k} 是

$$W_k=\{(a_1, \cdots, a_{nrd})\in\mathrm{Mat}_{1\times nrd}F\,|\,a_j=0, \forall j>k\}$$

在 X 中的稳定子群，特别 $W_0=0, X_{W_0}=X$. 现在的目的是证明 $k=rd$. 设 $k<rd$，我们设法找出 $g\in X_{W_m}\backslash\Gamma_1$ 使 $m>k$，得出与 k 的最大性相矛盾.

引理 7.3.2 设 $n>r\geq 2, K, E, F$ 如定理 7.1.1a 所述，$\mathscr{N}_1=\mathrm{SL}(n, K_R)\otimes I_{(r)}<N, \mathscr{N}_1<Y\leq\mathrm{GL}(nrd, F)$ 且 $Y\not\leq\Gamma_1$. 则存在 $g_1=(A_{ij})_{n\times n}\in Y\backslash\Gamma_1$ 使 $A_{1j}=0$ 对 $2\leq j\leq n$ 成立.

证明 取 $g_0=(A_{ij})_{n\times n}\in Y_{W_k}\backslash\Gamma_1$ 使 k 最大. 需要证明的是 $k=rd$. 设 $k<rd$. 设法推出矛盾.

先设 $k=0$. 设 g_0 的第一行为 $u\in\mathrm{Mat}_{1\times nrd}F$，对应一个矩阵 $[u]\in\mathrm{Mat}_{r\times n}K$. 由 $n>r$ 知$[u]$的各列 $\beta_j\in\mathrm{Mat}_{r\times 1}K(1\leq j\leq n)$ 在 K 上线性相关，存在不全为 0 的 $\lambda_j\in K$ 使 $\sum_{j=1}^n\beta_j\lambda_j=0$. 存在 $P\in\mathrm{GL}(n, K)$ 使它的最后一列的元素依次为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. 于是$[u]P$ 的最后一列等于零. 取

$$z=I\otimes P_R\in\mathscr{N}_1=\mathrm{SL}(n, K_R)\otimes I,$$

其中 P_R 由在 P 中将所有的元素 $p_{ij}\in K$ 换成相应的 $(p_{ij})_R\in K_R$ 而得到. 则 $[uz]=[u]P$. uz 就是 $g_0z\in Y\backslash\Gamma_1$ 的第一行，它的最后

rd 个分量(对应于$[uz]$的最后一列)全都为零. 也就是说，$g_0z = (B_{ij})_{n\times n}$ 的块 B_{1n}的第一行为零. 于是

$$T_1 = (g_0z)(T_{n1}(I^{(d)}) \otimes I)(g_0z)^{-1} \in Y_{W_1}.$$

$k = 0$ 的最大性迫使 $T_1 \in \Gamma_1$. 但由引理 7.2.3 知这导致 $k = rd$. 产生矛盾. 这说明 $k = 0$ 不可能成立.

以下设 $1\leq k\leq r-1$，g_0 的前 k 行含于 W_k，前 k 个分量以外的分量都等于零. 记 g_0 的第 $k+1$ 行为 u，矩阵 $[u]\in \mathrm{Mat}_{r\times n}K$ 的右下角的 $(r-1)\times(n-1)$ 子矩阵为 C，则由 $n-1>r-1$ 知存在 $P_0\in \mathrm{SL}(n-1,K)$，使 CP_0 的最后一列等于零. 取 $P = \mathrm{diag}(1, P_0)\in \mathrm{SL}(n, K)$，则$[u]P$ 的最后一列中除第一行的元素以外的元素全为零. 设$[u]P$ 的最后一列的第一行的元素为 α. 如果 $\alpha = 0$，则$[u]P$ 的最后一列为零. 如果 $\alpha\neq 0$，用 $P\mathrm{diag}(I_{(n-2)}, \alpha,\alpha^{-1}) \in \mathrm{SL}(n, K)$ 代替 P 可使 $\alpha = 1$. 取 $z = P_R\otimes I\in \mathscr{N}_1$，则 uz 就是 $g_0z\in Y_{W_k}\backslash\Gamma_1$ 的第 $k+1$ 行，它的最后 rd 个分量组成的行向量为$(a, 0, \cdots, 0)$，其中 $a\in\{0,1\}\subseteq F$. 这也就是 $g_0z = (B_{ij})_{n\times n}$ 的块 B_{1n}的第 $k+1$ 行. B_{1n}的前 k 行全为零，第 $k+1$ 行除第一个分量以外全为 0，于是 $T_1 = (g_0z)(T_{n1}(I^{(d)}\otimes I)(g_0z)^{-1} \in Y_{W_{k+1}}$. k 的最大性迫使 $T_1\in\Gamma_1$. 由引理 7.2.3 知这导致 $k = rd$. 仍有矛盾.

这说明只可能 $k = rd$，$g_1 = g_0\in Y_{W_{rd}}\backslash\Gamma_1$ 乃为所求. ▌

定理 7.1.1a 的证明

当 $X\leq\Gamma_1$ 时定理的结论(i)成立. 否则，由引理 7.3.2 和 7.3.1 知定理 7.1.1a 的结论(ii)或(iii)成立. ▌

以下讨论 $n = r$ 且 $K = E$ 的情形：即证明定理 7.1.1b. 当 $K = E = F$ 是域且 $n = r = 2$ 时

$$N = \mathrm{SL}(2, F)\otimes \mathrm{SL}(2, F) = \Omega(4, F, Q), \nu(Q) = 2,$$

N 的扩群已在第 4 章中定出. 故设 $n = r\geq 3$.

仍取 $g_0 = (A_{ij})_{n\times n}\in X_{W_k}\backslash\Gamma_1$ 使 k 最大. 只要能证明 $k = nd$，

由引理 7.3.1 立即得到所需结论.

如果已经知道 $k\geq d+1$，很容易证明 $k=nd$.

引理 7.3.3 设 $n=r\geq 3, K=E, N=\mathrm{SL}(n, K_R)\otimes\mathrm{SL}(n, K_L)<X\leq\mathrm{GL}(n^2d, F)$，且 $X\not\leq\Gamma_1, g_0\in X_{W_k}\backslash\Gamma_1$ 且 k 最大. 如果 $k\geq d+1$，则 $k=nd$.

证明 设 u 是 g_0 的第 $(k+1)$ 行，C 是$[u]$的右下角的 $(n-2)\times(n-1)$ 子矩阵. 由 $n-1>n-2$ 知存在 $P_0\in\mathrm{SL}(n-1, K)$，使 CP_0 的最后一列为零. 取 $P=\mathrm{diag}(1, P_0)\in\mathrm{SL}(n, K)$，则$[u]P$ 的最后一列的元素依次为 $\alpha_1, \alpha_2, 0, \cdots, 0$. 如果 $\alpha_2\neq 0$，则还可用 $P\mathrm{diag}(I_{(n-2)}, \alpha_2, \alpha_2^{-1})\in\mathrm{SL}(n, K)$ 代替 P，化为 $\alpha_2=1$ 的情形. 于是总可设 $\alpha_2=0$ 或 1. 取 $z=P_R\otimes I\in\mathscr{N}_1<N$，则 uz 的最后 nd 个分量组成的行向量为$(\vec{\alpha}_1, a, 0, \cdots, 0)\in\mathrm{Mat}_{1\times nd}F$，其中$\vec{\alpha_1}\in\mathrm{Mat}_{1\times d}F$，$a=0$ 或 1，而 uz 的最后 $nd-d-1$ 个分量全是 0. uz 就是 $g_0z\in X_{W_k}\backslash\Gamma_1$ 的第 $k+1$ 行. 由 uz 的最后 $nd-d-1$ 个分量全为 0 及 $nd-d-1\geq nd-k$ 知

$$T_1(s)=(g_0z)(T_{n1}(sI^{(d)})\otimes I)(g_0z)^{-1}\in X_{W_{k+1}}$$

对所有的 $s\in F$ 成立. k 的最大性迫使所有这些 $T_1(s)\in\Gamma_1$. 当 $F\neq F_2$ 时，由引理 7.2.3 知这导致 $k=nd$. 当 $F=F_2$ 时，由 $T_1(1)\in X_{W_{k+1}}$ 及 $k+1\geq d+1+1=3$ 可用引理 7.2.2 得到 $T_1(1)\in\Gamma$，仍可由引理 7.2.3 得到 $k=nd$. ▌

以下只需处理 $k\leq d$ 的情形：我们的方法是：选取恰当的 $T_0\in N$ 使它将 $g_0\in X_{W_k}\backslash\Gamma_1$ 的前 $k+1$ 行定驻不动，于是 g_0T_0 的前 $k+1$ 行与 g_0 相同，$T_1=g_0T_0g_0^{-1}\in X$ 的前 $k+1$ 行与 $g_0g_0^{-1}=I$ 相同，$T_1\in X_{W_{k+1}}$. 当 $T_1\notin\Gamma_1$ 时，已经得到了与 k 的最大性相矛盾. 问题在于 $T_1\in\Gamma_1$ 的情形. 当 $T_0=A_0\otimes I$ 且 A_0 是平延时，由引理 7.2.3 可导出 $k=nd$. 但当 k 很小时不容易找到这样的 $T_0=A_0\otimes I$ 定驻 g_0 的前 $k+1$ 行. 我们取 T_0 为平延的张量积 $A_0\otimes B_0$ 来达到目的. 但这就需要讨论 $T_1=g_0(A_0\otimes B_0)g_0^{-1}\in\Gamma_1$ 是否导致 $k=nd$. 或者，先得出结论 $k\geq d+1$，再由引理7.3.3

得到 $k = nd$. 下面的引理就提供了这样的结论.

引理 7.3.4 设 $n = r \geq 3$, $N < X \leq \mathrm{GL}(n^2 d, F)$ 且 $X \not\leq \Gamma_1$, k 是使得集合 $X_{W_k} \setminus \Gamma_1$ 非空的最大的整数. 任意取定 $1 \leq i_1, j_1, i_2, j_2 \leq n$, 使 $i_1 \neq j_1, i_2 \neq j_2$, 并取定 $\delta \in K^*$. 对每个 $\alpha \in K$, 记

$$T_0(\alpha) = T_{i_1 j_1}(\alpha_R) \otimes T_{i_2 j_2}(-(\delta\alpha)_L) \in N.$$

如果有 $g_0 \in X \setminus \Gamma_1$ 使 $T_1(\alpha) = g_0 T_0(\alpha) g_0^{-1} \in \Gamma_1$ 对所有的 $\alpha \in K$ 成立, 当 $n = r = 4$ 且 $K = F_2$ 时, 还要求 $T_1(1) \in \Gamma$. 则

(i) 除 $n = r = 3$ 且 $K = F_2$ 的情形外, $k \geq (n-1)d - 1$;

(ii) 除 $n = r = 3$ 且 K 是域的情形外, $k = nd$.

引理 7.3.4 的证明较长, 我们先用它来完成定理 7.1.1b 的证明, 最后再补上这个引理的证明.

定理 7.1.1b 的证明

$n > r$ 的情形已在定理 7.1.1a 中解决了, 只须考虑 $n = r \geq 3$ 的情形. 记住, 此时 $E = K$, $F = Z(K)$.

取 $g_0 \in X_{W_k} \setminus \Gamma_1$ 使 k 最大, 当 $k \geq d + 1$ 时, 由引理 7.3.3 和 7.3.1 立即得出所需结论. 以下设 $k \leq d$, 设法推出矛盾.

我们约定将 g_0 的第 i 行记为 u_i, 而 $[u_i]$ 是 u_i 所对应的 K 上 n 阶方阵.

情况 1 $k = 0$. 但不包括 $K = F_2$ 且 $n = r = 3$ 的情形.

如果 $[u_1]$ 不可逆, 它的各列在 K 上线性相关, 存在 $P \in \mathrm{SL}(n, K)$ 使 $[u_1]P$ 的最后一列等于零. $[u_1]P = [u_1 z]$ 对 $z = P_R \otimes I \in \mathrm{SL}(n, K_R) \otimes I$ 成立. $u_1 z$ 就是 $g_0 z \in X \setminus \Gamma_1$ 的第一行, 它的最后 nd 个分量全为 0. 故

$$g(\alpha) = (g_0 z)(T_{n1}(\alpha) \otimes I)(g_0 z)^{-1} \in X_{W_1}$$

对所有的 $\alpha \in K_R^*$ 成立. $k = 0$ 的最大性迫使所有这些 $g(\alpha) \in \Gamma_1$. 当 $K \neq F_2$ 时, K_R^* 中至少含有两个不同的元素, 根据引理 7.2.3, 可由 $g(\alpha) \in \Gamma_1 (\forall \alpha \in K_R^*)$ 导出 $k = nd$. 当 $K = F_2$ 时, 由引理 7.2.1(iii) 知, 除所排除情形 $n = r = 3$ 外, $g(1) \in \Gamma_1$ 导致

$g(1)\in\Gamma$，仍可用引理 7.2.3 得出所需的结论 $k=n$.

现在设 g_0 的第一行所对应的矩阵 $[u_1]\in\mathrm{Mat}_nK$ 可逆. 存在 $P_0\in\mathrm{SL}(n, K)$ 使 $[u_1]P_0=\mathrm{diag}\,(\delta, 1, \cdots, 1)$，对某个 $\delta\in K^*$. 不妨一开始就用 $g_0((P_0)_R\otimes I)\in X\backslash\Gamma_1$ 代替 g_0，从而用$[u_1]P_0$ 代替$[u_1]$，化为 $[u_1]=\mathrm{diag}\,(\delta, 1, \cdots, 1)$的情形. 对任意 $\alpha\in K^*$，取 $T_0(\alpha)=T_{n,n-1}(\alpha_R)\otimes T_{n-1,n}(-\alpha_L)\in N$，则 $[u_1T_0(\alpha)]=T_{n,n-1}(-\alpha)[u_1]T_{n,n-1}(\alpha)=[u_1]$，故 $u_1T_0(\alpha)=u_1$. 即 $g_0T_0(\alpha)$ 的第一行与 g_0 相同，$T_1(\alpha)=g_0T_0(\alpha)g_0^{-1}\in X$ 的第一行与 $g_0g_0^{-1}=I$ 相同，等于$(1, 0, \cdots, 0)$. 从而所有的 $T_1(\alpha)\in X_{W_1}$. $k=0$ 的最大性迫使所有这些 $T_1(\alpha)\in\Gamma_1$. 除例外情形 $K=F_2$ 且 $T_1(1)\in\Gamma\tau$ 外，可由引理 7.3.4 得出结论 $k\geq(n-1)d-1\geq1$，与 $k=0$ 的最大性相矛盾. 设 $K=F_2$. 由引理 7.2.5 知 $T_1(1)\in\Gamma\tau$ 的情形仅当 $n=r=4$ 时可能出现. 此时 $[u_1]=I$ 在任意相似变换 $[v]\mapsto P[v]P^{-1}$ 下不变 $(P\in\mathrm{SL}(4, F))$. 从而 u_1 在 $P\otimes P'^{-1}\in N$ 的作用下不变. 特别地可取 $P=T_{4j}(1)\,(j=2, 3)$，则 g_0 的第一行 u_1 在 $z_j=T_{4j}(1)\otimes T_{j4}(1)\in N$ 的作用下不变，$T_j=g_0z_jg_0^{-1}\in X_{W_1}$. $k=0$ 的最大性迫使 $T_j\in\Gamma_1$. 注意 $z_j\,(j=2, 3)$ 是平延的张量积. 如果有 $j=2$ 或 3 使 $T_j\in\Gamma$，则可由引理 7.3.4 得出结论 $k\geq2$，从而 $k=n$. 否则，T_2、$T_3\in\Gamma\tau$，$T=T_2T_3=g_0z_{23}g_0^{-1}\in\Gamma$，其中 $z_{23}=z_2z_3=(I+E_{24}+E_{34})\otimes(I+E_{42}+E_{43})\in N$ 仍是平延的张量积. 仍可用引理 7.3.4 得到 $k=n$.

情况 2 $1\leq k\leq d$. 但不包括 $K=F_2$ 且 $n=r=3$ 的情形.

由 g_0 定驻 W_k 知 g_0 的前 k 行 $u_i\ (1\leq i\leq k\leq d)$ 中除前面 k 个分量以外，其余的分量都是 0，从而$[u_i]\ (1\leq i\leq k)$ 除第$(1, 1)$-元以外的元素都是 0. 记 $[u_{k+1}]$ 的右下角的 $n-1$ 阶子方阵为 C. 如果 C 不可逆，则存在 $P_0\in\mathrm{SL}(n-1, K)$，使 CP_0 的最后一列为零. 取 $P=\mathrm{diag}(1, P_0)\in\mathrm{SL}(n, K)$，则 $[u_{k+1}]P$ 的最后一列第 2 至第 n 行的元素都是零. 设 $[u_{k+1}]P$ 的最后一列第一行的元素为 $\alpha\in\dot{K}$. 如果 $\alpha\neq0$，则可以用 $P\mathrm{diag}(I_{(n-2)},\alpha,\alpha^{-1})\in\mathrm{SL}(n, K)$

代替 P,化为 $\alpha=1$ 的情形. 这样,$[u_{k+1}]P$ 的最后一列除第一行的元素为 0 或 1 外其余元素都是 0. 而 $[u_i]P=[u_i]$ 对 $1\leq i\leq k$ 成立. 取 $z=P_R\otimes I\in N$, 则 $[vz]=[v]P$, $\forall v\in V$. 特别由 $[u_{k+1}z]=[u_{k+1}]P$ 知 $u_{k+1}z$ 的最后 $nd-1$ 个元素全为零. u_iz 就是 $g_0z=(B_{ij})_{n\times n}\in X_{W_k}\backslash\Gamma_1$ 的第 i 行,特别,$u_{k+1}z$ 的最后 nd 个分量组成 B_{1n}的第 $k+1$ 行,其中除第一个元素为 0 或 1 外其余的分量都是 0. 于是可知

$$g(s)\in(g_0z)(T_{n1}(sI)\otimes I)(g_0z)^{-1}\in X_{W_{k+1}}$$

对所有的 $s\in F^*$ 成立. k 的最大性迫使所有这些 $g(s)\in\Gamma_1$. 当 $K\neq F_2$ 从而 $F\neq F_2$ 时,F^* 中至少有两个不同的元素,由引理 7.2.3得 $k=nd$. 当 $K=F_2$ 时,因为 $g(1)\in X_{W_{k+1}}$ 及 $k+1\geq 2$, 可用引理 7.2.2 由 $g(1)\in\Gamma_1$ 导出 $g(1)\in\Gamma$, 仍可用引理 7.2.3 得出所需的结论 $k=n$.

以下设 g_0 的第 $k+1$ 行所对应的矩阵 $[u_{k+1}]$ 的右下角的 $n-1$ 阶子方阵 C 可逆. 存在 $P_0\in\mathrm{SL}(n-1,K)$ 使 $CP_0=\mathrm{diag}(I_{(n-2)},\delta)$ 对某个 $\delta\in K^*$. 设

$$[u_{k+1}]=\begin{pmatrix}* & \alpha\\ \beta & C\end{pmatrix},$$

其中 $\qquad\alpha\in\mathrm{Mat}_{1\times(n-1)}K,\ \beta\in\mathrm{Mat}_{(n-1)\times 1}K,$

则 $$\begin{pmatrix}1 & -\alpha C^{-1}\\ 0 & I\end{pmatrix}[u]\begin{pmatrix}1 & 0\\ -C^{-1}\beta & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}* & O & O\\ O & I & O\\ O & O & \delta\end{pmatrix},$$

即有$[V]$上的相抵变换 $[v]\mapsto P_2[v]P_1(P_1, P_2\in\mathrm{SL}(n,K))$ 将 $[u_{k+1}]$ 变为对角阵 $\mathrm{diag}(*, I_{(n-2)},\delta)$, 且定驻所有的 $[u_i]=\mathrm{diag}(*, 0, \cdots, 0)$, $(1\leq i\leq k)$. 这个相抵变换对应于元素 $z_0=(P_1)_R\otimes(P_2^T)_L\in N$ 使 $[vz_0]=P_2[v]P_1$, $\forall v\in V$. 不妨用 $g_0z_0\in X\backslash\Gamma_1$ 代替 g_0, 从而用$[u_iz_0]$代替所有的$[u_i]$, 化为 $[u_{k+1}]=\mathrm{diag}(*, I_{(n-2)},\delta)$ 的情形,而 $u_i(1\leq i\leq k)$ 不变. 对每个 $\alpha\in K^*$,

取

$$T_0(\alpha) = T_{n,n-1}(\alpha_R) \otimes T_{n-1,n}(-(\delta\alpha)_L) \in N,$$

则 $T_0(\alpha)$在$[V]$上引起相抵变换

$$[v] \mapsto [vT_0(\alpha)] = T_{n,n-1}(-\delta\alpha)[v]T_{n,n-1}(\alpha).$$

这个相抵变换显然定驻所有的 $[u_i] = \mathrm{diag}(*, 0, \cdots, 0)(1 \leq i \leq k)$，并且还定驻 $[u_{k+1}] = \mathrm{diag}(\cdots, 1, \delta)$. 于是 $T_0(\alpha)$定驻 g_0 的前 $k+1$ 行，$T_1(\alpha) = g_0T_0(\alpha)g_0^{-1} \in X$ 定驻 W_{k+1}. k 的最大性迫使所有的 $T_1(\alpha)\in\Gamma_1$. 当 $K \neq F_2$ 时，由引理 7.3.4 得 $k \geq (n-1)d-1$. 除 $n=r=3$，并且 K 是域的情形外，$(n-1)d-1 \geq d+1$，从而可由引理 7.3.2 得 $k=nd$. 当 $K=F_2$ 且 $n=r\geq 4$ 时，由于 $T_1(1) \in \Gamma_1$ 定驻 W_{k+1}，而 $k+1\geq 2$，由引理 7.2.2 得 $T_1(1)\in\Gamma$，仍可用引理 7.3.4 得出结论 $k\geq 2$，从而 $k=n$.

还剩下 $K=F$ 是域，并且 $n=r=3$ 的情形. 此时 $k=1$. 记 $g_0 = (A_{ij})_{3\times 3}, g_0^{-1} = (\widetilde{A}_{ij})_{3\times 3}$，所有的块 A_{ij}、$\widetilde{A}_{ij}\in \mathrm{Mat}_3F$. 对每个下三角幂零矩阵 $S = (s_{ij})_{3\times 3} \in \mathrm{Mat}_3F$ (其中 $s_{ij}=0, \forall i \leq j$)，记

$$T_0(S) = (I+S)\otimes I \in \mathscr{N}_1,$$

$$T(S) = g_0T_0(S)g_0^{-1} = (B_{ij})_{3\times 3} \in X.$$

注意，$B_{13} = \sum_{1\leq j<i\leq 3} s_{ij}A_{1i}\widetilde{A}_{j3}$ 是一些方阵以 s_{ij}为系数的线性组合. 由于 g_0 定驻 W_1，$A_{1i}(2\leq i\leq 3)$ 的第一行为零，从而 B_{13}的第一行为零. 我们希望选取非零的 S，使 B_{13}的第二行的最后两个分量为 0. 记 $A_{1i}\widetilde{A}_{j3}$的第二行的最后两个分量组成的行向量为 β_{ij}，则使 $\sum_{1\leq j<i\leq 3} s_{ij}\beta_{ij} = 0$ 的三元数组(s_{21}, s_{31}, s_{32})的集合是一个齐次线性方程组的解集，它是 F 上的向量空间. 这个方程组由两个方程组成，而未知数的个数是 $3>2$，故解空间 $M\neq 0$. M 中的每一组解 s_{ij}对应于一个 S，使 $T(S) = (B_{ij})_{3\times 3} \in X_{W_1}$ 的块 B_{13}的第 2 行的最后两个元素为 0. 于是

$$g(S) = T(S)(T_{31}(1) \otimes I)\,T(S)^{-1} \in X_{W_2}.$$

$k = 1$ 的最大性迫使 $g(S) \in \Gamma_1$. 且由 $g(S)$定驻 W_2 知 $g(S) \in \Gamma$. 若可选 $S \in M$ 使 $T(S) \notin \Gamma_1$，则由引理 7.2.3 得 $k = 3$. 设 $T(S) \in \Gamma_1$ 对所有 $S \in M$ 成立. 则当 $F \neq F_2$时可由引理 7.2.4 得 $k \geq 3/2$，从而 $k \geq 2$，与 $k = 1$ 的最大性相矛盾.

情况 3 遗留情形：$K = F_2$，$n = r = 3$.

这是一个特殊的孤立的情形，需要较为繁琐而特别的处理，在此从略. 请参看文献[46]. ▌

在定理 7.1.1b 的证明过程中，引理 7.3.4 起着重要的作用，现在我们回过头来补出它的证明.

引理 7.3.4 的证明

存在与 α 无关的置换阵 P_1、$P_2 \in \mathrm{SL}(n, FI^{(d)})$ 将 $T_{i_1j_1}(\alpha_R)$、$T_{i_2j_2}(-(\delta\alpha)_L)$ 分别共轭到 $T_{n1}(\alpha_R)$、$T_{n1}(-(\delta\alpha)_L)$. 取 $z_0 = P_1 \otimes P_2 \in N$. 用 $g_0z_0 \in X\backslash\Gamma_1$ 代替 g_0，从而用 $z_0^{-1}T_0(\alpha)z_0$ 代替 $T_0(\alpha)$，可以化为 $i_1 = i_2 = n$ 且 $j_1 = j_2 = 1$ 的情形，即设 $T_0(\alpha) = T_{n1}(\alpha_R) \otimes T_{n1}(-(\delta\alpha)_L)$. 再取 $P_3 = \mathrm{diag}((\delta_L)^{-1}, \delta_L, I_{(n-2)}) \in \mathrm{SL}(n, K_L)$，$z_1 = I \otimes P_3$，用 $g_0z_1 \in X\backslash\Gamma_1$ 代替 g_0，从而用 $z_1^{-1}T_0(\alpha)z_1$ 代替 $T_0(\alpha)$，可以进一步化为 $T_0(\alpha) = T_{n1}(\alpha_R) \otimes T_{n1}(-\alpha_L)$ (即 $\delta = 1$) 的情形.

注意，$T_1(\alpha)T_1(\beta) = T_1(\alpha+\beta)$ 对任意 α、$\beta \in K$ 成立. 因此，映射 $K \to \Gamma_1/\Gamma$，$\alpha \mapsto T_1(\alpha)(\bmod \Gamma)$是 K 的加法群到商群 Γ_1/Γ 中的同态. 而 $|\Gamma_1/\Gamma| \leq 2$，故当 $K \neq F_2$ 时，总存在 $\alpha \in F^*$ 使 $T_1(\alpha) \in \Gamma$. 当 $K = F_2$ 时，如果 $T_1 = T_1(1) \in \Gamma_1\backslash\Gamma = \Gamma\tau$，则 $T_1 = (A \otimes B)\tau$ 对某一对 A、$B \in \mathrm{SL}(n, 2)$ 成立，由 $T_0(1)^2 = I$ 知 $I = T_1^2 = AB \otimes BA$，$AB = BA = I$，$B = A^{-1}$，$T_1 = (A \otimes I)\tau(A \otimes I)^{-1}$ 与 τ 共轭，故 $n(n-1)/2 = \mathrm{rank}(\tau - I) = \mathrm{rank}(T_1 - I) = 2(n-1)$，这仅当 $n = 4$ 时才有可能. 而 $K = F_2$ 且 $n = r = 4$ 恰是被排除的例外情形. 除去这个例外情形之后，存在至少一个 $\alpha \in F^*$ 使 $T_1(\alpha) \in \Gamma$. 由引理 7.2.5 知 $T_1(\alpha) = A_1 \otimes B_1$，$A_1$、$B_1$

分别是 $\mathrm{SL}(n, K_R)$、$\mathrm{SL}(n, K_L)$中的平延. 存在 $z\in N$ 将 $T_1(\alpha) = A_1\otimes B_1$ 共轭到 $zT_1(\alpha)z^{-1} = T_{n1}(I^{(d)})\otimes T_{n1}(-I^{(d)}) = T_0(1)$. 还存在 $z_0\in N$ 将 $T_0(\alpha) = T_{n1}(\alpha_R)\otimes T_{n1}(-\alpha_L)$ 共轭到 $z_0^{-1}T_0(\alpha)z_0 = T_{n1}(I^{(d)})\otimes T_{n1}(-I^{(d)}) = T_0(1)$. 于是 $\tilde{g}_0T_0(1)\tilde{g}_0^{-1} = T_0(1)$. 不妨用 $zg_0z_0\in X\backslash\Gamma_1$ 代替 g_0,化为 $g_0T_0(1)g_0^{-1} = T_0(1)$ 的情形. 记 $g_0 = (A_{ij})_{n\times n}$. 比较等式

$$g_0(T_0(1) - I) = (T_0(1) - I)g_0$$

两端的块可知 g_0 的块 $A_{1j}(2\leq j\leq n)$ 的右上角的 $(n-1)d$ 阶子方阵都为零. 换句话说,$A_{1j}(j\geq 2)$ 的前 $(n-1)d$ 行中前 d 列以外的元素全都是 0.

记 A_{1n}的前 $(n-1)d$ 行组成的子矩阵为$(\beta\ O^{((n-1)d)})$,其中 β 是 A_{1n}的左上角的 $(n-1)d\times d$ 矩阵.

当 K 是域时,$d=1$, $K=F$. 这时候 β 是 F 上的 $n-1$ 维列向量. 如果 $\beta=0$, 则 A_{1n}的前 $n-1$ 行都为零. 设 $\beta\neq 0$, 则存在 $\tilde{P}\in\mathrm{SL}(n-1, F)$ 使 $\tilde{P}\beta = (0, \cdots, 0, 1)'$. 取 $P = \mathrm{diag}(\tilde{P}, 1)\in\mathrm{SL}(n, F)$, 则 $\tilde{g}_0 = (I\otimes P)g_0\in X\backslash\Gamma_1$ 的第$(1, n)$块为 PA_{1n},它的前 $n-2$ 行全为零. 总之,可以找到 $\tilde{g}_0 = (B_{ij})_{n\times n}\in X\backslash\Gamma_1$ 使它的块 B_{1n}的前 $n-2$ 行全为零,于是 $g(s) = \tilde{g}_0(T_{n1}(s)\otimes I)\tilde{g}_0^{-1}\in X_{W_{n-2}}$, $\forall s\in F$.

如果可选 $s\in F^*$ 使 $g(s)\notin\Gamma_1$, 则由 $g(s)\in X_{W_{n-2}}$ 已得出 $k\geq n-2 = (n-1)d-1$, 恰如引理结论(i)所要求. 且当 $n\geq 4$ 时 $k\geq n-2\geq 2 = d+1$, 由引理 7.3.3 知存在 $g_1\in X_{W_n}\backslash\Gamma_1$, $k = n = nd$, 恰如引理结论(ii)所要求的.

设所有的 $g(s)\in\Gamma_1$, 则当 $F\neq F_2$ 时可由引理 7.2.3 得出 $k=n$. 当 $F=F_2$ 时,除 $n=r=3$ 的情形外,可知 $g(1)\in\Gamma$, 仍可由引理 7.2.3 得出所需的结论.

以下设 $d\geq 2$, 即 K 是非交换体. 此时我们希望证明 $(n-1)d\times d$ 矩阵 β 除第一列外其余元素都是 0,也就是说:g_0 的块 A_{1n}的前 $(n-1)d$ 行除去第一列以外的所有的元素都是零. 假如

这个结论已经成立，记 β 的第一列为 $\tilde{\beta}\in \mathrm{Mat}_{(n-1)d\times 1}F$. 注意，$K_L$ 中的矩阵（F 上的 d 阶方阵）的第一列取遍 $\mathrm{Mat}_{d\times 1}F$，从而 $\mathrm{Mat}_{(n-1)\times 1}K_L$ 中的矩阵（F 上的 $(n-1)d\times d$ 矩阵）的第一列取遍 $\mathrm{Mat}_{(n-1)d\times 1}F$. $\mathrm{SL}(n-1,K_L)$ 的左乘作用在 $\mathrm{Mat}_{(n-1)\times 1}K_L$ 的非零元的集合上可迁，从而在 $\mathrm{Mat}_{(n-1)d\times 1}F$ 的非零元的集合上可迁. 因此，当 $\tilde{\beta}\in \mathrm{Mat}_{(n-1)d\times 1}F$ 不为零时，存在 $\tilde{P}\in \mathrm{SL}(n-1, K_L)$ 使 $\tilde{P}\tilde{\beta}=(0, \cdots, 0, 1)'$ 除最后一个元素为 1 外前面所有元素都是 0. 取 $P=\mathrm{diag}(\tilde{P}, I^{(d)})\in \mathrm{SL}(n, K_L)$，$z=I\otimes P$，则 $\tilde{g}_0=zg_0=(B_{ij})_{n\times n}\in X\backslash\Gamma_1$ 的块 $B_{1n}=PA_{1n}$ 的前 $(n-1)d-1$ 行都是零. 当 $\tilde{\beta}=0$ 时，g_0 的块 A_{1n} 的前 $(n-1)d$ 行都是零，当然前 $(n-1)d-1$ 行也都是零. 总之，存在 $\tilde{g}_0=(B_{ij})_{n\times n}\in X\backslash\Gamma_1$ 使 B_{1n} 的前 $(n-1)d-1$ 行全是零，从而 $g(s)=\tilde{g}_0(T_{n1}(sI)\otimes I)\tilde{g}_0^{-1}\in X_{W_{(n-1)d-1}}$ 对所有的 $s\in F^*$ 成立. K 是非交换体，从而是无限集合，由 $\dim_F K=d<\infty$ 知 F 是无限集合，F^* 也是无限集合. 如果存在 $s\in F^*$ 使 $g(s)\notin\Gamma_1$，则 $k\geq(n-1)d-1=d+((n-2)d-1)\geq d+1$，由引理 7.3.3 得 $k=nd$. 如果所有的 $g(s)\in\Gamma_1$，由引理 7.2.3 仍得 $k=nd$.

以下只须再设法证明 A_{1n} 的前 $(n-1)d$ 行除第一列以外的元素全是 0，即证明 β 除第一列以外的元素全是 0. 记

$$A_{1n}=\begin{pmatrix}\beta & O^{((n-1)d)}\\ * & \gamma\end{pmatrix},\ A_{11}=\begin{pmatrix} * & \beta_1\\ * & *\end{pmatrix},$$

其中 β、$\beta_1\in \mathrm{Mat}_{(n-1)d\times d}F$，$\gamma=\mathrm{Mat}_{d\times(n-1)d}F$. 比较等式 $g_0(T_0(1)-I)=(T_0(1)-I)g_0$ 两端的(1,1)-块，可知 $\beta_1-\beta=0$，$\beta_1=\beta$. 对每个 $\alpha\in K_R^*$，存在 $s\in F^*$ 使 $T_1(s\alpha)=g_0T_0(s\alpha)g_0^{-1}\in\Gamma$，由引理 7.2.5 知 $T_1(s\alpha)$ 具有形式 $A\otimes B=(a_{ij}B)_{n\times n}$，$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 与 B 分别是 $\mathrm{SL}(n, K_R)$、$\mathrm{SL}(n, K_L)$ 的平延. $T_1(s\alpha)-I=g_0(T_0(s\alpha)-I)g_0^{-1}$ 的前 nd 行组成的子矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} \beta_\alpha & O & \cdots & O \\ * & \gamma_\alpha & * & \cdots \end{pmatrix} g_0^{-1}$$

$$= (\alpha_{11}B - I, \alpha_{12}B, \cdots, \alpha_{1n}B),$$

其中 $\beta_\alpha = (\beta\alpha_R - \beta\alpha_L)s$，$\gamma_\alpha = s\gamma\alpha_R$.

C 的前 $(n-1)d$ 行组成的子矩阵等于 $(\beta_\alpha, O, \cdots, O)g_0^{-1}$，它的 F-秩等于 $\text{rank}_F(\beta_\alpha) \leq d$. 故 $\text{rank}_F C \leq 2d$. 特别所有的 $\alpha_{1j}B(2 \leq j \leq n)$ 的 F-秩 $\leq 2d$，从而这些 $\alpha_{1j}B$ 都不是满秩矩阵，故不可逆. 但 B 可逆，故 $\alpha_{1j} = 0$ 对所有的 $j \geq 2$ 成立. 又因 A 是平延，于是只可能 $\alpha_{11} = 1$. 这样，

$$\text{rank}_F C = \text{rank}_F(B - I, O, \cdots, O) = \text{rank}_F(B - I) = d.$$

由 C 的表达式知 $d = \text{rank}_F C \geq \text{rank}_F(\beta_\alpha) + \text{rank}_F(\gamma_\alpha)$. 由 β_α 是 $B - I \in \text{Mat}_n K_L$ 左上角的 $(n-1)d \times d$ 子矩阵知 $\beta_\alpha \in \text{Mat}_{(n-1)\times 1} K_L$，从而 $\text{rank}_F(\beta_\alpha) \leq d$ 是 d 的整倍数，只能等于 0 或 d.

如果存在 $\alpha \in K^*$ 使 $\beta_\alpha \neq 0$，从而 $\text{rank}_F(\beta_\alpha) = d$，再由 $d = \text{rank}_F C \geq \text{rank}_F(\beta_\alpha) + \text{rank}_F(\gamma_\alpha)$ 知 $\gamma_\alpha = s\gamma\alpha_R = 0$，从而 $\gamma = 0$. 也就是说，g_0 的块 A_{1n} 的最后 $(n-1)d$ 列全都是零. 考虑 GL(n^2d, F)上的变换 $\varphi: g \mapsto g'$，它将每个矩阵 g 映到自身在 F 上的转置矩阵 g'. 易见 φ 是 GL(n^2d, F)的反自同构，它将 $N = \text{SL}(n, K_R) \otimes \text{SL}(n, K_L)$ 映到 $\tilde{N} = \text{SL}(n, \tilde{K}_R) \otimes \text{SL}(n, \tilde{K}_L)$，其中 $\tilde{K}_R = \varphi(K_R)$，$\tilde{K}_L = \varphi(K_L)$，它们仍都是 $\text{Mat}_d F$ 的子体，且在 $\text{Mat}_d F$ 中互为中心化子. 而 $\varphi(\Gamma_1)$正是相对于 $\tilde{N}$ 的 Γ_1. $g'_0 = (B_{ij})_{n\times n} \in \varphi(X)\backslash\varphi(\Gamma_1)$ 的块 $B_{ij} = A'_{ji}$. 特别是 $B_{n1} = A'_{1n}$ 的后 $(n-1)d$ 行全为零. 取适当的置换阵 z_1、$z_2 \in \varphi(N)$ 可使 $g_2 = z_1 g'_0 z_2 \in \varphi(X)\backslash\varphi(\Gamma_1)$ 的$(1, n)$-块的前 $(n-1)d$ 行全为零，从而所有的 $g(s) = g_2(T_{n1}(sI) \otimes I)g_2^{-1} \in \varphi(X)(s \in F^*)$ 定驻 $W_{(n-1)d}$. 如果有 s 使 $g(s) \notin \varphi(\Gamma_1)$，对 $\varphi(N)$用引理 7.3.3 可知存

在$g_1 \in \varphi(X)_{W_{nd}} \backslash \varphi(\Gamma_1)$，再由引理7.3.1知$\varphi(X) \geq \mathrm{SL}(n^2d, F)$，从而$X \geq \mathrm{SL}(n^2d, F)$. 否则，所有的$g(s) \in \varphi(\Gamma_1)$，用引理7.2.3及7.3.1可得到同样的结论.

在剩下的情形里，$\beta_\alpha = s(\beta\alpha_R - \beta\alpha_L) = 0$，从而$\beta\alpha_R = \beta\alpha_L$对所有的$\alpha \in K^*$成立. 对每个$1 \leq i \leq (n-1)d$，记$\beta$的第$i$行为$w_i$，每个$w_i \in \mathrm{Mat}_{1\times d}F$等于某个$\theta_i \in K_R$的第一行$\vec{\theta}_i$，而$\beta\alpha_R - \beta\alpha_L$的第$i$行等于$w_i\alpha_R - w_i\alpha_L = \overrightarrow{\theta_i\alpha} - \overrightarrow{\alpha\theta_i} = 0$，从而$\theta_i\alpha = \alpha\theta_i$. 由$\alpha \in K^*$的任意性知$\theta_i$含于$k$的中心$F$，即$w_i = \vec{\theta}_i = (a_i, 0, \cdots, 0)$除第一个分量外其余的分量全都为0. 于是$\beta$的第一列以外的元素全都为0. 按前面已进行过的讨论，这导致$k \geq (n-1)d-1$. 这就完成了引理7.3.4的证明. ▌

§7.4　关于酉群的张量积的扩群的若干引理

本章剩下的论述是证明定理7.1.2和7.1.3，即定出两个酉群N_1、N_2的张量积$N = N_1 \otimes N_2$在线性群$\mathrm{GL}(nr, F)$中的扩群，其中$N_1 < \mathrm{U}(n, F, H_1)$和$N_2 < \mathrm{U}(r, F, H_2)$是同一个域$F$上关于同一个对合$J: a \mapsto \bar{a}$的两个酉群(或其换位子群). 这包括了如下几种情形：

(a) $N_1 = \mathrm{Sp}(n, F, H_1)$, $N_2 = \mathrm{Sp}(r, F, H_2)$，且不妨假定$n \geq r$.

(b) $\mathrm{char}F \neq 2$, $N_1 = \mathrm{Sp}(n, F, H_1)$, $N_2 = O(r, F, H_2)$.

(c) $\mathrm{char}F \neq 2$, $N_1 = \Omega(n, F, H_1)$, $N_2 = \Omega(r, F, H_2)$.

(d) $N_1 = \mathrm{SU}(n, F, H_1)$, $N_2 = \mathrm{SU}(r, F, H_2)$.

我们总不妨假定H_1具有第1章§1.4中所述的标准形：

$$H_1 = \begin{bmatrix} O & I^{(\nu)} & O \\ \rho I^{(\nu)} & O & O \\ O & O & \Delta^{(n-2\nu)} \end{bmatrix},$$

其中 $\nu=\nu(H_1)$，$\rho=\pm 1$，$\Delta=\mathrm{diag}(\delta_{2\nu+1},\dots,\delta_n)\in \mathrm{Mat}_{n-2\nu}F$ 是定号对角阵. 按定义，$\mathrm{U}(n, F, H_1)$是矩阵群 $\{A\in \mathrm{Mat}_nF \mid AH_1\overline{A}'=H_1\}$，但它也可看成行向量空间 $\mathrm{U}=\mathrm{Mat}_{1\times n}F$ 上关于内积 $f_1(x, y)=xH_1\overline{y}'$ 的酉变换群，而 ν 也就是这个内积 f_1 的 Witt 指数. 在定理 7.1.2 和 7.1.3 中，总假定 ν 相对于 r 不太小.

类似地，矩阵群 $\mathrm{U}(r, F, H_2)$也可以看成行向量空间 $W=\mathrm{Mat}_{1\times r}F$ 关于内积 $f_2(x, y)=xH_2\overline{y}'$ 的酉变换群. 设 $\overline{H}_2'=\varepsilon H_2$，$\varepsilon=\pm 1$. H_2 的 Witt 指数 $\nu(H_2)$也就是 f_2 的 Witt 指数，与 N_1 不同的是，在此允许 $\nu(H_2)$取任何非负整数值而不加任何限制. 对 H_2 的形式也并没有像对 H_1 那样严格的要求. 仅在 H_2 是交错方阵(即 $N_2=\mathrm{Sp}(r, F, H_2)$) 或 $\nu(H_2)=0$ 时，我们要求 H_2 必须是标准形. 注意，$\nu(H_2)=0$ 时的标准形是对角阵. 而在其他情形下，我们一般都设 H_2 是对角阵，而不管是否 $\nu(H_2)=0$，但有时也为了便于表示 N_2 中的幺幂元素而设 H_2 是标准形.

由于 F 是域，$\Gamma=\Gamma_0=\mathrm{GL}(n, F)\otimes\mathrm{GL}(r, F)$，$\Gamma_1=\Gamma$ (当 $n\neq r$) 或 $\Gamma_1=\Gamma\cup\Gamma\tau$ (当 $n=r$). 这里 τ: $\mathrm{Mat}_{r\times n}F\to\mathrm{Mat}_{n\times r}F$，$g\mapsto g'$ 表示矩阵的转置. 将 $[V]=\mathrm{Mat}_{r\times n}F$ 与 $[V]'=\mathrm{Mat}_{n\times r}F$ 都写成行向量空间 $V=\mathrm{Mat}_{1\times nr}F$ 后 $\tau\in\mathrm{GL}(nr, F)$，且具有矩阵 $\tau=(A_{ij}^{(n\times r)})_{r\times n}$，其中每个块 $A_{ij}=E_{ji}\in\mathrm{Mat}_{n\times r}F$ 除了(j, i)-元为 1 外，其余元素都是 0. 我们有 $\tau^{-1}(N_1\otimes N_2)\tau=N_2\otimes N_1$. 若能定出 $N_2\otimes N_1$ 在 $\mathrm{GL}(nr, F)$中的所有的扩群 X，则 $N_1\otimes N_2$ 的扩群就是所有的 $\tau X\tau^{-1}$，也就都知道了.

对 $N=N_1\otimes N_2$ 在 $\mathrm{GL}(nr, F)$中的任意扩群 X；记 $\widetilde{N}_1\otimes I=X\cap(\mathrm{SL}(n, F)\otimes I)$，$I\otimes\widetilde{N}_2=X\cap(I\otimes\mathrm{SL}(r, F))$. 则 X 是 $\widetilde{N}=\widetilde{N}_1\otimes\widetilde{N}_2$ 的扩群. $\widetilde{N}_i$ $(i=1, 2)$ 是 N_i 的扩群，当 $\nu(H_i)\geq 1$ 时，由第 4 章主要定理 4.1.1 知 $\widetilde{N}_i$ 正规化 N_i 或者是特殊线性群. 当 $\nu(H_i)=0$ 时，如果 $\widetilde{N}_i$ 不正规化 N_i，并且含有足够多的幺幂元素，则在后面的引理 7.4.3 中也证明了 $\widetilde{N}_i$ 是特殊线性群. 这样，问

题就变为求$\tilde{N}_1 \otimes \tilde{N}_2$在$GL(nr, F)$中的扩群$X \not\leq \Gamma_1$，其中$\tilde{N}_i (i=1, 2)$可以是酉群或其换位子群，也可以是特殊线性群. 如果$\tilde{N}_1$、$\tilde{N}_2$都是特殊线性群，X 已在 § 7.3 中定出. 而如果$\tilde{N}_1$ 或 $\tilde{N}_2$ 之一是特殊线性群，则 $\tilde{N}_1 \otimes \tilde{N}_2$ 的扩群也比 $N_1 \otimes N_2$ 的扩群更容易定出.

对 $N < X \leq GL(nr, F)$，当 $X \leq \Gamma_1$ 时定理已成立，以下只须考虑 $X \not\leq \Gamma_1$ 的情形. 为定出这样的扩群 X，我们千方百计在 X 中找到第 5 章引理 5.5.1 所说的元素 $g = (A_{ij})_{n \times n} \notin \Gamma_1$，满足条件：

当 $N_1 = Sp(n, F, H_1)$ 或 $SU(n, F, H_1)$时，$A_{1j} = 0$ 对所有的 $j \geq 2$ 成立；

当 $N_1 = \Omega(n, F, H_1)$(且$\nu \geq 2$)时，或者 $A_{1j} = A_{2j} = 0$ 对所有的 $j \geq 3$ 成立，或者 $A_{1j} = A_{i,\nu+1} = 0$ 对所有的 $j \geq 2$ 和 $i \neq \nu + 1$ 成立.

只要找到这样的 g_1，利用引理 5.5.1，7.3.1 以及引理 5.7.3 等就能得到所需的结果. 下面的引理 7.4.2 和 7.4.4 分别对$\nu \geq 3$ 和 $\nu = 2$ 的情况总结了由 g_1 的存在性到定理 7.1.2 和 7.1.3 的结论的推理过程. 这样，剩下的工作就在于怎样找出所需的 g_1. 在证明引理 7.4.2 和 7.4.4 之前，需要先处理一个更容易的特殊情形，即 $X \geq SL(n, F) \otimes N_2$ 的情形.

引理 7.4.1 设 $n \geq 3$，$SL(n, F) \otimes I^{(r)} < X \leq GL(nr, F)$，$X$ 被 $I^{(n)} \otimes N_2$ 正规化，且不含于 Γ_1. 如果存在 $g_1 = (A_{ij})_{n \times n} \in X \backslash \Gamma_1$ 包含至少一个块 $A_{ij} = 0$，则下列结论之一成立：

(i) $X \trianglerighteq SL(nr, F)$.

(ii) N_2 可约或非本原(仅对很小的 r 或 F 可能)，X 可约或非本原.

(iii) $N_2 = Sp(2, 2) = SL(2, 2)$，$X \trianglerighteq SL(n, 4)$.

(iv) $r = 2$ 或 4，$N_2 \leq O(r, F, H_2)(\nu(H_2) = 0)$ 在 $Mat_r F$ 中生成 $FI^{(r)}$的一个 r 次扩体 D，$X \geq SL(n, D)$.

(v) $N_2 = \Omega(4, F, H_2) = SL(2, F) \otimes SL(2, F)(\nu(H_2) = 2)$，$X \trianglerighteq SL(2n, F) \otimes SL(2, F)$.

证明 由引理 5.4.2 得 $X \geq \mathrm{SL}(n, S)$，S 是 $\mathrm{Mat}_r F$ 的子环，且真包含 $FI^{(r)}$. 且由 X 被 $I \otimes N_2$ 正规化，知 S 被 N_2 正规化. 于是由引理 5.3.4 知，除若干例外情形外，$S = \mathrm{Mat}_r F$，从而由引理 5.3.1知 $X \geq \mathrm{SL}(nr, F)$. 在引理 5.3.4 所说的例外情形下，本引理的结论(ii)～(v)之一成立. ▌

引理 7.4.2 设 $N = N_1 \otimes N_2 < X \leq \mathrm{GL}(nr, F)$，$\nu \geq 3$，$X \not\leq \Gamma_1$. 如果存在 $g_1 = (A_{ij})_{n\times n} \in X \backslash \Gamma_1$ 满足条件：

当 $N_1 = \mathrm{Sp}(n, F, H_1)$ 或 $\mathrm{SU}(n, F, H_1)$时，$A_{1j} = 0$ 对所有的 $j \geq 2$ 成立；

当 $N_1 = \Omega(n, F, H_1)(\mathrm{char} F \neq 2)$ 时，或者 $A_{1j} = A_{2j} = 0$ 对所有的 $j \geq 3$ 成立，或者 $A_{1j} = A_{i,\nu+1} = 0$ 对所有的 $j \geq 2$ 和 $i \neq \nu + 1$ 成立. 则 X 属于定理 7.1.2 或 7.1.3 所说的类型之一.

证明 记 $\tilde{N}_1 \otimes I = X \cap (\mathrm{SL}(n, F) \otimes I)$. 如果$\tilde{N}_1$ 不含于 N_1 的正规化子 $\mathrm{GU}(n, F, H_1)$，则由定理 4.1.1 知 $\tilde{N}_1 = \mathrm{SL}(n, F)$. $X > \mathrm{SL}(n, F) \otimes N_2$，于是 X 属于引理 7.4.1 所说的类型之一，当然也是定理 7.1.2 或 7.1.3 所说的类型之一.

以下设 $\tilde{N}_1 \leq \mathrm{GU}(n, F, H_1)$. 由引理 5.5.1 知 X 包含某个 $T_0 = T_{21}(B)T_{\nu+1,\nu+2}(-C)$，其中 B、$C \notin FI^{(r)}$，且 $B + C \in FI^{(r)}$ 或 $B = C$. 我们利用引理 5.7.3 来确定 X 的子群 $Y = \langle N, T_0\rangle$. 引理 5.7.3 所说的子群

$$Z_0 = \langle \mathrm{SL}(\nu, F) \otimes I^{(r)}, T_{21}(PBP^{-1}) \mid P \in N_2\rangle$$

不含于 $\mathrm{GL}(\nu, F) \otimes \mathrm{GL}(r, F)$，且被 $I^{(\nu)} \otimes N_2$ 正规化. 当 $\nu \geq 3$ 时，除若干例外情形外，可由引理 7.4.1 得出结论 $Z_0 = \mathrm{SL}(\nu r, F)$. 例外情形仅在 r 或 F 很小的时候出现，此时 Z_0 的类型如引理 7.4.1 (ii) ～ (v) 所描述，而 X 属于定理 7.1.2 所说类型(iv)或定理 7.1.3 所说类型 (iv) ～ (vii). 在 $Z_0 = \mathrm{SL}(\nu r, F)$ 的情形下，由引理 5.7.3 可知 $X \geq \mathrm{U}'(nr, F, H_1 \otimes H_2)$，或当 N_1、N_2 都是辛群时 $X \geq \Omega(nr, F, Q)$. 这样的 X 已在定理 4.1.1 中定出，它正

规化 $U'(nr, F, H_1 \otimes H_2)$ 或 $\Omega(nr, F, Q, L)$或 $SL(nr, F)$. ▌

下面讨论引理 7.4.2 所漏掉的 $\nu = 2$ 的情形. 在定理 7.1.2 和 7.1.3 的条件中所包括的 $\nu=2$ 的情形只有 $N_1 = Sp(4, F, H_1)$，且 $N_2 = Sp(r, F, H_2)(r = 2, 4)$ 或 $O(r, F, H_2)(r = 2, 3)$. 我们也就只对这样的情形进行讨论. 为了定出 $N = Sp(4, F, H_1) \otimes N_2$ 的扩群，我们先建立一个与引理 7.4.1 类似的引理，讨论 $SL(2, F) \otimes N_2$ 的扩群.

在此我们仍然记 $R = \mathrm{Mat}_r F$. 且将 $\mathrm{Mat}_{4r}F$ 看作 $\mathrm{Mat}_4 R$，其中的矩阵写成分块形式 $(A_{ij})_{4\times 4}$，使所有的块 $A_{ij} \in R$.

引理 7.4.3 设 $N_2 = Sp(r, F, H_2)(r = 2$ 或 $4)$，或 $N_2 = O(r, F, H_2)(r = 2$ 或 $3, \mathrm{char}F \neq 2)$，但是排除 $N_2 = O(r, F, H_2)$ 可约或非本原的情形. X 是 $GL(2, F) \otimes I^{(r)}$ 的扩群，且被 $I^{(2)} \otimes N_2$ 正规化.

(1) 如果 X 包含一个 $\mathrm{diag}(A_0, I) \in GL(2r, F)$，其中 $A_0 \in GL(r, F)\backslash FI^{(r)}$. 则下列结论之一成立：

(i) $X \trianglerighteq SL(2r, F)$.

(ii) $N_2 = Sp(2, 2) = SL(2, 2)$，$X \geq SL(2, 4)$.

(iii) $r = 2$，$N_2 \leq O(2, F, H_2)(\nu(H_2) = 0)$ 在 $\mathrm{Mat}_2 F$ 中生成 $FI^{(2)}$的一个 2 次扩域 D，$X \geq SL(2, D)$.

(2) 设 X 包含一个 $T_{21}(A_0)$，其中 $A_0 \in R = \mathrm{Mat}_r F\backslash FI^{(r)}$. 记

$$\Delta_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

则下列结论之一成立：

(i) $X \trianglerighteq SL(2r, F)$，特别 X 包含所有的 $\mathrm{diag}(A, I)$和 $\mathrm{diag}(I, A)$，$\forall A \in SL(r, F)$.

(ii) $N_2 = O(r, F, H_2)$，$X \trianglerighteq Sp(2r, F, H_0 \otimes H_2)$，特别，$X$ 包含所有的 $\mathrm{diag}(A, H_2(A')^{-1}H_2^{-1})$，$\forall A \in SL(r, F)$.

(iii) $N_2 = Sp(4, F, H_2)$，$X \trianglerighteq \Omega(8, F, \Delta_0 \otimes H_2)$. 或当 $\mathrm{char}F = 2$ 且 $N_2 = Sp(r, F, H_2)$ 时 $X \trianglerighteq Sp(4r, F, H_0 \otimes H_2)$.

X 包含所有的 $\mathrm{diag}(A, H_2(A')^{-1}H_2^{-1})$, $\forall A \in \mathrm{SL}(4, F)$.

(iv) $N_2 = \mathrm{Sp}(2, 2) = \mathrm{SL}(2, 2)$ 正规化 $FI^{(2)}$在 Mat_2F 中的二次扩域 $D = F_4$, $X \geq \mathrm{SL}(2, D)$.

(v) $r = 2$, $N_2 = O(2, F, H_2)(\nu(H_2) = 0)$ 在 Mat_2F 中生成 $FI^{(2)}$的一个 2 次扩域 D, $X \geq \mathrm{SL}(2, D)$.

(vi) $\mathrm{char}F = 2$, $N_2 = \mathrm{Sp}(4, F, H_2)$, X 正规化 $G = \Omega(8, F, \Delta_0 \otimes H_2)$ 的不可约子群 Ω_7,包含

$$I^{(2)} \otimes N_2 = \{\mathrm{diag}(A, H_2(A')^{-1}H_2^{-1}) \mid A \in \mathrm{Sp}(4, F, H_2)\}.$$

证明 (1) 记 Z_0 为所有的 $PA_0P^{-1}(P \in N_2)$生成的群. 则对每个 $A \in Z_0$ 有 $g = \mathrm{diag}({}^*A, I) \in X$, 从而

$$g^{-1}T_{21}(I^{(r)})g = T_{21}(A) \in X.$$

进而 $T_{21}(B) \in X$ 对 Z_0 生成的加群 S 中任意矩阵 B 成立. S 是环且被 N_2 正规化,属于引理 5.3.4 所列的类型之一. 同时 X 还包含所有的 $T_{12}(B)(B \in S)$. 于是 $X \geq \mathrm{SL}(2, S)$. 当 $S = R = \mathrm{Mat}_rF$ 时 $X \geq \mathrm{SL}(2r, F)$. 否则,$S$ 是引理 5.3.4 的例外情形(i)或(iv)所述的 F 的 2 次扩域,本引理结论(ii)或(iii)成立.

(2) 记 $S = \{A \in R \mid T_{21}(A) \in X\} = \{A \in R \mid T_{12}(A) \in X\}$. 则 S 是在 N_2 共轭作用下不变的加群. 且对任意的 $\lambda \in F^*$ 和 $A \in S$, 取 $g = \mathrm{diag}(\lambda, 1) \otimes I^{(r)} \in \mathrm{GL}(2, F) \otimes I^{(2)} < X$, 得 $g^{-1}T_{21}(A)g = T_{21}(\lambda A) \in X$, $\lambda A \in S$. 可见 S 是 F-子空间. S 的类型已在引理 5.3.9 和 5.3.10 中定出了.

情况 1 $S = \mathrm{Mat}_rF$.

由引理 5.3.1 得 $X \geq \mathrm{SL}(2, S) = \mathrm{SL}(2r, F)$.

情况 2 $S \subsetneq \mathrm{Mat}_rF$, 且 $\mathrm{char}F \neq 2$, $N_2 = O(r, F, H_2)$.

按照引理 5.3.10 所述 S 的以下几种可能的类型分别讨论 X 的类型:

$S = M^-(r, F)H_2^{-1} \oplus FI$ 或 $S = \mathrm{sl}(r, F)$. 当 $r = 2$ 时只考虑 $\nu(H) = 0$ 的情况. 当 $r = 2$ 时,由 $I^{(2)} \in S$ 及 $\mathrm{Tr}I^{(2)} = 2 \neq 0$ 知

S 不可能是 $\mathrm{sl}(2, F)$，只能为 $S = M^-(2, F) \oplus FI$，S 是 FI 的二次扩域，$X \trianglerighteq \mathrm{SL}(2, S)$. 当 $r \geq 3$ 时，由引理 5.3.11 知 $X \geq G_0 = \Omega(2r, F, \Delta_0 \otimes H_2)$. X 还包含 $T_{21}(I)$ 非正规化 G_0，于是由定理 4.1.1 知 $X \geq \mathrm{SL}(2r, F)$. 但这导致 $S = \mathrm{Mat}_r F$，产生矛盾.

$S = M^+(r, F)H_2^{-1}$. 由引理 5.3.11 知此时

$$X \trianglerighteq \mathrm{Sp}(2r, F, H_0 \otimes H_2).$$

$S = M^+(r, F)H_2^{-1} \cap \mathrm{sl}(r, F)$. 这仅当 $\mathrm{char}F$ 整除 r 时才有可能. 为证明定理 7.1.3，只要用到 $r = 3 = \mathrm{char}F$ 的情形. 由于 $O(3, F_3, H_2)$ 的作用非本原，属于例外情形，我们假设 $|F| \geq 9$. 对每个 $s \in F^*$，取 X 中的元素 $T_1 = T_{21}(sE_{11} - sE_{22})$，$T_2 = T_{12}(-s^{-1}E_{11} + s^{-1}E_{22})$，则 $g(s) = T_2T_1T_2 \in X$，

$$\Lambda(s) = g(1)^{-1}g(s) = \mathrm{diag}(s, s, 1, s^{-1}, s^{-1}, 1) \in X.$$

由于 $|F| \geq 9$，可选 $s \neq \pm 1$，$s^2 \neq 1$. 取 $T_3 = T_{21}(E_{22} - E_{33}) \in X$，则 $\Lambda(s)^{-1}T_3\Lambda(s) = T_{21}(s^2E_{22} - E_{33}) \in X$，$s^2E_{22} - E_{33} \in S$ 的迹为 $s^2 - 1 \neq 0$，产生矛盾. 可见这种情况实际上不会出现.

情况 3　$S \neq \mathrm{Mat}_r F$，$r = 2$ 或 4，$N_2 = \mathrm{Sp}(r, F, H_2)$.

按照引理 5.3.9 所定出的 S 的可能类型分别讨论如下：

先设 $r = 2$. 此时 $S \supsetneqq FI = M_0(2, F)H_2^{-1}$. 当 $\mathrm{char}F \neq 2$ 时，迫使 $S = \mathrm{Mat}_2 F$，这与假设相矛盾. 当 $\mathrm{char}F = 2$ 时，$S \neq \mathrm{Mat}_2 F$ 仅当 $S = M^+(2, F)H_2^{-1}$，$X \trianglerighteq \mathrm{Sp}(4, F, H_0 \otimes H_2)$.

以下设 $r = 4$：先考虑 $S \supseteq M_0(r, F)H_2^{-1}$ 的情形. 由引理 5.3.11 可知 $X \geq \Omega(2r, F, \Delta_0 \otimes H_2)$. 由定理 4.1.1 可知 $X \trianglerighteq \mathrm{SL}(2r, F)$，或 $X \trianglerighteq \Omega(2r, F, \Delta_0 \otimes H_2)$，或当 $\mathrm{char}F = 2$ 时 $X \trianglerighteq \mathrm{Sp}(2r, F, H_0 \otimes H_2)$. 对应的 S 分别是 $\mathrm{Mat}_r F$、$M_0(r, F)$ 和 $M^+(r, F)$.

如果 $S \supseteq M^+(r, F)H_2^{-1}$，则由引理 5.3.11 可知 $X \geq \mathrm{Sp}(2r, F, H)$，其中 $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes H_2$. 由定理 4.1.1 可知 $X \trianglerighteq \mathrm{Sp}(2r,$

F, H) 或 $X \trianglerighteq \mathrm{SL}(2r, F)$. 特别当 $\mathrm{char}F \neq 2$ 且 $N_2 = \mathrm{Sp}(r, F, H_2)$ 时, $T_{21}(I) \in N$ 不正规化 $\mathrm{Sp}(2r, F, H)$, 此时必然是 $X \trianglerighteq \mathrm{SL}(2r, F)$.

剩下情形是 $\mathrm{char}F = 2$, $N_2 = \mathrm{Sp}(r, F, H_2)$, 且引理5.3.9的结论(iv)或(v)成立. 如果其中(v)成立, 即 $F = F_2$, 并且 $S \cong F_4$, 则 $X = \mathrm{SL}(2, S) = \mathrm{SL}(2, 4)$. 设引理 5.3.9(iv)成立, 即 $r = 4$, $S = \{AH_2^{-1} \mid A = (A_{ij})_{4\times4} \in M_0(r, F)$ 且 $\mathrm{Tr}A_{11} = \mathrm{Tr}A_{22} = 0\}$. 此时 X 所含的 $\{T_{21}(sE_{41} + sE_{32}) \mid s \in F\}$ 是 $G = \Omega(2r, F, \Delta_0 \otimes H_2)$ 的长根子群 T_{e_1, e_2}. 还可知 X 包含 T_{e_1, e_4} 和 T_{e_5, e_8}. G 的长根元素 $t_{e_5, e_8} \in X$ 将 T_{e_1, e_2} 共轭到 $T_{e_1, e_2+e_5} < X$. 进而 $T_{e_1, e_5} < X$. 按照§3.4中的记号, $V_X(e_1)$ 包含四维全奇异子空间 $\langle e_1, e_2, e_4, e_5\rangle$. 根据命题 3.4.2(3), $X \ngeq G$ 的唯一可能是 $X \trianglerighteq \Omega_7$. 注意, X 所含的 T_{e_1, e_5} 的矩阵形式是 $\{I^{(2)} \otimes T_{41}(s) \mid s \in F\}$, 它在 $I^{(2)} \otimes N_2$ 下的全体共轭生成 $I^{(2)} \otimes N_2 < X$. ▌

引理 7.4.4 设 $N = N_1 \otimes N_2 < X \leq \mathrm{GL}(4r, F)$, $N_1 = \mathrm{Sp}(4, F, H_1)$, $N_2 = \mathrm{Sp}(r, F, H_2)$, 或 $\mathrm{char}F \neq 2$ 且 $N_2 = O(r, F, H_2)$. 如果存在 $g_1 = (A_{ij})_{n\times n} \in X \backslash \Gamma_1$ 使 $A_{1j} = 0$ 对 $j = 2, 3, 4$ 成立. 则 X 属于定理 7.1.2 或 7.1.3 所说的类型之一.

证明 由引理 5.5.1 知: 当 $N_1 \neq \mathrm{Sp}(4, F_2, H_1)$ 时, X 包含 $T = T_{21}(B_0)T_{34}(-C_0)$, 其中 B_0、$C_0 \notin FI$, 且 $B_0 + C_0 \in FI$ 或 $B_0 = C_0$ 成立. 还可知道 $T_{31}(A) \in X$ 对 $A = B_0 + C_0$ 和 $A = B_0C_0$ 都成立. 当 $N_1 = \mathrm{Sp}(4, F_2, H_1)$ 时, X 包含 $T_0 = T_{31}(A_0) \times T_{21}(A_0)T_{34}(A_0)$, 其中 $A_0^2 = A_0 \notin FI$. 但我们可用 T_0 在 $I^{(4)} \otimes N_2$ 下的共轭生成的子群中的元素 $\widetilde{T}_0 \notin \mathrm{Sp}(4, F_2, H_1) \otimes I^{(r)}$ 代替 T_0, 也就是用 A_0 在 N_2 下的共轭所生成的加群 S 中的非纯量阵代替 A_0. S 的类型已在引理 5.3.9 和 5.3.10 中定出, 易见其中包含非纯量阵 $\widetilde{A}_0 \neq \widetilde{A}_0^2$. 这就可以避免所述的例外情况.

我们设法利用引理 5.7.3 来定出 X 的类型. 为此必须先计算群 $Z_0 = \langle \mathrm{SL}(2, F) \otimes N_2, T_{21}(B_0)\rangle$. Z_0 的类型已在引理 7.4.3

中得出.

记 $X_1=\{g=\mathrm{diag}(A,B)\in X\mid A,B\in \mathrm{SL}(2r,F)\}$，且定义 X_1 到 $\mathrm{SL}(2r,F)$ 中的群同态 φ_1、φ_2 将每个 $g=\mathrm{diag}(A,B)\in X_1$ 分别映到 $\varphi_1(g)=A$，$\varphi_2(g)=B$. 则 $Z_1=\varphi_1(X_1)=\varphi_2(X_1)\geq Z_0$.

(7.4.4.1) 若 $Z_1=\mathrm{SL}(2r,F)$，则可用引理 5.7.3 得到结论.

(7.4.4.2) 若 $r=2$，$Z_1\geq \mathrm{SL}(2,D)$ 对 $FI^{(2)}$ 在 Mat_2F 中的某个二次扩域 D 成立，则 X 包含一个 C_3' 类子群 $Y=\mathrm{Sp}(4,D)$ 或 $\mathrm{SU}(4,D)$，可用定理 6.1.1 得到结论.

如果 $Z_1>\mathrm{SL}(2,D)$，则由定理 6.1.1 可知 $Z_1=\mathrm{SL}(4,F)$，可直接用引理 5.7.3. 否则，$Z_1=\mathrm{SL}(2,D)$，用 D 代替 $FI^{(2)}$，再用引理 5.7.3，即知 $X\geq \mathrm{Sp}(4,D)$ 或 $\mathrm{SU}(4,D)$.

(7.4.4.3) 如果存在 $T_1=T_{31}(A_0)\in X$ 使 $A_0\notin FI$，则 (7.4.4.1)或(7.4.4.2)的条件 $Z_1=\mathrm{SL}(2r,F)$ 或 $Z_1=\mathrm{SL}(2,D)$ 成立，因而可用引理 5.7.3 或定理 6.1.1 定出 X 的类型.

对每个 $P=(A_{ij})_{2\times 2}\in \mathrm{GL}(2,R)$，(其中 $R=\mathrm{Mat}_rF$)，记

$$\Phi(P)=\begin{pmatrix} A_{11} & O & A_{12} & O \\ O & I^{(r)} & O & I \\ A_{21} & O & A_{22} & O \\ O & I & O & I^{(r)} \end{pmatrix}\in \mathrm{GL}(4,R),$$

则 $P\mapsto\Phi(P)$ 是 $\mathrm{GL}(2,R)$ 到 $\mathrm{GL}(4,R)$ 中的单同态. $\Phi(\mathrm{SL}(2,F)\otimes I^{(r)})<X$ 与 $T_1=\Phi(T_{21}(A_0))\in X$ 及其在 $I\otimes N_2$ 下的所有的共轭生成 X 的子群 $\Phi(\tilde{Z}_0)$，其中 $\tilde{Z}_0$ 是 $\mathrm{SL}(2,F)\otimes I^{(r)}$ 与 $T_{21}(A_0)$ 在 $I\otimes N_2$ 下的所有的共轭生成的群，属于引理 7.4.3(2)所述的类型 (i) ~ (vi) 之一.

情况 1　$\tilde{Z}_0$ 属于引理 7.4.3(2)中的类型(iv)或(v)，即 $r=2$，$\tilde{Z}_0=\mathrm{SL}(2,D)$，$D$ 是 $FI^{(2)}$ 的二次扩域.

此时 X 的子群 $Y = \langle \mathrm{Sp}(4, FI^{(2)}), T_{31}(A) \mid A \in D \rangle = \mathrm{Sp}(4, D)$，由定理 6.1.1 可知 $X \trianglerighteq \mathrm{Sp}(4, D)$ 或 $X \trianglerighteq \mathrm{SL}(8, F)$．当然 $Z_1 = \mathrm{SL}(2, D)$ 或 $\mathrm{SL}(4, F)$.

情况 2　$\tilde{Z}_0 = \mathrm{SL}(2r, F)$. 此时 $\mathrm{diag}(A, I^{(3r)}) \in \Phi(\tilde{Z}_0) < X$ 对所有的 $A \in \mathrm{SL}(r, F)$ 成立. 由引理 7.4.3(1)可知

$$Z_1 \geq \langle \mathrm{SL}(2, FI^{(r)}), \mathrm{diag}(A, I^{(r)}) \mid A \in \mathrm{SL}(2r, F) \rangle,$$

且 $\{\mathrm{diag}(A, I^{(3r)}) \mid A \in \mathrm{SL}(r, F)\}$ 在 X_1 中共轭的全体生成子群 $\{\mathrm{diag}(P, I^{(2r)}) \mid P \in \mathrm{SL}(2r, F)\}$，其中所含的 $T_{21}(sI^{(r)})$ ($\forall s \in F$) 与 $\mathrm{Sp}(4, F, H_1) \otimes I^{(r)}$ 一起生成 $\mathrm{SL}(4, F) \otimes I^{(r)}$. 它将 $T_{21}(C)$ ($C \in R$) 共轭到所有的 $T_{ij}(C)(C \in R, 1 \leq i, j \leq 4, i \neq j)$. 由引理 5.2.1 可得 $X \trianglerighteq \mathrm{SL}(4, R) = \mathrm{SL}(4r, F)$.

情况 3　$\tilde{Z}_0$ 是引理 7.4.3(2)所述的其余类型(ii)、(iii)或(vi)，包含 $g(A) = \mathrm{diag}(A, H_2(A')^{-1}H_2^{-1})$，$A$ 可取遍 $\mathrm{SL}(r, F)$ 或$\mathrm{Sp}(r, F, H_2)$.

此时 X_1 包含 $\Phi(g(A)) = \mathrm{diag}(A, I, H_2(A')^{-1}H_2^{-1}, I)$，$Z_1 = \varphi_1(X_1)$ 包含 $\mathrm{diag}(A, I)$，由引理 7.4.3(1)可知 $\mathrm{diag}(A, I)$ 与 $\mathrm{SL}(2, F) \otimes I^{(r)}$ 一起生成 $\mathrm{SL}(2r, F) = Z_1$.

(7.4.4.4) *其余情形：$Z_1 \neq \mathrm{SL}(2r, F)$. 当 $r = 2$ 时，不存在 FI 的二次扩域 D，使 $Z_1 \geq \mathrm{SL}(2, D)$. 对任意的 $A \in \mathrm{Mat}_r F$，$T_{31}(A) \in X$ 当且仅当 $A \in FI$. 在此情形下，我们证明 X 仍属于定理 7.1.2 或 7.1.3 所述的类型之一.*

记 $S = \{B \in R \mid$ 存在 $C \in R$ 使 $T_{21}(B)T_{34}(-C) \in X\}$. 则 S 是被 N_2 正规化的 F-空间且真包含 FI. Z_1 的子群

$$\tilde{Z}_1 = \langle \mathrm{GL}(2, FI), T_{21}(B) \mid B \in S \rangle \cap \mathrm{SL}(2r, F)$$

在引理 7.4.3(2)中已定出.

对任意的 $B \in T_{21}(B)T_{34}(-C) \in Y$，由引理 5.5.1 得知 $T_{31}(B + C) \in Y$ 和 $T_{31}(BC) \in Y$ 同时成立，从而应有 $B + C \in FI$, $BC \in FI$. 设 $B + C = bI$, $BC = cI$，则 $B(bI - B) = cI$.

情况1　char$F\neq 2$ 且 $N_2=O(r,F,H_2)$，$r=2$ 或 3.

由引理 7.4.3(2)可知 $\widetilde{Z}_1=SL(2r,F)$ 或 $Sp(2r,F)$，或当 $r=2$ 时 $\widetilde{Z}_1=SL(2,D)$. 在第一种情况下 $\widetilde{Z}_1=SL(2r,F)=Z_1$，在第三种情况下 $Z_1\geq SL(2,D)$，都属于前面已解决的情况. 故只须考虑 $Z_1=\widetilde{Z}_1=Sp(2r,F)$ 的情形，即 $S=M^+(r,F)H_2^{-1}$.

按引理 5.7.3，对每个 $P\in Z_1$ 有 $g(P)=\mathrm{diag}(P,P^\sigma)\in X$，其中 $\sigma: P\mapsto\Lambda(P')^{-1}\Lambda^{-1}$ 是 Z_1 的自同构，且当 $r=3$ 时 $\Lambda=H_2$. 对每个 $B\in S$，定义 $\overline{B}=\Lambda B'\Lambda^{-1}$，则 $(T_{21}(B))^\sigma=T_{12}(-\overline{B})$，$T(B)=T_{21}(B)T_{34}(-\overline{B})\in X$. 由上面的讨论，应当有 b、$c\in F$ 使 $B+\overline{B}=bI$，$B\overline{B}=cI$. 特别可取 $B=E_{11}$. 则当 $r=3$ 时，$\overline{B}=H_2E'_{11}H_2^{-1}=E_{11}$，$B\overline{B}=E_{11}$ 不是纯量阵，产生矛盾.

当 $r=2$ 时，由 $cI=B\overline{B}$ 不可逆，知 $c=0$，再由条件 $E_{11}(bI-E_{11})=0$ 得 $b=1$，$\overline{E_{11}}=E_{22}$. 取二阶交错方阵

$$H_0=E_{12}-E_{21}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

则 $\overline{B}=H_0B'H_0^{-1}$ 对 $B=E_{11}$ 成立. 同理可验证它对 $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}H_2^{-1}$ 成立，并且显然对 $B=I$ 成立. 这足以说明 $\overline{B}=H_0B'H_0^{-1}$ 对所有 $B\in S=M^+(2,F)H_2^{-1}$ 成立. X 所含的 $N_1\otimes I^{(2)}$ 及所有的 $T_{21}(B)T_{34}(-\overline{B})(B\in S)$ 生成的子群 Y 恰是 $G=\Omega(8,F,H_1\otimes H_0)$ 中的不可约子群 Ω_7，它被 N 正规化. 如果 X 不正规化 Ω_7，则由引理 6.6.1 知 $X\geq G$，但这导致 $Z_1=SL(4,F)$，这与我们的假设相违背. 故 $X\trianglerighteq\Omega_7$，属于定理 7.1.3 所述的类型.

情况2　$N_2=Sp(2,F,H_2)$.

按引理 7.4.3(2)，$Z_1\neq SL(4,F)$ 的唯一可能是 char$F=2$ 且 $Z_1=Sp(4,F,H_2\otimes H_2)$，此时 X 的子群

$$Y=\langle N,\mathrm{diag}(P,P^\sigma)\mid P\in Z_1\rangle$$

恰是 $G = \Omega(8, F, \Delta_1 \otimes H_2)$ 的不可约子群 Ω_7,这里

$$P^\sigma = H_2(P')^{-1}H_2^{-1},\ \Delta_1 = \begin{pmatrix} O & I^{(2)} \\ O & O \end{pmatrix}.$$

由引理 6.6.1 知 $X \trianglerighteq \Omega_7$ (否则, $X \geq G$, $Z_1 = \mathrm{SL}(4, F)$).

情况 3 $N_2 = \mathrm{Sp}(4, F, H_2)$.

我们记

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} O & I^{(2)} \\ O & O \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4 F,\ G = \Omega(16, F, \Delta_1 \otimes H_2).$$

则 $H_1 = \Delta_1 - \Delta_1'$, $N < G$.

按照引理 7.4.3(2),Z_1 有以下三种可能的类型:

(a) $Z_1 = \Omega(8, F, \Delta_0 \otimes H_2)$,其中 $\Delta_0 = E_{12} \in \mathrm{Mat}_2 F$. $S = M_0(4, F)H_2^{-1}$.

(b) $\mathrm{char}F = 2$, $Z_1 = \mathrm{Sp}(8, F, H_0 \otimes H_2)$, 其中 $H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2 F$. $S = M^+(4, F)H_2^{-1}$.

(c) $\mathrm{char}F = 2$, $Z_1 = \Omega_7 < \Omega(8, F, \Delta_0 \otimes H_2)$. $S = \{AH_2^{-1} \mid A = (A_{ij})_{4\times 4} \in M_0(r, F)$ 且 $\mathrm{Tr}A_{11} = \mathrm{Tr}A_{22} = 0\}$.

如果(b)成立,可由引理 5.7.3 得 $T_{21}(B)T_{34}(\overline{B}) \in X$ 对所有的 $B \in S$ 成立,其中 $\overline{B} = H_2B'H_2^{-1}$. X 的子群

$$Y = \langle N, T_{21}(B)T_{34}(\overline{B}) \mid B \in S\rangle \leq G$$
$$= \Omega(16, F, \Delta_1 \otimes H_2).$$

取 $B = (E_{13} + E_{31})H_2 = E_{11} + E_{33} \in S$,则 $\overline{B} = H_2B'H_2^{-1} = B$, $B\overline{B} = B \notin FI$, 产生矛盾. 可见在我们的假设之下,$Z_1$ 不可能属于类型(b).

设(a)成立. 取 $B_1 = (E_{13} - E_{31})H_2^{-1} = E_{11} + E_{33}$,有 $C_1 \in R$ 使 $T_{21}(B_1)T_{34}(-C_1) \in X$,且 $B_1 + C_1 = bI$ 及 $B_1C_1 = cI$ 对某一对 b、$c \in F$ 成立. 由 B_1 不可逆及 $B_1C_1 = cI$ 知 $c = 0$. 再由

$B_1(bI - B_1) = 0$ 知 $b = 1$，$C_1 = E_{22} + E_{44}$. 记

$$Y = \langle N, T_{21}(E_{11} + E_{33})T_{34}(-E_{22} - E_{44})\rangle \leq X,$$

则由 § 2.3 可知 $Y = \Omega_{10}$ 是由旋量表示得到的 $\Omega^+(10, F)$ 到 $\mathrm{GL}(16, F)$ 中的嵌入象. 注意，$\Omega_{10} \not\leq G = \Omega(16, F, \Delta_1 \otimes H_2)$（事实上，$G$ 包含 $T_{21}(B_1)T_{34}(-B_1)$ 而不包含 $T_{21}(B_1)T_{34}(-C_1)$）. 用与引理 6.6.1 类似的方法可以证明：如果 X 不正规化 Ω_{10}，则 $X \geq \mathrm{SL}(16, F)$，超出我们的假设范围之外（证明过程比较繁琐，这里略去）. 因此，在这里应当有 $X \trianglerighteq \Omega_{10}$.

现在设(c)成立，取 $B_2 = (E_{21} - E_{12})H_2^{-1} = E_{14} - E_{23}$. 则 $B_2^2 = 0$. 设

$$T_{21}(B_2)T_{34}(-C_2) \in X,\ B_2 + C_2 = bI,\ B_1C_1 = cI,$$

其中 b、$c \in F$. 由 B_2 不可逆得 $c = 0$. 再由 $0 = B_2(bI - B_2) = bB_2$ 得 $b = 0$. 故 $C_2 = -B_2$，$T_{21}(B_2)T_{34}(B_2) \in X$. 记

$$Y_0 = \langle N, T_{21}(E_{14} - E_{23})T_{34}(-E_{14} + E_{23})\rangle \leq X,$$

则由 § 2.3 知，当 $\mathrm{char}F = 2$ 时 Y_0 等于 Ω_9，是在前述旋量表示 σ：$\Omega^+(10, F) \to \mathrm{GL}(16, F)$ 下的一个可约子群 $\Omega(9, F, Q)$ $(\nu(Q) = 3)$ 的不可约嵌入象，因而 $\Omega_9 < \Omega_{10}$（当 $\mathrm{char}F \neq 2$ 时也可同样定义 Y_0，但此时 $Y_0 = \Omega_{10}$）. 注意，$\Omega_9 < G = \Omega(16, F, \Delta_1 \otimes H_2)$. 这与引理 6.6.1 类似可定出 Ω_9 在 $\mathrm{GL}(16, F)$ 中的扩群，为 $X \trianglerighteq \Omega_9$ 或 $X \trianglerighteq \Omega_{10}$ 或 $X \geq G$，但在后面两种情形下 S 分别为 $M_0(4, F)H_2^{-1}$、$\mathrm{Mat}_4 F$，Z_1 不属于类型(c). 故在这里只能有 $X \trianglerighteq \Omega_9$. ▌

由于有了引理 7.4.2 和 7.4.4，为定出满足条件 $N < X \leq \mathrm{GL}(nr, F)$ 和 $X \not\leq \Gamma_1$ 的 X，只须在 X 中找出这两个引理所需的 g_1. 对每个非负整数 $k \leq nr$，记 $W_k = \{(a_1, \cdots, a_{nr}) \in \mathrm{Mat}_{1\times nr}F \mid a_j = 0, \forall j > k\}$. 记 $\tilde{r} = r$（当 $N_1 = \mathrm{Sp}(n, F, H_1)$ 或 $\mathrm{SU}(n, F, H_1)$）或 $\tilde{r} = 2r$（当 $N_1 = \Omega(n, F, H_1)$）. 由 $X \not\leq \Gamma_1$，可选取 $g_0 = (A_{ij})_{n\times n} \in X_{W_k} \setminus \Gamma_1$ 使 $k \leq \tilde{r}$ 取最大值. 如果 $k = \tilde{r}$，则 g_0

就是所要求的 g_1，用引理 7.4.2 或 7.4.4 即可得出所需结论. 设 $k < \tilde{r}$，我们设法找出 $g_2 \in X \backslash \Gamma_1$ 使 g_2 定驻某个 W_t 使 $k < t \leq \tilde{r}$，从而得出与 k 的最大性的相矛盾. 我们的主要方法之一是：选取非零的 $S = -\rho \overline{S}' \in \mathrm{Mat}_\nu F$ 使 $T_1(S) = g_0 T_0(S) g_0^{-1} = (B_{ij})_{\nu\times\nu} \in X_k$ 的块 $B_{i,\nu+j}(i, j \leq 2)$ 含有足够多的 0，足以使 $T_2(S, S_1) = T_1(S)T_0(S_1)T_1(S)^{-1} \in X_{W_{k+1}}$ 对适当的 $S_1 \neq 0$ 成立. 如果能选 S、S_1 使 $T_2(S, S_1) \notin \Gamma_1$，则已得出矛盾. 但当 $T_2(S, S_1) \in \Gamma_1$ 时怎么办？这是预先应当解决的问题. 下面的引理 7.4.6 保证了：条件 $T_2(S, S_1) \in \Gamma_1$ 或 $T_1(S) \in \Gamma_1$ 对 g_0 也是一个有用的约束，满足这个约束条件的 g_0 经过适当改造可以直接得到一个 $g_2 \in X_{W_t} \backslash \Gamma_1$ 使 $t > k$. 引理 7.4.6 的证明中涉及到 N_2 在 $\mathrm{SL}(r, F)$ 中的扩群 $\widetilde{N}_2$（使 $I \otimes \widetilde{N}_2 < X$). 如果 $\widetilde{N}_2 \not\leq \mathrm{GU}(r, F, H_2)$，则当 $\mu = \nu(H_2) \geq 1$ 时可由定理 4.1.1 得出 $\widetilde{N}_2 = \mathrm{SL}(r, F)$. 但在 $\nu(H_2) = 0$ 时定理 4.1.1 失效. 为此，我们先补充下面关于 Witt 指数为 0 的酉群与幺幂元素生成的群的引理 7.4.5.

引理 7.4.5 设群 $N = \Omega(r, F, H)$（当 $\mathrm{char} F \neq 2$）或 $N = \mathrm{SU}(r, F, H)$，它的 Witt 指数 $\nu(H) = 0$. 设 $0 \neq S_0 \in \mathrm{Mat}_r F$ 满足条件 $S_0^2 = 0$. 则 N 与所有的 $I + sS_0 (s \in F_J)$ 生成的群 Y 等于 $\mathrm{SL}(r, F)$.

证明 只要能在 Y 中找出 $\mathrm{SL}(r, F)$ 的一个根子群，由第 4 章引理 4.2.6 即可知道 N 与这个根子群一起生成 $\mathrm{SL}(r, F) = Y$.

$$\text{集合}\{0 \neq S \in \mathrm{Mat}_r F \mid S^2 = 0, \text{ 且 } I + sS \in Y, \forall s \in F_J\}$$

包含 S_0，不是空集合，从中可以选出 S_1 使 $\mathrm{rank} S_1 = t$ 最小.

由 $S_1^2 = 0$ 可知 $\mathrm{Im} S_1 \subseteq \mathrm{Ker} S_1$，由 $\nu(H) = 0$ 可知 $W = \mathrm{Mat}_{1\times r} F$ 的任何子空间在内积 $f(x, y) = xH\overline{y}'$ 下都是非退化子空间. 特别是 $\mathrm{Im} S_1$ 与 $\mathrm{Ker} S_1$ 也都非退化. 取 $\mathrm{Im} S_1$ 的正交基 $\{w_1, \cdots, w_t\}$，扩充为 $\mathrm{Ker} S_1$ 的正交基 $\{w_1, \cdots, w_l\}$，再扩充为 W 的正交基 $\{w_1, \cdots, w_r\}$. 这里 $t \leq l$, $t + l = r$，从而 $t \leq r/2$. 不妨用

$\{w_1, \cdots, w_r\}$代替 W 的自然基改写矩阵群 $\mathrm{GL}(r, F)$(实际上是作 $\mathrm{GL}(r, F)$的内自同构). 则 N 被化为 $\Omega(r, F, \widetilde{H})$或 $\mathrm{SU}(r, F, \widetilde{H})$, $\widetilde{H} = \mathrm{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_r)$, 其中 $\delta_i = f(w_i, w_i)$, $\forall 1 \leq i \leq r$. 不妨开始就用$\widetilde{H}$代替 H,即假定 $H = \mathrm{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_r)$. 而 S_1 被化为形式 $S_1 = \begin{pmatrix} O & O \\ C_1 & O \end{pmatrix}$, 其中 $C_1 = (c_{ij})_{t\times t} \in \mathrm{GL}(t, F)$.

对每个 $C \in \mathrm{Mat}_t F$ 记 $S(C) = \begin{pmatrix} O & O \\ C & O \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_r F$. 并记集合 $U = \{C \in \mathrm{Mat}_t F \mid I + sS(C) \in Y, \forall s \in F_J\}$. 则 U 是 F_J 上的向量空间. 特别是 $S_1 = S(C_1)$, 可逆矩阵 $C_1 \in U$, 且由 $t = \mathrm{rank} S_1 = \mathrm{rank} C_1$ 的最小性知 U 中的非零矩阵都可逆.

当 $J=1$ 时, $F_J = F$, U 是 F-空间. 当 $J \neq 1$ 时,我们证明 U 也是 F-空间. 此时由于 $\nu(H) = 0$, F 是无限域,存在 $\lambda \in F\backslash F_J$ 使 $\lambda\bar{\lambda} = 1$ 且 $\lambda^2 \notin F$. 注意, $r \geq 2t$, 因此可以取

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda I^{(t)}, I^{(r-2t)}, \lambda^{-1} I^{(t)}) \in N = \mathrm{SU}(r, F, H),$$

对每个 $C \in U$ 和 $s \in F_J$ 得到

$$\Lambda^{-1}(I + sS(C))\Lambda = I + sS(\lambda^2 C) \in Y,$$

从而 $\lambda^2 C \in U$. 于是 $C \in U \Longrightarrow aC \in U$ 对所有的 $a \in F_J \oplus F_J\lambda^2 = F$ 成立. 即 U 是 F-空间.

因此,只要能证明 $t = 1$, 则 $I + aS_1 (a \in F)$ 在 Y 中组成 $\mathrm{SL}(r, F)$的一个根子群,导致 $Y = \mathrm{SL}(r, F)$.

设 $t \geq 2$, 我们设法推出矛盾:对每一对 $1 \leq i < j \leq r$, 在 $N = \Omega(r, F, H)$、$\mathrm{SU}(r, F, H)$这两种情况下分别记 N_{ij}为 $\Omega(2, F, H_{ij})$或 $\mathrm{SU}(2, F, H_{ij})$,其中 $H_{ij} = \mathrm{diag}(\delta_i, \delta_j)$ 是 H 的子矩阵. 则每个 $1 \neq P \in N_{12}$ 对应一个 $z = \mathrm{diag}(P, I^{(r-2)}) \in N$. 进而对任意 $s \in F$, 有

$$(I + sS_1)^{-1} z^{-1} (I + sS_1) z = I + sS(C_2) \in Y,$$

$$C_2 = C_1 \cdot \mathrm{diag}(P - I, 0, \cdots, 0) \in U, \ 1 \leq \mathrm{rank} C_2 \leq 2.$$

C_2 也应当可逆，这迫使 $t = \mathrm{rank} C_2 = 2$.

以下设 $t = 2$，从而 $r \geq 4$. 如果 $r \geq 5$，则可选 $1 \neq P \in N_{23}$，$z = \mathrm{diag}(1, P, I^{(r-3)}) \in N$. 对任意的 $s \in F$，换位子

$$(I + sS_1)^{-1} z^{-1} (I + sS_1) z = I + sS(C_2) \in Y,$$

其中 $S(C_2) = S(C_1) \cdot \mathrm{diag}(0, P - I, 0, \cdots, 0)$ 的秩为 1，从而 $\mathrm{rank} C_2 = 1$，这与 $t = 2$ 的最小性相矛盾.

现在设 $t = 2$ 且 $r = 4$. 记 Y_1 是 Y 中形如

$$g = \begin{pmatrix} 1 & O \\ \beta & A \end{pmatrix} \in Y (A \in \mathrm{SL}(3, F))$$

的准下三角阵组成的子群，并对上述 g 记 $\varphi(g) = A$. 则 $\varphi: Y_1 \to \mathrm{SL}(3, F)$ 是群同态. 标准基向量 $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ 在 N 中的稳定子群 $N_{e_1} < Y$，$\varphi(N_{e_1})$ 是关于 H 的子矩阵 $H_{234} = \mathrm{diag}(\delta_2, \delta_3, \delta_4)$ 的群 $N_{234} = \Omega(3, F, H_{234})$ 或 $\mathrm{SU}(3, F, H_{234})$. 并且 Y_1 包含 $T = \{I + sS_1 \mid s \in F\}$. 记 β 是 C_1 的第二列，则

$$\mathrm{rank}\beta = 1, \ \varphi(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & O \\ s\beta & I \end{pmatrix} \middle| s \in F \right\}$$

是 $\mathrm{SL}(3, F)$ 的根子群，它与 N_{234} 一起生成 $\mathrm{SL}(3, F) = \varphi(Y_1)$. 由于 F 是无限域，可选 $\lambda \in F^* \backslash \{\pm 1\}$，从而

$$\lambda^2 \neq 1, \ \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda^2, \lambda^{-1}, \lambda^{-1}) \in \mathrm{SL}(3, F) = \varphi(Y_1),$$

于是存在 $g \in Y_1$ 使 $\varphi(g) = \Lambda$，即

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & \lambda^2 & 0 & 0 \\ * & 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ * & 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in Y_1.$$

对每个 $s \in F$，$(I - sS_1) g^{-1} (I - s\lambda^{-1} S_1) g = I + sC_2 \in Y$，其中

$C_2 \in U$ 的第一列为 $b\beta$，第二列为 $(\lambda^2-1)\beta \neq 0$. C_2 的两列都是 $\beta \neq 0$ 的倍向量，并且第二列一定不为零，故 $\text{rank}C_2 = 1$，仍与 $t = 2$ 的最小性相矛盾.

这就在所有的情形下都证明了 $t = 1$，Y 含有 $\text{SL}(r, F)$的根子群，从而等于 $\text{SL}(r, F)$. ▌

在以下的证明中，对每个方阵 $S \in \text{Mat}_\nu F$，记

$$A(S) = \begin{pmatrix} I^{(\nu)} & O & O \\ S & I & O \\ O & O & I \end{pmatrix} \in \text{SL}(n, F),$$

$$T_0(S) = A(S) \otimes I^{(r)} \in \text{SL}(n, F) \otimes I^{(r)}.$$

则当 $S = -\rho \overline{S}' \in \text{Mat}_\nu F$ 时 $A(S) \in \text{U}'(n, F, H_1)$，$T_0(S) \in N_1 \otimes I^{(r)}$. 如果 $S = \text{diag}(\Lambda, O^{(\nu-d)}) \in \text{Mat}_\nu F$，其中 $\Lambda \in \text{Mat}_d F$，则我们也简记 $T_0(\Lambda)$来代替 $T_0(S)$.

引理 7.4.6 设 $\nu(H_1) \geq 2$，且当 $N_1 = \Omega(n, F, H_1)$ 时 $n \geq 5$；或 $\nu(H_2) \geq 2$，且当 $N_2 \leq O(r, F, H_2)$ 时 $r \geq 5$. 设 $N = N_1 \otimes N_2 < X \leq \text{GL}(nr, F)$，$X \not\leq \Gamma_1$，$g_0 \in X \backslash \Gamma_1$. 对每个 $S = -\rho \overline{S}' \in \text{Mat}_\nu F$ 记 $T_1(S) = g_0 T_0(S) g_0^{-1}$. 如果存在非零的 S 使 $T_1(S) \in \Gamma_1$，且当 $\text{char}F = 2$ 时，$T_1(S) = g_0 T_0(S) g_0^{-1} \in \Gamma_1$ 对某个加法子群 $M \neq 0$ 中的所有的 S 成立. 则下列结论之一成立：

(i) 存在 $g_1 \in X_{W_m} \backslash \Gamma_1$，其中 $m = r$（当 $N_1 = \text{Sp}(n, F, H_1)$ 或 $\text{SU}(n, F, H_1)$）或 $m = 2r$（当 $N_1 = \Omega(n, F, H_1)$）.

(ii) $\text{char}F = 2$ 且 $E = F_2$，$|M| = 2$，$T_1(S) = A \otimes B \in \Gamma$ 对 $0 \neq S \in M$ 成立，其中 $A \neq I$，$B \neq I$. 当 F 是完全域或 $T_1(S)$的第一行为$(1, 0, \cdots, 0)$时，存在 $g \in X \backslash \Gamma_1$ 定驻 $\text{Mat}_{1\times nr}F$ 的前 $[(r+1)/2]$ 个自然基向量. 这仅当 $t_1 r + t_2 n - 2t_1 t_2 = r \cdot \text{rank}S$ 时可能成立，其中 $t_1 = \text{rank}(A - I)$，$t_2 = \text{rank}(B - I)$. 特别当 $\text{rank}S = 1$ 时不可能成立.

(iii) 例外情况：$E = F_2$，$|M| = 2$，$n = r$，唯一的 $0 \neq S \in M$ 在 $\text{GL}(nr, F)$中与 τ 共轭，从而 $n = r = 2\text{rank}S + 1$.

证明 由引理 7.2.6 知，下列情况之一成立：

情况 1 $T_1(S) \in \mathrm{SL}(n, F) \otimes I$ 对所有的 $S \in M$ 成立.

情况 2 $T_1(S) \in I \otimes \mathrm{SL}(r, F)$ 对所有的 $S \in M$ 成立.

情况 3 $\mathrm{char}F = 2$ 且 $|M| = 2$，对 $0 \neq S \in M$ 有 $T_1(S) = A \otimes B$, $A \neq I$, $B \neq I$，且当 F 是完全域或 $T_1(S)$的第一行为$(1, 0, \cdots, 0)$时，可选 $A^2 = I$ 和 $B^2 = I$.

情况 4 $F_J = F_2$, $|M| = 2$, $n = r = 2\mathrm{rank}S + 1$ 以及 $T_1(S) = (I \otimes B)\tau(I \otimes B)^{-1}$ 对唯一的 $0 \neq S \in M$ 成立，其中 $B \in \mathrm{GL}(r, F)$.

情况 4 正是引理的结论(iii). 以下只须讨论前三种情况：

情况 1 的证明：由引理 5.6.1 知 $k = m$，引理的结论(i)成立.

情况 2 的证明：任取非零的 $S_0 \in M$，记 $T_1(S_0) = I \otimes B_0$，则 $B_0 \in \mathrm{SL}(r, F)$ 满足条件 $(B_0 - I)^2 = 0$. 记 $d = \mathrm{rank}S_0$，则 $d_2 = \mathrm{rank}(B_0 - I) = rd/n$. 对任一 $s \in F_J$，有 $T_1(sS_0) = I \otimes B(s) \in X$，其中 $B(s) = I + s(B_0 - I) \in \mathrm{SL}(r, F)$. 设 $\widetilde{N}_1 \otimes I = X \cap (\mathrm{SL}(n, F) \otimes I)$, $I \otimes \widetilde{N}_2 = X \cap (I \otimes \mathrm{SL}(r, F))$. 则 $\widetilde{N}_2 \geq \langle N_2, B_0(s) | s \in F_J \rangle$. 如果 $B_0 \notin \mathrm{U}(r, F, H_2)$，由 $(B_0 - I)^2 = 0$ 可知 $B_0 \notin \mathrm{GU}(r, F, H_2)$ (见引理 4.2.3)，从而由定理 4.1.1(当 $\nu(H_2) > 0$)或引理 7.4.5(当 $\nu(H_2) = 0$) 得 $\widetilde{N}_2 = \mathrm{SL}(r, F)$. 当 $\widetilde{N}_2 \leq \mathrm{U}(r, F, H_2)$ 时，记 $\mu = \nu(H_2)$，当 $\widetilde{N}_2 = \mathrm{SL}(r, F)$ 时，记 $\mu = [r/2]$ 为不超过 $r/2$ 的最大整数. 对每个 $1 \leq t \leq \mu$ 和 $S \in \mathrm{Mat}_t F$，记

$$B(S) = \begin{bmatrix} I^{(\mu)} & O \\ \mathrm{diag}(S, O) & I^{(r-\mu)} \end{bmatrix},$$

则当 $\widetilde{N}_2 = \mathrm{SL}(r, F)$ 时，有 $P \in \widetilde{N}_2$ 将 B_0 共轭到 $PB_0P^{-1} = B(\Lambda_1)$ 使 $\Lambda_1 \in \mathrm{GL}(d_2, F)$. 由 $I \otimes P \in X$ 有 $\tilde{g}_0 = (I \otimes P)g_0 \in X \backslash \Gamma_1$. 且对所有的 $s \in F$ 有

$$\widetilde{T}_1(sS_0) = \widetilde{g}_0 T_0(sS_0)\,\widetilde{g}_0^{-1} = I \otimes B(s\Lambda_1) \in I \otimes \widetilde{N}_2.$$

可用$\widetilde{g}_0$代替g_0,化为$B_0 = B(\Lambda_1)$的情形. 当$\widetilde{N}_2 \trianglerighteq N_2$时, $B_0 \in \mathrm{U}(r, F, H_2)$, $\mathrm{Im}(B_0 - I)$是d_2维全迷向子空间. 取$\mathrm{Im}(B_0 - I)$的一组基$\{w_1, \cdots, w_{d_2}\}$扩充为$W = \mathrm{Mat}_{1\otimes r}F$的一组标准酉基$\{w_1, \cdots, w_r\}$,使$W$上的酉内积$f_2(x, y) = xH_2\overline{y}'$在这组基下的矩阵具有标准形$\widetilde{H}_2$. 不妨一开始就用这组标准酉基代替$\mathrm{Mat}_{1\times r}F$的自然基,改写$\mathrm{GL}(r, F)$从而改写$N_2$,使$H_2$变为标准形$\widetilde{H}_2$,而$\mathrm{Im}(B_0 - I)$成为由前$d_2$个自然基向量张成的空间,$B_0$化为形式$B(\Lambda_1)$使$\Lambda_1 \in \mathrm{GL}(d_2, F)$. 总之,可设$B_0 = B(\Lambda_1)$, $\Lambda_1 \in \mathrm{GL}(d_2, F)$.

我们希望把$T_0(S_0)$也化为$T_0(\Lambda)$的形式,使$\Lambda \in \mathrm{GL}(d, F)$. 为此,先用适当的$P \in \mathrm{SL}(\nu, F)$将$S_0$相合到$PS_0\overline{P}' = \widetilde{S}_0 = \mathrm{diag}(\Lambda, O)$使$\Lambda \in \mathrm{GL}(d, F)$. 取$z_1 = \mathrm{diag}(\overline{P}'^{-1}, P, I) \otimes I \in N_1 \otimes I$,则$z_1 T_0(S_0) z_1^{-1} = T_0(\widetilde{S}_0)$. 不妨一开始就用$g_0 z_1^{-1} \in X\backslash\Gamma_1$代替$g_0$,从而用$\widetilde{S}_0 = \mathrm{diag}(\Lambda, O)$代替$S_0$,化为$S_0 = \mathrm{diag}(\Lambda, O)$的情况,即$T_0(S_0) = T_0(\Lambda)$.

注意,$\tau^{-1}(A \otimes B)\tau = B \otimes A$对任意$A \in \mathrm{GL}(n, F)$, $B \in \mathrm{GL}(r, F)$成立. 于是$\tau^{-1} g_0 T_0(S_0) g_0^{-1}\tau = B_0 \otimes I$. 记$g_2 = g_0^{-1}\tau$. 则$T_0(S_0) g_2 = g_2(B_0 \otimes I)$,即$(T_0(\Lambda) - I)g_2 = g_2(B(\Lambda_1) \otimes I - I)$. 将$g_2$写成分块形式$g_2 = (B_{ij})_{n\times r}$使所有的块$B_{ij} \in \mathrm{Mat}_{r\times n}$. 比较等式

$$\begin{pmatrix} O^{(\nu r)} & O & O \\ \Lambda \otimes I^{(r)} & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ B_{r1} & \cdots & B_{rn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ B_{r1} & \cdots & B_{rn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} O^{(\mu n)} & O & O \\ \Lambda_1 \otimes I^{(n)} & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

两端对应的块,得:$B_{ij}=0$ 对所有的 $1\leq i\leq d$ 且 $d_2+1\leq j\leq n$ 成立,且对所有的 $\mu+1\leq j\leq \mu+d_2$ 且 $i\notin\{\nu+1,\cdots,\nu+d\}$ 成立.

对任意的 $A\in\widetilde{N}_1$, $B\in\widetilde{N}_2$, $z=B\otimes A\in\widetilde{N}_2\otimes\widetilde{N}_1$,有

$$g=g_2zg_2^{-1}=(g_0^{-1}\tau)z(\tau^{-1}g_0)=g_0^{-1}(A\otimes B)g_0<X.$$

由于 $g_2=(B_{ij})_{n\times r}$ 有很多的块 B_{ij} 等于零,我们可以设法选取适当的 z 使 $g=(C_{ij}^{(r)})_{n\times n}\in X$ 有足够多的块为零,进而得到所需的 $g_1\in X_{W_m}\backslash\Gamma_1$.

当 $N_2=\mathrm{Sp}(r,F,H_2)$ 或 $\mathrm{SU}(r,F,H_2)(\nu(H_2)=\mu)$,或当 $\widetilde{N}_2=\mathrm{SL}(r,F)$ 时,对每个 $s\in F_J$ 取 $P(s)=T_{\mu+1,1}(s)\in\widetilde{N}_2$. 当 $N_2\leq O(r,F,H_2)$ 且 $\widetilde{N}_2\leq \mathrm{GO}(r,F,H_2)$ 时,如果 $d_2=1$,则 $\{I+s(B_0-I)\mid s\in F\}$ 是 $\mathrm{SL}(r,F)$ 的根子群,不可能含于 $\mathrm{GO}(r,F,H_2)$,产生矛盾. 故 $d_2\geq 2$,从而 $\mu\geq d_2\geq 2$. 因而此时对每个 $s\in F=F_J$ 有 $P(s)=T_{\mu+1,2}(s)T_{\mu+2,1}(-s)\in N_2$. 在这两种情形下都有 $z(s)=P(s)\otimes I^{(n)}\in\widetilde{N}_2\otimes I$,从而 $g(s)=g_2z(s)g_2^{-1}\in X$. 由 $g_2=(B_{ij})_{n\times r}$ 的块 $B_{ij}=0(\forall\mu+1\leq j\leq\mu+d_2$ 且 $i\notin\{\nu+1,\cdots,\nu+d\})$ 知 $g(s)$ 具有形式

$$g(s)=\begin{pmatrix} I^{(\nu r)} & O\\ \mathrm{diag}(sC,O) & I^{((n-\nu)r)}\end{pmatrix},$$

式中 $C\in\mathrm{Mat}_{dr}F$. 且 $\mathrm{rank}C=n\tilde{d}_2$, $\tilde{d}_2=\mathrm{rank}(P(1)-I)=1$ 或 2. $g(1)$ 定驻 W_ν 中所有的向量,而 $\nu\geq 2\geq m$, $g(1)$ 也就定驻 W_m. 如果 $g(1)\notin\Gamma_1$,则 $g_1=g(1)\in X_{W_m}\backslash\Gamma_1$,恰是本引理所需要的. 设 $g(1)\in\Gamma_1$,则由 $g(1)=(C_{ij}^{(r)})_{n\times n}$ 的块 $C_{11}=I$ 及 $C_{1j}=0$ $(\forall j\geq 2)$ 知 $g(1)\in\mathrm{SL}(n,F)\otimes I$. 于是 $C=S_1\otimes I^{(r)}$,对某个 $S_1\in\mathrm{Mat}_dF$. 从而 $g(s)=T_0(sS_1)$. 由

$$T_0(sS_1)=g(s)=g_0^{-1}\tau(P(s)\otimes I)\tau^{-1}g_0=g_0^{-1}(I\otimes P(s))g_0$$

得

$$T_1(sS_1) = g_0T_0(sS_1)g_0^{-1} = I \otimes P(s) \in I \otimes \widetilde{N}_2.$$

这允许我们在一开始就取 S_1 代替 S_0，从而 $P(1)$ 代替 B_0，化为 $d_2 = \mathrm{rank}(P(1) - I) = 1$ 或 2 的情形. 由 $d = d_2n/r = n/r$ 或$2n/r$ 为整数值可知只能 $n \geq r$ 或 $r = 2n$.

$r = 2n$ 仅当 $d = 1$ 且 $d_2 = 2$ 时可能发生. 此时 $N_2 \leq O(r, F, H_2)$ 且 $\widetilde{N}_2 \leq \mathrm{GO}(r, F, H_2)$. 当然 $\mathrm{char}F \neq 2$, $F \neq F_2$. 对每个 $s \in F^*$，取

$$\widetilde{z}(s) = T_{21}(s)T_{\mu+1, \mu+2}(-s) \otimes I^{(n)} \in N_2 \otimes I^{(n)},$$

则 $\widetilde{g}(s) = g_2\widetilde{z}_0(s)g_2^{-1} \in X$. 另一方面，$g_2 = (B_{ij}^{(r\times n)})_{n\times r}$ 的块 $B_{1j} = 0(\forall j \geq d_2 + 1 = 3)$, $B_1 = (B_{11} \quad B_{12}) \in \mathrm{GL}(r, F)$. 故 $\widetilde{g}(1) = (C_{ij})_{n\times n}$的块$C_{12} = \cdots = C_{1n} = 0$. 且$C_{11} = B_1T_{21}(I^{(n)})B_1^{-1} \in \mathrm{SL}(r, F)$ 与 $T_{21}(I^{(n)})$在$\mathrm{SL}(r, F)$中共轭，故 $(C_{11} - I)^2 = 0$，且 $\mathrm{rank}(C_{11} - I) = n$. 显然 $C_{11} \notin FI$, $g(1) \notin \mathrm{SL}(n, F) \otimes I$. 如果 $g_1 = \widetilde{g}(s_1) \notin \Gamma$ 对某个 $s_1 \in F^*$ 成立，则 $g_1 \in X_{W_r} \backslash \Gamma_1$ 恰为本引理所需. 设$\widetilde{g}(s) \in \Gamma$对所有的$s \in F^*$成立. 既然$\widetilde{g}(1) \notin SL(\mathrm{n}, \mathrm{F}) \otimes \mathrm{I}$，由引理 7.2.6 可知 $\widetilde{g}(1) \in I \otimes \mathrm{SL}(r, F)$，于是 $\widetilde{g}(1) = I^{(n)} \otimes C_{11}$, $\mathrm{rank}(\widetilde{g}(1) - I) = n \cdot \mathrm{rank}(C_{11} - I) = n \cdot n$. 另一方面，

$$\mathrm{rank}(\widetilde{g}(1) - I) = \mathrm{rank}(\widetilde{z}(1) - I) = 2n.$$

故 $2n = n \cdot n$, $n = 2$, $r = 4$. 但这既不满足条件 $\nu \geq 1$，对 $N_2 \leq O(r, F, H_2)$ 也不满足 $r \geq 5$，总之，不符合引理对 n、r 的要求.

以下设 $n \geq r$. 对每个 $P \in N_1$，有

$$g(P) = g_2(I^{(r)} \otimes P)g_2^{-1} = g_0^{-1}(P \otimes I)g_0 \in X.$$

注意，g_2 与 $I \otimes P$ 都定驻 W_{dr}，故 $g(P) = (C_{ij}^{(r)})_{n\times n}$ 也定驻 W_{dr}. 即 $C_{ij} = 0$ 对所有的 $i \leq d$ 且 $j \geq d + 1$ 成立.

先设可选取 $P_1 \in N_1$ 使 $\widetilde{g}_0 = g(P_1) \notin \Gamma_1$. 对每个 $C =$

$-\rho\overline{C}'\in \mathrm{Mat}_\nu F$，有 $T_2(C)=\widetilde{g}_0T_0(C)\widetilde{g}_0^{-1}=(M_{ij})_{n\times n}\in X$，且对所有的 $1\leq i\leq d$ 有 $M_{ij}=0$（当 $j\neq i$）或 $M_{ii}=I^{(r)}$. 即 $T_2(C)$定驻 W_{dr}中所有的向量，由 $dr\geq m$ 知 $T_2(C)$定驻 W_m. 如果可选 C_1 使 $T_2(C_1)\notin\Gamma_1$，则 $g_1=T_2(C_1)\in X_{W_m}\backslash\Gamma_1$ 为所求. 再设所有的 $T_2(C)\in\Gamma_1$，则由 $T_2(C)$的块 $M_{11}=I$ 可知 $T_2(C)\in \mathrm{SL}(n,F)\otimes I$. 化为已解决的情况 1.

以下设 $g(P)=g_0^{-1}(P\otimes I)g_0\in\Gamma_1$ 对所有的 $P\in N_1$ 成立. 特别可对任一 $S\in\widetilde{M}=\{S\in \mathrm{Mat}_\nu F\mid \overline{S}'=-\rho S\}$ 和 $P_1\in N_1$，取 $A(S)\in N_1$ 在 $P_1\in N_1$ 下的共轭 $P=P_1A(S)P_1^{-1}\in N_1$. 按我们的记号，$T_0(S)=A(S)\otimes I$. 记 $\widetilde{g}_0=g_0^{-1}(P_1\otimes I^{(r)})\in X\backslash\Gamma_1$，则

$$T(S,P_1)=g(P_1)=\widetilde{g}_0T_0(S)\widetilde{g}_0^{-1}\in\Gamma_1.$$

如果可选 $S=S_1\neq 0$ 及 P_1 使 $T(S_1,P_1)\in \mathrm{SL}(n,F)\otimes I$，用$\widetilde{g}_0$代替 g_0，用 S_1 代替 S_0，就化为了已解决的情况 1. 在剩下的情况，所有的 $T(S,P_1)$都含于 Γ_1 而不含于 $\mathrm{SL}(n,F)\otimes I$. 当 $F_J\neq F_2$ 时，由引理 7.2.6 知所有这些 $T(S,P_1)$都含于 $I\otimes \mathrm{SL}(r,F)$. 当 $F_J=F_2$ 时，按定理的假设 $\nu\geq 2$，显然$\widetilde{M}$在 F_2 上的维数 $>2\geq[F:F_J]$，由引理 7.2.6 仍可知所有的 $T(S,P_1)$含于 $I\otimes \mathrm{SL}(r,F)$. N_1 可由所有的 $P_1A(S)P_1^{-1}$ 生成，从而

$$g(P)=g_0^{-1}(P\otimes I)g_0=I^{(n)}\otimes\varphi(P)\in I^{(n)}\otimes \mathrm{SL}(r,F)$$

对所有的 $P\in N_1$ 成立，其中 $\varphi(P)\in \mathrm{SL}(r,F)$ 由 $P\in N_1$ 唯一决定. $g_2=g_0^{-1}\tau$ 将每个 $I^{(r)}\otimes P\in I^{(r)}\otimes N_1$ 共轭到

$$g_2(I\otimes P)g_2^{-1}=I^{(n)}\otimes\varphi(P)\in I^{(n)}\otimes \mathrm{SL}(r,F),$$

从而将 $I^{(r)}\otimes N_1$ 映入 $I^{(n)}\otimes \mathrm{SL}(r,F)$. N_1 生成的加法群等于 Mat_nF. 故 g_2 的共轭作用也将 $M_n=I^{(r)}\otimes\mathrm{Mat}_nF$ 嵌入 $M_r=I^{(n)}\otimes\mathrm{Mat}_rF$. M_n 与 M_r 都是 F 上的子空间，维数分别等于 n^2、r^2. 由我们的假设 $n\geq r$ 有 $\dim M_n\geq\dim M_r$. M_n 在 M_r 中的嵌入象是一个与 M_n 同维数的子空间. 这又反过来说明 $\dim M_n\leq\dim M_r$. 故

$\dim M_n = \dim M_r$. 从而 $n = r$，并且 M_n 的嵌入象等于 M_r，g_2 的共轭作用诱导出齐次可约环 $M_n = M_r = I^{(n)} \otimes \mathrm{Mat}_n F$ 的自同构. 由第 2 章中引理 2.6.2 知 g_2 具有形式

$$g_2 = A \otimes B \in \mathrm{GL}(n, F) \otimes \mathrm{GL}(n, F).$$

但 $g_2 = g_0^{-1}\tau$，故 $g_0 = \tau(A^{-1} \otimes B^{-1}) \in \Gamma_1$，这与引理假设相矛盾. 这就完成了情况 2 的证明.

情况 3 的证明：$T_1(S) = g_0 T_0(S) g_0^{-1} = A \otimes B$，其中 A、B 都不是单位阵. 只须考虑 $A^2 = I$ 且 $B^2 = I$ 的情形. 记

$$d = \mathrm{rank} S,\ d_1 = \mathrm{rank}(A - I),\ d_2 = \mathrm{rank}(B - I).$$

则 $d = d_1 r + d_2 n - 2d_1 d_2$. 与情况 2 中同样可设 $S = \mathrm{diag}(\Lambda, O)$，$\Lambda \in \mathrm{GL}(d, F)$. 有适当的 $z = P_1 \otimes P_2 \in \langle N, T_1(S)\rangle \leq X \cap (\mathrm{SL}(n, F) \otimes \mathrm{SL}(r, F)$ 将 $A \otimes B$ 共轭到 $z(A \otimes B)z^{-1} = A_1 \otimes B_1$ 使 $A_1 = A(\Lambda_1)$，$B_1 = B(\Lambda_2)$，其中 $\Lambda_1 \in \mathrm{GL}(d_1, F)$，$\Lambda_2 \in \mathrm{GL}(d_2, F)$. 不妨用 $zg_0 \in X \backslash \Gamma_1$ 代替 g_0，从而用 $z(A \otimes B)z^{-1}$ 代替 $A \otimes B$，化为 $A = A(\Lambda_1)$，$B = B(\Lambda_2)$ 的情形. 记 $g_0 = (A_{ij})_{n \times n}$. 比较等式

$$g_0(T_0(S) - I) = (A \otimes B - I)g_0$$

两端的前 r 行可知 $(A_{1,\nu+1} \cdots A_{1,\nu+d})(\Lambda \otimes I^{(r)})$ 的第 i 行为零，对 $1 \leq i \leq \mu$ 或 $\mu + d_2 + 1 \leq i \leq r$，从而 $(A_{1,\nu+1} \cdots A_{1,\nu+d})$ 的这些行也都为零. 取

$$g_2 = g_0(T_{\nu+1,1}(1) \otimes I^{(r)})g_0^{-1} = (B_{ij})_{n \times n} \in X.$$

则 g_2 定驻 $\mathrm{Mat}_{1 \times nr} F$ 的自然基向量 e_i($\forall 1 \leq i \leq [r/2]$ 或 $[r/2] + d_2 + 1 \leq i \leq r$). 如果 $g_2 \notin \Gamma_1$，则引理结论(ii)成立. 否则，$g_2 \in \Gamma_1$. 此时不妨在一开始就用 $T_0(1) = T_{\nu+1,1}(1) \otimes I^{(r)}$ 代替 $T_0(S)$，化为 $d = 1$ 的情形. 由于 $n \geq 4 > 3$ 且 $n \geq r$，可用引理 7.2.1 得 $g_2 = T_1(1)$ 含于 $\mathrm{SL}(n, F) \otimes I$ 或 $I \otimes \mathrm{SL}(r, F)$，化为已解决的情况 1 或情况 2. ▌

§7.5 Sp(n, F)$\otimes N_2$的扩群

本节中专门讨论 $N_1 = \mathrm{Sp}(n, F, H_1)$ 的情形，要定出 $N = \mathrm{Sp}(n, F, H_1)\otimes N_2$ 在 $\mathrm{GL}(nr, F)$中的扩群. 此时 $n = 2\nu$ 是偶数，且 ≥ 4. $N_2 = \mathrm{Sp}(r, F, H_2)(r = 2\mu \leq n)$ 或 $N_2 = O(r, F, H_2)(\mathrm{char}F \neq 2)$.

设 $N < X \leq \mathrm{GL}(nr, F)$ 且 $X \not\leq \Gamma_1$. 对非负整数 $k \leq nr$，记

$$W_k = \{(a_1, \cdots, a_{nr}) \in \mathrm{Mat}_{1\times nr}F \mid a_j = 0, \forall j > k\},$$

并记 X_{W_k} 为 W_k 在 X 中的稳定子群，只要能设法找出 $g_1 = (A_{ij})_{n\times n} \in X\backslash\Gamma_1$ 使 $A_{1j} = 0$ 对所有的 $j \geq 2$ 成立，即 $g_1 \in X_{W_r}\backslash\Gamma_1$，就能由引理 7.4.2 或 7.4.4 立即得出所需结论. 虽然预先不知道这样的 g_1 是否存在，但对 $X \not\leq \Gamma_1$ 总可选定 $g_0 = (A_{ij})_{n\times n} \in X_{W_k}\backslash\Gamma_1$ 使 $k \leq r$ 最大. 只要能证明 $k = r$，就可由引理 7.4.2 或 7.4.4得出定理 7.1.2 所述的结论.

设 $k < r$. 我们设法推出矛盾.

一、$n > r$ 的情形

定理 7.1.2、定理 7.1.3 的证明 （$N_1 = \mathrm{Sp}(n, F, H_1)$ 且 $n > r$ 的情形）：

此时 $\Gamma_1 = \Gamma = \mathrm{GL}(n, F)\otimes \mathrm{GL}(r, F)$. 记

$$\mathscr{N}_1 = \mathrm{Sp}(n, F, H_1)\otimes I^{(r)} < X \leq \mathrm{GL}(nr, F).$$

先设 $k = 0$：对每个 $1 \leq j \leq n$，记 w_j 为 A_{1j}的第一行. w_1, $\cdots$, w_n 是 F 上 n 个 r 维行向量，由 $n > r$ 知它们线性相关. 即存在不全为 0 的 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in F$ 使 $\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j w_j = 0$. 存在辛方阵 $P \in \mathrm{Sp}(n, F, H_1)$ 使它的第 $\nu + 1$ 列的元素依次为 λ_1, $\cdots$, λ_n，于是 $g_2 = g_0(P\otimes I) = (B_{ij})_{n\times n} \in X\backslash\Gamma$ 的块 $B_{1,\nu+1}$ 的第一行等于 $\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j w_j = 0$，从而

$$T_1(s) = g_2(T_{\nu+1,1}(s) \otimes I)g_2^{-1} \in X_{W_1}, \forall s \in F.$$

由 $k=0$ 的最大性知应有 $T_1(s) \in \Gamma$. 由引理 7.2.1 并考虑到 $n > r$, 得 $T_1(s) \in \mathrm{SL}(n, F) \otimes I$. 再由推论 5.6.2(1)知 $Y = \langle g_2, \mathscr{N}_1 \rangle$ 包含 $g_1 \in X_{W_r} \backslash \Gamma$, $k=r$, 这与 $k=0$ 的最大性相矛盾.

现在设 $1 \le k \le n-1$. g_0 定驻 W_k,即 g_0 的前 k 行含于 W_k, 特别所有的 $A_{1j}(j \ge 2)$ 的前 k 行都是零. 记 A_{1j}的第 $k+1$ 行为 w_j. 则当 $r \le n-2$(从而 $n-1>r$)时, $n-1$ 个 r 维行向量 w_2, …, w_n 在 F 上线性无关,存在不全为 0 的 λ_2, …, $\lambda_n \in F$ 使 $\sum_{j=2}^{n} \lambda_j w_j = 0$. 存在辛方阵 $P \in \mathrm{Sp}(n, F, H_1)$ 使它的第 $\nu+1$ 列的元素依次为 0, λ_2, …, λ_n. 于是 $g_2 = g_0(P \otimes I) = (B_{ij})_{n\times n} \in X \backslash \Gamma$ 的块 $B_{1,\nu+1}$ 的前 $k+1$ 行全为零, $T_1 = g_2(T_{\nu+1,1}(1) \otimes I) g_2^{-1} \in X_{W_{k+1}}$. k 的最大性迫使 $T_1 \in \Gamma$, 仍导致矛盾 $k=r$.

最后剩下 $r=n-1$, 且 $1 \le k \le n-1$ 的情形,此时 $N_2 = O(r, F, H_2)$, $\mathrm{char} F \ne 2$, 特别 $F \ne F_2$. 对每个对称方阵 $S = (s_{ij})_{\nu\times\nu} \in \mathrm{Mat}_\nu F$, 考虑 $T_0(S) = \begin{pmatrix} I & O \\ S & I \end{pmatrix} \otimes I \in \mathscr{N}_1$ 在 g_0 下的共轭 $T_1(S) = g_0 T_0(S) g_0^{-1} = (B_{ij})_{n\times n} \in X_{W_k}$. 记 $g_0^{-1} = (\widetilde{A}_{ij})_{n\times n}$. 则 $T_1(S)$的块

$$B_{1,\nu+1} = \sum_{i,j=1}^{\nu} s_{ij} A_{1,\nu+i} \widetilde{A}_{j,\nu+1} = \sum_{1 \le i < j \le \nu} s_{ij} C_{ij}$$

是某些矩阵 $C_{ij} \in \mathrm{Mat}_\nu F$ 以 s_{ij}为系数的线性组合. 由 $T_1(S)$定驻 W_k 可知,无论怎样选择 S, $B_{1,\nu+1}$ 的前 k 行都是零. 如果能选取 $S \ne 0$ 使 $B_{1,\nu+1}$ 的第 $k+1$ 行的最后 $r-k$ 个分量全是 0,则 $T_2 = g_2(T_{\nu+1,1}(1) \otimes I) g_2^{-1} \in X_{W_{k+1}}$ 对 $g_2 = T_1(S)$ 成立. 对每一组 $1 \le i < j \le \nu$, 记 w_{ij}为 C_{ij}的第 $k+1$ 行的最后 $r-1$ 个分量组成的行向量. 则由

$$\nu(\nu+1)/2 - (r-1) = \nu(\nu-1)/2 - (2\nu-2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\nu - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0$$

知 $\nu(\nu+1)/2$ 个 $r-1$ 维行向量 w_{ij} 在 F 上线性相关，可选不全为 0 的 s_{ij}，即选 $S = S_0 \neq 0$，使 $\sum\limits_{i<j} s_{ij}w_{ij} = 0$，即 $T_0(S_0)$ 的 $(1, \nu+1)$-块 $B_{1,\nu+1}$ 的第 $k+1$ 行的最后 $r-1$ 个分量全为 0，从而最后 $r-k$ 个分量全为 0. 对所有 $\lambda \in F^*$，$T_0(\lambda S_0)$ 的 $(1, \nu+1)$-块也有同样的性质. 于是

$$T_2(S) = T_1(S)(T_{\nu+1,1}(1) \otimes I)T_1(S)^{-1} \in X_{W_{k+1}}$$

对所有 $S = \lambda S_0(\lambda \in F^*)$ 成立. k 的最大性迫使所有这些 $T_2(S) \in \Gamma$. 如果有一个 $S = \lambda S_0$ 使 $T_1(S) \notin \Gamma$，则仍可得 $k = r$. 设 $T_1(\lambda S_0) \in \Gamma$ 对所有的 $\lambda \in F$ 成立. 由于 $F \neq F_2$，由引理 7.2.6 知 $T_1(\lambda S_0)(\lambda \in F)$ 或者全含于 $\mathrm{SL}(n, F) \otimes I$，或者全含于 $I \otimes \mathrm{SL}(r, F)$. 如果 $T_1(S_0) = I \otimes B \in I \otimes \mathrm{SL}(r, F)$，则由 $\mathrm{rank}(B - I) = (r/n)\mathrm{rank}S_0$ 是整数及 n 与 $r = n-1$ 互素，可知 n 整除 $\mathrm{rank}S_0$. 但 $1 \leq \mathrm{rank}S_0 \leq \nu < n$，$\mathrm{rank}S_0$ 不可能被 n 整除，产生矛盾. 故 $T_1(S_0) \in \mathrm{SL}(n, F) \otimes I$，可由推论 5.6.2(3)得 $k = r$，仍有矛盾.

二、$n = r$ 的情形，且当 $n = r = 4$ 或 6 时 $N_2 = \mathrm{Sp}(r, F, H_2)$

先证明下面的引理，它彻底解决了 $n = r \geq 8$ 的情形，也为解决 $n = r = 4$ 或 6 的情形走了重要的一步.

由于 $n = r$，在这里 $\Gamma_1 = \Gamma \cup \Gamma\tau$.

引理 7.5.1 设 $n = 2\nu \geq 8$，$N_2 = \mathrm{Sp}(n, F, H_2)$ 或 $O(n, F, H_2)$，$N = \mathrm{Sp}(n, F, H_1) \otimes N_2$ 满足定理 7.1.2 所说条件. 设 $N < X \leq \mathrm{GL}(n^2, F)$，且 $X \not\leq \Gamma_1$. 设已选 $g_1 = (A_{ij})_{n\times n} \in X_{W_k} \setminus \Gamma_1$ 使 $k \leq n$ 最大，则：

(1) 当 $n \geq 8$ 时，$k = n$.

(2) 当 $n = 6$ 时，如果 $k \geq 1$，则 $k = n$.

(3) 当 $n=4$ 时,如果 $k\geq 2$, 则 $k=n$.

证明 取 $g_0=(A_{ij})_{n\times n}\in X_{W_k}\backslash\Gamma_1$ 使 k 最大. 并记 $g_0^{-1}=(\tilde{A}_{ij})_{n\times n}$, 当然 $g_0^{-1}\in X_{W_k}\backslash\Gamma_1$.

对每个对称方阵 $S=(s_{ij})_{\nu\times\nu}\in \mathrm{Mat}_\nu F$, 考虑

$$T_0(S)=\begin{pmatrix} I & O\\ S & I\end{pmatrix}\otimes I^{(n)}\in N$$

在 g_0 的共轭 $T_1(S)=g_0T_0(S)g_0^{-1}=(B_{ij})_{n\times n}\in X_{W_k}$, 其中的块 $B_{1,\nu+1}=\sum_{1\leq i\leq j\leq \nu}s_{ij}C_{ij}$ 是一组与 S 的选取无关的矩阵 $C_{ij}\in \mathrm{Mat}_\nu F$ 以 s_{ij}为系数的线性组合. 无论怎样选取 S, $T_1(S)$都定驻 W_k, $B_{1,\nu+1}$ 的前 k 行都为零. 若能选取 $S\neq 0$ 使 $B_{1,\nu+1}$ 的第 $k+1$ 行的最后 $r-k$ 个分量全是 0,则

$$T_2=g_2(T_{\nu+1,1}(1)\otimes I)g_2^{-1}\in X_{W_{k+1}}$$

对 $g_2=T_1(S)$ 成立. 对每一组 $1\leq i\leq j\leq \nu$, 记 w_{ij}为 C_{ij}的第 $k+1$ 行的最后 $r-1$ 个分量组成的行向量. 则我们要选 $S\neq 0$ 使 $\sum\limits_{i\leq j}s_{ij}w_{ij}=0$. 满足这个条件的元素组 $(s_{ij}\mid 1\leq i\leq j\leq \nu)$ 是一个齐次线性方程组的解. 这个方程组的未知数的个数是 $\nu(\nu+1)/2$, 方程的个数是 $2\nu-k$, 解空间 M 的维数 $\geq \nu(\nu+1)/2-(2\nu-k)=\nu(\nu-3)/2+k$. 将每一组解 $(s_{ij}\mid 1\leq i<j\leq \nu)\in M$ 与相应的对称方阵 $S=(s_{ij})_{\nu\times\nu}$对应起来,可以认为 M 是由若干 S 组成的 F-空间, $\dim M\geq \nu(\nu-3)/2+k$.

当 $\nu\geq 4$ (即 $n\geq 8$),或当 $\nu=3$ 且 $k\geq 1$, 或当 $\nu=2$ 且 $k\geq 2$ 时,都有 $\dim M\geq 1$, $M\neq 0$. 此时对每个 $S\in M$ 和 $s\in F$ 有 $T_2(s,S)=T_1(S)(T_{\nu+1,1}(s)\otimes I)T_1(S)^{-1}\in X_{W_{k+1}}$. k 的最大性迫使所有这些 $T_2(s,S)\in\Gamma_1$.

当 $F\neq F_2$ 时,如果可选 S_0 使 $T_1(S_0)\notin\Gamma_1$, 用引理 7.4.6 可由所有的 $T_2(s,S_0)\in\Gamma_1(s\in F)$ 推出 $k=r$. 否则,所有的 $T_1(S)\in\Gamma_1(S\in M)$, 但 $g_0\notin\Gamma_1$, 仍可用引理 7.4.6 推出 $k=r$.

设 $F = F_2$，从而 $N_1 = N_2 = \mathrm{Sp}(n, F_2, H_1)$. 先设可选 $S_0 \in M$ 使 $\tilde{g}_0 = T_1(S_0) \notin \Gamma_1$，但 $T_2 = \tilde{g}_0(T_{\nu+1,1}(1) \otimes I)\tilde{g}_0^{-1} \in \Gamma_1$. 注意 $n = r \neq 3$，故引理 7.2.1 中的例外情形(iii)不出现，$T_2 \in \Gamma$. 由引理 7.2.1 知 $T_2 \in \mathrm{SL}(n, F)$ 或 $T_2 \in I \otimes \mathrm{SL}(n, F)$. 于是引理 7.4.6 的结论(i)成立，$k = r$. 再设 $T_1(S) \in \Gamma_1$ 对所有的 $S \in M$ 成立. 由 $n = r = 2\nu$ 是偶数知引理 7.4.6 的例外情形(iii)不出现，所有的 $T_1(S) \in \Gamma$，引理 7.4.6 的结论(i)或(ii)成立，$k \geq [r/2] = \nu \geq 2$. 如果 $k \geq 3$，则 $\dim M \geq 2$，引理 7.4.6 的结论(ii)不成立，只可能是结论(i)成立，$k = r$. 结论(ii)成立仅当 $k = \nu = 2$，$n = r = 4$. 但此时定理要求 $g_0 \in X \leq O(16, F_2, Q)$. 这迫使 $g_0 = (A_{ij})_{4\times 4}$ 的块 A_{13}的后两列为零，$T_1 = g_0(T_{31}(1) \otimes I) g_0^{-1} \in X_{W_4}$. $k = 2$ 的最大性迫使 $T_1 \in \Gamma_1$. 仍可由引理 7.2.1 及 7.4.6 得到 $k = r = 4$，仍有矛盾. ▌

当 $n = r \geq 8$ 时，在任何情况下都可由引理 7.5.1 得出 $k = n$，由引理 7.4.2 立即得到所需结论.

对 $n = r = 4$ 或 6 的情形，剩下需要做的工作是：排除 $k = 0$ 的可能性；以及在 $n = r = 4$ 时排除 $k = 1$ 的可能性.

为了排除 $k = 0$ 的情形，我们先证明一个关于方阵的辛相抵的引理. 虽然本书只需用到 $n = 4$ 或 6 的情形，但关于辛相抵的结果本身也有独立的价值，因此在下面的引理 7.5.2 中我们处理了一般的维数 $n = 2\nu$ 的辛群.

引理 7.5.2 设 $n = 2\nu$，F 是域，并且可逆交错矩阵 $H \in \mathrm{GL}(n, F)$ 具有标准形式，$N_1 = \mathrm{Sp}(n, F, H)$. 则对任意的 $A \in \mathrm{GL}(n, F)$，存在辛方阵 P_1、$P_2 \in N$ 将 A 相抵到

$$P_1AP_2 = \begin{pmatrix} I^{(\nu)} & O \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } D = \begin{pmatrix} J & * \\ O & * \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & O & 0 \\ O & O & I & O \\ 0 & 0 & O & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{t-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(t, F) \text{ 不可约},$$

且当 $D=J$ 时可以使 $C=0$.

证明　引理中说 J 不可约,是指它在 $\mathrm{Mat}_{1\times r}F$ 上的作用不可约,即 $\mathrm{Mat}_{1\times r}F$ 是不可约的 $F[J]$模. 这等价于说 J 的特征多项式 $p(x)=x^t-a_{t-1}x^{t-1}-\cdots-a_1x-a_0$ 在 $F[x]$中不可约,$F[J]\cong F[x]/(p(x))$ 是 FI 的 r 次扩域.

按几何观点,N_1 是作用于 $V=\mathrm{Mat}_{1\times n}F$ 上关于内积 $f(x,y)=xHy'$ 的辛群. 在此先选取 $P_1\in N_1$ 使 P_1A 的前 ν 行张成 V 的极大全迷向子空间,则由 Witt 扩张定理知存在 $P_2\in N_1$ 使 P_1AP_2 具有形状 $\begin{pmatrix} I & O \\ * & D\end{pmatrix}$,再用 $\mathrm{GL}(\nu,F)$对 D 作相似即可.

设 $\{e_i\mid 1\leq i\leq n\}$ 是 V 的自然基. 记 A 的第 i 行为 α_i. 考虑 A 的 Gram 方阵 $G=AHA'=(g_{ij})_{n\times n}$,其中 $g_{ij}=f(\alpha_i,\alpha_j)$. G 是可逆交错方阵. 记 G 的第 i 行为 β_i. 如果能选 $P_1\in N_1$ 将 G 相合到 $G_1=P_1GP_1'$ 使 G_1 左上方的 ν 阶子方阵为零,就说明 P_1A 的前 ν 行张成 V 的 ν 维全迷向子空间. G 的第一行 $\beta_1=(0,g_{12},\cdots,g_{1n})$ 的第一分量为 0,说明它与 $e_{\nu+1}$ 正交. 由 Witt 扩张定理知,存在辛方阵 $z\in N_1$ 在定驻 $e_{\nu+1}$ 的同时将 $\beta_1\mapsto\beta_1z\in\langle e_{\nu+1},e_{\nu+2}\rangle$(实际上,当 $\beta_1\notin\langle e_{\nu+1}\rangle$ 时可使 $\beta_1z=e_{\nu+2}$). 注意 z 的转置 z' 也是 N_1 中的辛方阵. 并且 z 在定驻 $e_{\nu+1}$ 的同时也就定驻 $e_{\nu+1}^{\perp}$,z 的第一列为 $(1,0,\cdots,0)'$,从而 z'的第一行为$(1,0,\cdots,0)$,$z'Gz$ 的第一行就是 Gz 的第一行 β_1z,含于 $\langle e_{\nu+1},e_{\nu+2}\rangle$,它的前 ν 个分量和最后 $\nu-2$ 个分量都为 0. 由于 $z'Gz$ 仍是交错方阵,它的第一列的前 ν 个分量和最后 $\nu-2$ 个分量也都为 0. 一般地,设已选取 $P\in N_1$ 使 $G_1=PG_1P'$ 的前 d 行含于 $\langle e_{\nu+1},\cdots,e_{\nu+d+1}\rangle$,并且已选 P 使 $d\leq\nu-1$ 取最大值. 由 G_1 是交错方阵,可知它的前 d 列的前 ν 个分量全为 0. 特别 G_1 的第 $d+1$ 行 u_{d+1} 的前 d 个分量全为 0. 作为交错方阵,G_1 的第 $(d+1,d+1)$ 分量当然为 0. 这样,u_{d+1} 的前 $d+1$ 个分量全都为 0. 当 $d=\nu-1$ 时,这已经意味着 G_1 的左上方的 ν 阶子方阵是零方阵,恰如所需. 如果 $d<\nu-1$,这意味着 u_{d+1} 与全迷向子空间 $\langle e_{\nu+1},\cdots,e_{\nu+d+1}\rangle$ 正交,存在着 $z_1\in N_1$ 在定驻所有的

$e_j(\nu+1\leq j\leq \nu+d+1)$ 的同时将 $u_{d+1}\mapsto u_{d+1}z_1\in\langle e_j|\nu+1\leq j\leq e_{\nu+d+2}\rangle$. $z_1'G_1z_1=(z_1'P)G(z_1'P)'$ 的前 $d+1$ 行含于 $\langle e_j|\nu+1\leq j\leq e_{\nu+d+2}\rangle$, 且 $z_1'P\in N_1$, 与 d 的最大性相矛盾.

这就证明了,存在 $P_1\in N_1$ 使 P_1GP_1' 的左上方的 ν 阶子方阵为零方阵. 也就是说,P_1A 的前 ν 行张成 ν 维全迷向子空间. 由 Witt 扩张定理,存在 $P_2\in N_1$ 将 P_1A 的前 ν 行分别送到前 ν 个自然基向量 $e_1, \cdots, e_\nu$. 即 P_1AP_2 具有形状 $\begin{pmatrix} I & O\\ * & D\end{pmatrix}$, 其中 $D\in$ GL(ν, D). 用任意的 diag$(P'^{-1}, P)\in N_1(P\in \mathrm{GL}(\nu, F))$ 对 P_1AP_2 作相似变换,仍保持前述形状,同时将 D 换成 PDP^{-1}. 适当选取 P,可将 D 化为引理所要求的形状 $D=\begin{pmatrix} J & *\\ O & *\end{pmatrix}$.

现在设 $A=\begin{pmatrix} I & O\\ C & J\end{pmatrix}$, 我们证明可将 A 辛相抵到 diag(I, J).

为此,我们设法选对称方阵 $S=(s_{ij})_{\nu\times\nu}\in M^+(\nu, F)$ 使 $C+JS$ 也是对称方阵. 若这样的 S 存在,则取辛方阵

$$P_1=\begin{pmatrix} I & O\\ S & I\end{pmatrix}\quad 和\quad P_2=\begin{pmatrix} I & O\\ -(C+JS) & I\end{pmatrix},$$

就可使 $P_2AP_1=\mathrm{diag}(I, J)$.

设对称方阵 $S=(s_{ij})_{\nu\times\nu}$, 而 $C=(c_{ij})_{\nu\times\nu}$, 先取 S 的第一行和第一列的所有的元素 $s_{1i}=s_{i1}=0$, $\forall 1\leq i\leq\nu$, 则

$$C+JS=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}+s_{22} & \cdots & c_{1\nu}+s_{2\nu}\\ c_{21} & c_{22}+s_{32} & \cdots & c_{2\nu}+s_{3\nu}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{\nu-11} & c_{\nu-12}+s_{\nu 2} & \cdots & c_{\nu-1\nu}+s_{\nu\nu}\\ c_{\nu 1} & c_{\nu 2}+y_2 & \cdots & c_{\nu\nu}+y_\nu\end{pmatrix},$$

其中 $y_j=\sum_{i=1}^{\nu-1}a_is_{i+1j}$, $\forall 2\leq j\leq\nu$. 先对 $2\leq j\leq\nu$ 选取 $s_{2j}=s_{j2}=c_{j1}-c_{1j}$, 则 $C+JS$ 的第一行与第一列互为转置. 一般地,对

$2 \leq d \leq \nu - 1$，设已选定 S 的前 d 行和前 d 列使 S 的前 d 行与前 d 列互为转置，并且 $C + JS$ 的前 $d-1$ 行与前 $d-1$ 列互为转置. 则 $C + JS$ 的第 d 列的元素已经确定，但第 d 行的第 $d+1$ 至第 ν 列的元素含有未经选定的参数 s_{d+1j}. 对 $d+1 \leq j \leq \nu - 1$ 选 $s_{d+1j} = s_{jd+1} = c_{jd} + s_{j+1d} - c_{dj}$，对 $j = \nu$ 选 $s_{d+1\nu} = s_{\nu d+1} = c_{\nu d} + y_d - c_{d\nu}$，则 S 的第 $d+1$ 行与第 $d+1$ 列已选定并且互为转置，而 $C + JS$ 的第 d 行与第 d 列也已互为转置. 按此递归过程即可选定 S 所有的元素，使 $C + JS$ 的前 $\nu - 1$ 行与前 $\nu - 1$ 列互为转置，$C + JS$ 也就是对称方阵了. ▌

现在回过来重新处理 $n = r = 4$ 或 6 时 $N = \mathrm{Sp}(n, F, H_1) \otimes \mathrm{Sp}(r, F, H_2)$ 的扩群 X 的类型问题. 由于有了引理 7.5.1，只须再证明 $k \geq 1$，以及在 $n = 4$ 时证明 $k \geq 2$，就可完成当 $N = \mathrm{Sp}(n, F, H_1) \otimes \mathrm{Sp}(r, F, H_2)$ 时对于定理 7.1.2 的证明了.

引理 7.5.3　设 $n = 2\nu = 4$ 或 6，$N_1 = N_2 = \mathrm{Sp}(n, F, H_1)$，$N = N_1 \otimes N_2$ 如定理 7.1.2 所述. 设 $N < X \leq \mathrm{GL}(n^2, F)$，且 $X \not\leq \Gamma_1$. 取 $g_0 = (A_{ij})_{n \times n} \in X_{W_k} \backslash \Gamma_1$ 使 $k \leq n$ 最大，则 $k \geq 1$.

证明　为叙述方便，对任意一对 $1 \leq i, j \leq n$，用 e_{ij} 表示 $V = \mathrm{Mat}_{1 \times n^2} F$ 的第 $(i-1)n + j$ 个基向量；并且记 $u_{ij} = e_{ij} g_0$，它也就是 g_0 的第 $(i-1)n + j$ 行. 设 $e_{i1} (1 \leq i \leq n)$ 张成 F-空间 U，$e_{1j} (1 \leq j \leq n)$ 张成 F-空间 W，则 $V = U \otimes_F W$，并且 $N = \mathrm{Sp}(U, f_U) \otimes \mathrm{Sp}(W, f_W)$，$f_U$、$f_W$ 分别是 U、W 上由交错方阵 H_1 定义的辛内积.

每个行向量 $u \in V$ 也可写成矩阵 $[u] = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathrm{Mat}_n F$ 的形式，其中 a_{ij} 是 u 的第 $(i-1)n + j$ 分量. 对任意 A、$B \in \mathrm{GL}(n, F)$，则有 $[u(A \otimes B)] = A'[u]B$. 对 V 的任意子集 S，我们记 $[S] = \{[u] | u \in S\}$.

假定 $k = 0$. 我们设法导出矛盾.

(7.5.3.1) 由 $k = 0$ 导致的若干性质：

如果 g_0 的某一块 A_{ij} 不可逆，用适当的 $(P_1 \otimes I) g_0 (P_2 \otimes I)$ (P_1、$P_2 \in N_1$ 是置换阵)代替 g_0 可使 $A_{1,\nu+1}$ 不可逆. 有 $P \in N_2$

使 $PA_{1,\nu+1}$ 的第一行为零，用 $(I\otimes P)g_0$ 代替 g_0 可使 $A_{1,\nu+1}$ 的第一行为零. 于是 $T(s)=g_0T_{\nu+1,1}(sI)g_0^{-1}\in X_{W_1}$ 对所有的 $s\in F$ 成立. $k=0$ 的最大性迫使所有这些 $T(s)\in\Gamma_1$，由引理 7.4.6 可知这导致 $k=n$.

故所有的 A_{ij} 可逆，并且由于可用任意 $(P\otimes I)g_0$ 或 $g_0(P\otimes I)(P\in N_1)$ 代替 g_0，从而可以用任意线性组合 $\sum_{i=1}\lambda_iA_{ij}$ 或者 $\sum_{j=1}\lambda_jA_{ij}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n\in F$ 不全为 0) 代替 A_{ij}，所有这样的线性组合也应当可逆.

g_0 的每一行 u_{ij} 对应的方阵 $[u_{ij}]$ 也应当可逆. 若不然，存在 $P\in N_1$ 使 $[u_{ij}]P=[u_{ij}(P\otimes I)]$ 的第一行为零. 用 $g_0(P\otimes I)$ 代替 g_0，就化为 A_{i1} 的第 j 行为零的情形，导致 A_{i1} 不可逆. 由于可用任意的 $(P_1\otimes I)g_0(P_1\in N_1)$ 或者 $(I\otimes P_2)g_0(P_2\in N_2)$ 代替 g_0，从而用任意的线性组合 $\sum_{i=1}\lambda_i[u_{ij}]$ 或 $\sum_{j=1}\lambda_j[u_{ij}](\lambda_1, \cdots, \lambda_n\in F$ 不全为 0) 代替 $[u_{ij}]$，所有这样的线性组合也应当可逆. 记 $W_1=\langle u_{1j}\mid 1\le j\le n\rangle$, $U_1=\langle u_{i1}\mid 1\le i\le n\rangle$，则 $[W_1]$ 和 $[U_1]$ 中的非零方阵都可逆.

(7.5.3.2) $g(z)=g_0zg_0^{-1}\in X_{W_1}(z\in N_{u_{11}})$ 不含于 Γ_1 的条件：

记 $N_{u_{11}}$ 是 u_{11} 在 N 中的稳定子群，则对每个 $z\in N_{u_{11}}$, $g(z)=g_0zg_0^{-1}$ 的第一行等于 $g_0g_0^{-1}$ 的第一行 $(1, 0, \cdots, 0)$，即 $g_z\in X_{W_1}$. 如果能选 z 使 $g_z\notin\Gamma_1$，则已得到所需要的结论 $k\ge 1$.

下面来看 $g(z)=(B_{ij})_{n\times n}\notin\Gamma_1$ 的条件，如果 $g(z)\in\Gamma_0=\mathrm{GL}(n, F)\otimes\mathrm{GL}(n, F)$，设 $g(z)=A\otimes B=(a_{ij}B)_{n\times n}$，则每个块 $B_{ij}=a_{ij}B$ 可逆(当 $a_{ij}\ne 0$)或等于零(当 $a_{ij}=0$). 因此，如果某个块 B_{ij} 非零而又为奇异，则 $g(z)\notin\Gamma_0$. 特别所有的 $B_{1j}(j\ge 2)$ 的第一行都已是零，是奇异方阵. 如果能选 z 使 $B_{1j}(j\ge 2)$ 不全为零，则 $g(z)\notin\Gamma_0$.

下面讨论怎样使 $B_{1j}(j\ge 2)$ 不全为零. 对任意 $1\le i, j\le n$,

记 v'_{ij} 为 g_0^{-1} 的第 $(i-1)n+j$ 列，则 $u_{ij}v'_{i'j'}$ 恰是矩阵 $g_0g_0^{-1}=I$ 的第 $(i-1)n+j$ 行、第 $(i'-1)n+j'$ 列的元素，仅当 $i=i'$ 且 $j=j'$ 时等于 1，而在其余情况下全为 0. 每个行向量 $u\in V=\mathrm{Mat}_{1\times n^2}F$ 可唯一地写成 $u=\sum_{i,j}a_{ij}u_{ij}$ 的形式，其中的系数 a_{ij} 恰是 ug_0^{-1} 的第 $(i-1)n+j$ 分量. ug_0^{-1} 的最后 $(n-1)n$ 个分量全为 0 的条件是所有的系数 $a_{ij}(i\geq 2)$ 全为 0，即 $u\in W_1$. 而 B_{1j} $(j\geq 2)$ 全为零也就是所有的 $u_{1l}zg_0^{-1}$ 的最后 $(n-1)n$ 个分量全为 0，其条件是 $u_{1l}z\in W_1$, $\forall l$. 也就是 z 定驻 W_1. 如果有某个 $u\in W_1$ 使 $[uz]-[u]$ 非零然而不可逆，则 $uz-u\notin W_1$，从而 $uz\notin W_1$，这将导致 $g(z)\notin\Gamma_0$.

要使 $g(z)\notin\Gamma_1$，还应使 $g(z)\notin\Gamma_0\tau$，即 $g(z)\tau=(C_{ij})_{n\times n}\notin\Gamma_0$. 注意，$\tau$ 也定驻 e_{11}，从而 $g(z)$定驻 e_{11}，所有的 $C_{1j}(j\geq 2)$ 的第一行也都是零. 只要能选取 z 使 $C_{1j}\neq 0$ 对某个 $j\geq 2$ 成立，则 $g(z)\notin\Gamma_0\tau$. 但 C_{1j}的各列依次是各 B_{1i}的第 j 列. 要使 $C_{1j}(j\geq 2)$ 不全为零，只要使某个 B_{1i}的最后 $n-1$ 列不全为零即可. 为此，只须使 W_1z 不含于 U_1. 如果能选 z_1、$z_2\in N_{u_{11}}$，使得对某个 $u\in W_1$，$\Delta(z_i)=[uz_i]-[u](i=1,2)$ 都非零且不可逆，并且 $\Delta(z_1)-\Delta(z_2)=[uz_1]-[uz_2]$ 也非零且不可逆，则 uz_1、uz_2 都不含于 W_1，并且它们的差不含于 U_1，因而不可能同时含于 U_1. 其中必有一个 $uz_i\notin W_1\cup U_1$, $g(z_i)\in X_{W_1}\backslash\Gamma_1$.

下面就来具体寻找上面所述的 z_1、z_2：首先，要知道怎样的 $z\in N$ 定驻 u_{11}：对一般的 u_{11}，这很难判断. 因此，我们希望用适当的 $g_0(P_1\otimes P_2)\in X\backslash\Gamma_1(P_1, P_2\in N_1=N_2)$ 代替 g_0，从而用与 $[u_{11}]$辛相抵的方阵 $P'_2[u_{11}]P_1$ 代替$[u_{11}]$，将$[u_{11}]$化简. 由引理 7.5.2可知，通过这样的辛相抵可以使 $[u_{11}]=\begin{pmatrix}I & O\\ C_1 & D_1\end{pmatrix}$，其中

$D_1=\begin{pmatrix}J & *\\ O & *\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}(\nu, F)$，$J$ 是具有引理 7.5.2 所述形状的 t 阶不可约方阵.

现在可以找出 $N_{u_{11}}$ 中的一批元素，每个 ν 阶对称方阵

$S \in M^+(\nu, F)$ 对应于一个 $B(S) = \begin{pmatrix} I & O \\ S & I \end{pmatrix} \in N_2$. 如果 D_1S 也是对称方阵,则 $A(-D_1S) = \begin{pmatrix} I & O \\ -D_1S & I \end{pmatrix} \in N_1$. 选取

$$z(S) = B(S) \otimes A(-D_1S)' \in N,$$

则 $[u_{11}z(S)] = A(-D_1S)[u_{11}]B(S) = [u_{11}]$, $z(S)$定驻 u_{11}.

下面指出怎样选择对称方阵 S,使 D_1S 也是对称方阵. 对每个 t 维列向量 $0 \neq y \in \mathrm{Mat}_{t\times 1}F$, 依次以 y, Jy, J^2y, $\cdots$, $J^{t-1}y$ 为各列组成一个 t 阶方阵 $S_0(y)$. 则可验证 $S_0(y)$是对称方阵. 由 J 不可约知 $S_0(y)$可逆. 且对于 J 的任意非零多项式

$$f(J) = c_0I^{(t)} + c_1J + \cdots + c_{t-1}J^{t-1} \in F[J]$$

有 $f(J)S_0(y) = S_0(f(J)y)$, 它也是可逆的 t 阶对称方阵. 特别 $JS_0(y) = S_0(Jy)$ 是可逆对称方阵. 取

$$S(y) = \mathrm{diag}(S_0(y), O^{(\nu-t)}),$$

则 $S(y)$是 ν 阶对称方阵,并且 $D_1S(y) = \mathrm{diag}(S_0(Jy), O)$ 是对称方阵. 因此,由每个非零 t 维列向量 y 能够得到一个 $z(S(y)) \in N_{u_{11}}$.

对每个 $u \in W_1$, 记 $[u] = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 使 $A, B, C, D \in \mathrm{Mat}_\nu F$. 则对每个 $z(S) \in N_{u_{11}}$, 有

$$\begin{aligned} \Delta(u, S) &= [uz(S)] - [u] \\ &= \begin{pmatrix} BS & O \\ DS - D_1SA - D_1SBS & -D_1SB \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

只要能选 $\mathrm{Mat}_{t\times 1}F$ 中的非零向量 y_1、y_2 使 $\Delta(u, S(y_i))(i = 1, 2)$ 及 $\Delta(u, S(y_1)) - \Delta(u, S(y_2))$ 都非零且奇异,就证明了 $k \geq 1$.

注意,$[W_1]$是 F 上 n 维空间,且其中的非零矩阵都可逆. 特别,$[u] \in [W_1]$ 的第一行为零当且仅当 u 为零. 这说明,从 u 到

$[u]$的第一行的映射是 F-向量空间 W_1 到 $\mathrm{Mat}_{1\times n}F$ 的单同态，从而是同构. $[u]\in[W_1]$ 的第一行取遍 $\mathrm{Mat}_{1\times n}F$.

(7.5.3.3) $t<\nu$ 的情形：

设 $t<\nu$，则对每个 $y\neq 0$，$\Delta(u, S(y))$ 的块 $BS(y)$ 奇异，从而 $\Delta(u, S(y))$奇异，只要能选出 y 使 $BS(y)\neq 0$，则 $\Delta(u, S(y))$ 非零且奇异. 只要能选 y_1、y_2 使 $BS(y)\neq 0$ 对 $y=y_1$、y_2、y_1-y_2 都成立，则 $\Delta(u, S(y_i))\,(i=1, 2)$ 及 $\Delta(u, S(y_1))-\Delta(u, S(y_2))$ 都非零且奇异，这导致 $k\geq 1$.

由于 $[u]\in[W_1]$ 的第一行可以取遍 $\mathrm{Mat}_{1\times n}F$，因而可选$[u]$使 B 的第一行为$(1, 0, \cdots, 0)$，BS 的第一行等于 S 的第一行. 除了 $t=1$ 且 $F=F_2$ 的情形外，总可以在 $\mathrm{Mat}_{t\times 1}F$ 中选两个不同的非零列向量 y_1、y_2，于是 $S(y_1)$、$S(y_2)$以及 $S(y_1)-S(y_2)=S(y_1-y_2)$ 的第一行都不为零，从而 $BS(y)\neq 0$ 对 $y=y_1$、y_2、y_1-y_2 都成立，恰如所需.

现在设 $t=1$ 且 $F=F_2$. 此时 $\mathrm{Mat}_{1\times 1}F$ 中唯一的非零列向量是 1，$S(1)=\mathrm{diag}(1, O^{(\nu-1)})$. 取 $z=z(S(1))$，则 $uz\notin W_1$，$g(z)\notin\Gamma_0$. 如果 $g(z)\in\Gamma_0\tau$，$g(z)=(A\otimes B)\tau$. 由 $z^2=I$ 知

$$g(z)^2=(A\otimes B)\tau(A\otimes B)\tau=AB\otimes BA=I,$$

导致 $AB=BA=I$，$B=A^{-1}$，$g(z)=(A\otimes I)\tau(A\otimes I)^{-1}$. 由 $\mathrm{rank}(z-I)=2n-2$ 得

$$\begin{aligned}2n-2&=\mathrm{rank}(g(z)-I)=\mathrm{rank}(\tau-I)\\&=(n-1)n/2,\ n=4.\end{aligned}$$

设 $n=4$. 只要能选秩为 2 的对称方阵 S 使 D_1S 也是对称方阵，则对 $z=z(S)$ 有

$$\mathrm{rank}(g(z)-I)=8\neq\mathrm{rank}(\tau-I)=6,$$

$g(z)$就不可能与 τ 共轭，因而就不可能含于 $\Gamma_0\tau$. 只要选一个 S 使 $\Delta(u, S)$非零且奇异，则 $g(z(S))$不含于 Γ_0，从而不含于 Γ_1.

现在 $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，如果 $b=1$，则可以用适当的 PD_1P^{-1} ($P \in \mathrm{SL}(2, 2)$) 代替 D_1，变为 $D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的情形. 对这样的 D_1，选 $S = I$ 或 $S = E_{12} + E_{21}$ 都能使 D_1S 对称. 如果

$$\Delta(S) = [uz(S)] - [u] - [u_{11}] = \begin{pmatrix} B-S & O \\ * & * \end{pmatrix}$$

可逆或为零，则 $B-S$ 可逆或为零. 但可选$[u]$使 B 的第一行为 $(1, 0)$，取 $S=I$ 就可使 $B-I$ 的第一行为零，从而 $B-I$ 不可逆，迫使 $B-I=0$, $B=I$. 但此时又可选 $S = E_{12} + E_{21}$，得到 $B - S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 既不为零也不可逆，故总能达到目的.

(7.5.3.4) $t=\nu$ 的情形：

此时

$$D_1 = J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & O & 0 \\ O & O & I & O \\ 0 & 0 & O & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{t-1} \end{pmatrix}$$

在 $\mathrm{Mat}_{1\times\nu}F$ 上不可约，$K=F[J]$ 是 FI 的 ν 次扩域. 且按引理7.5.2可经过辛相抵将$[u_{11}]$化为准对角形 $[u_{11}] = \mathrm{diag}(I, J)$.

对任意 $0 \neq y \in \mathrm{Mat}_{\nu\times 1}F$, $Ky = \mathrm{Mat}_{\nu\times 1}F$. 由 $\{J^i \mid 0 \leqslant i \leqslant \nu-1\}$ 是K 的 F-基知 $\{J^i y \mid 0 \leqslant i \leqslant \nu-1\}$ 是$\mathrm{Mat}_{\nu\times 1}F$ 的基，以这组基为列的方阵 $S(y)$可逆。对任意的 $\theta \in K^*$, $S(\theta y) = \theta S(y)$ 也是可逆对称方阵，$\theta S(y) = (\theta S(y))' = S(y)\theta'$. 对所有的 $S = S(y) \neq 0$，都有 $g(z(S)) \in X_{W_1}$. 只要能选 S 使 $g(z(S)) \notin \Gamma_1$，则 $k \geq 1$. 若不然，设所有的 $g(z(S)) \in \Gamma_1$，设法推出矛盾。

$$[u] = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in [W_1] \text{ 的第一行可取遍}$$

$\mathrm{Mat}_{1\times n}F$，可选 B 的第一行不为零，从而 $B\neq 0$. 如果 $g(z(S))\in\Gamma_0$，则

$$[v(S)]=\Delta(u,S)=[uz(S)]-[u]$$
$$=\begin{pmatrix}BS & O\\ * & -JSB\end{pmatrix}\in[W_1].$$

如果 $g(z(\theta S))\in\Gamma_0$，$\theta\in K^*$，则还有

$$[w(S,\theta)]=\Delta(v(S),\theta S)=[v(S)z(\theta S)]-[v(S)]$$
$$=\begin{pmatrix}O & O\\ -J\theta SBS-JSB\theta S & O\end{pmatrix}\in[W_1].$$

情况 1 $\mathrm{char}F\neq 2$：

由 $g(z(S))\in\Gamma_1$ 知 $g(z(2S))=g(z(S))^2\in\Gamma_0$，从而 $[w(2S,1)]\in[W_1]$. 但 $[w(2S,1)]$ 显然奇异，且左下角的块 $-J1SBS-JSB1S=-2JSBS\neq 0$. 非零且奇异的 $[w(2S,1)]$ 不可能含于 $[W_1]$，产生矛盾。

情况 2 $\mathrm{char}F=2$ 且 $F\neq F_2$：

对任意 $\lambda\in F^*$，取辛方阵

$$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda I^{(\nu)},\ \lambda^{-1}I^{(\nu)})\in\mathrm{Sp}(n,\ F,\ H_1),$$

则 $\Lambda[u_{11}]\Lambda^{-1}=[u_{11}]$，这说明 $h(\lambda)=\Lambda^{-1}\otimes\Lambda'\in N$ 定驻 u_{11}. $g(\lambda)=g_0h(\lambda)g_0^{-1}\in X_{W_1}$. 若所有的 $g(\lambda)(\lambda\in F^*)$ 都含于 Γ_1，则所有的 $g(\lambda)^2=g(\lambda^2)$ 都含于 Γ_0. 选取 $[u]=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in[W_1]$ 使 $B\neq 0$. 由于 $\mathrm{char}F=2$ 且 $F\neq F_2$，F^* 的平方元的集合 $F^{*2}=\{\lambda^2|\lambda\in F^*\}$ 中至少存在两个不同的不等于 1 的元素 λ_1、λ_2. 对 $\lambda=\lambda_i(i=1,\ 2)$，$\lambda^{-2}\neq 1$，$(\lambda^{-2}+1)^{-1}=\lambda^2(1+\lambda^2)^{-1}\in F^*$. 对 $\lambda=\lambda_1$、λ_2，按我们的假定都有 $g(\lambda)\in\Gamma_0$，从而

$$[v(\lambda)]=(\lambda^{-2}+1)^{-1}([uz(\lambda)]+[u])$$

$$= \begin{pmatrix} O & \lambda^2 B \\ C & O \end{pmatrix} \in [W_1],\ \forall \lambda = \lambda_1,\ \lambda_2,$$

$$[w] = [v(\lambda_1)] - [v(\lambda_2)]$$

$$= (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\begin{pmatrix} O & B \\ O & O \end{pmatrix} \in [W_1].$$

但显然$[w]$奇异，且由 $\lambda_1^2 - \lambda_2^2 \neq 0$ 及 $B \neq 0$ 知 $[w] \neq 0$，这样的$[w]$不可能含于$[W_1]$，产生矛盾. 这就解决了 $\mathrm{char}F = 2$ 且 $F \neq F_2$ 的情形.

情况 3　$F = F_2$:

由于当 $F = F_2$ 时预先假定了

$$X \leq \mathrm{GO}(n^2, F, H_1 \otimes H_2),\ Q(u_{11}) = 0.$$

但 $Q(u_{11}) = \mathrm{Tr}J = a_{\nu-1}$，这迫使 $a_{\nu-1} = 0$.

当 $n = 4$ 即 $\nu = 2$ 时，$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$可约. 产生矛盾.

设 $n = 6,\ \nu = 3$，映射 $\varphi: K \to \Gamma_1/\Gamma_0,\ \theta \to g(z(\theta S))\Gamma_0$ 是群同态，$|\mathrm{Ker}\varphi| \geq \dfrac{1}{2}|K| = 4$. 取 $\theta_0 S(0 \neq \theta_0 \in \mathrm{Ker}\varphi)$ 代替 S，可设 $g(z(S)) \in \Gamma_0$. $\forall\, \theta \in \mathrm{Ker}\varphi$, $[w(S,\theta)] \in [W_1]$ 迫使 $J\theta SBS + JSB\theta S = 0$, $\theta SB = SB\theta$, SB 中心化 $\mathrm{Ker}\varphi$，而 $\mathrm{Ker}\varphi$ 生成环 K，故 $SB = \theta_1 \in K^*$, $BS = S^{-1}\theta_1 S = S^{-1}S\theta_1' = \theta_1'$. 可选 B 与 $J'S^{-1}$的第一行相同，$BS = J'$, $JSB = J^2$, $[u] = [v(S)] = \begin{pmatrix} J' & O \\ * & J^2 \end{pmatrix} \in [W_1]$. 取

$$g = I \otimes \mathrm{diag}(J'^{-1}, J) \in I \otimes \mathrm{Sp}(6, F, H_2),$$

则 $[ug] = \begin{pmatrix} I & O \\ * & J^3 \end{pmatrix}$. 但 W_1 是全奇异子空间，故 $0 = Q(u) = Q(ug) = \mathrm{Tr}(J^3) = a_0$. 但这导致 J 不可逆，仍有矛盾. ▎

引理 7.5.4　设 $N_1 = N_2 = \mathrm{Sp}(4, F, H_1)$, $N = N_1 \otimes N_2$ 如定理 7.1.2 所述. 设 $N < X \leq \mathrm{GL}(n^2, F)$，且 $X \not\leq \Gamma_1$. 取 $g_0 =$

$(A_{ij})_{n\times n} \in X_{W_k}\backslash\Gamma_1$ 使 $k \leq n$ 最大，则 $k \geq 2$.

证明 当 $F = F_2$ 时，仍取引理 7.5.1 中所说的 $T_0(S) \in N_1 \otimes I$，得到 $T_1(S) = g_0T_0(S)g_0^{-1} = (B_{ij})_{4\times 4} \in X_{W_1}$. 并设法选取 $S \neq 0$ 使 B_{13}的第 2 行的后三个分量全为 0. 但由于此时按定理 7.1.2 的假定有 $X \leq O(n^2, F, Q)$，$T_1(S) \in X_{W_1}$ 迫使 B_{13}的第二列总是为零. 因此，只要再选 B_{13}的第二行的最后两个分量为零就行了. 而满足这一要求的全体 S 组成的集合 M 是由两个方程组成的、三个未知数的齐次线性方程组，解空间的维数 ≥ 1，于是仍可由引理 7.5.1 的推理方法得出结论 $k \geq 2$.

以下设 $F \neq F_2$，由于 $T_0(S) \in N_1 \otimes I(S \in M^+(2, F))$ 中可以独立选取的参数只有 3 个，而需要满足的条件(方程个数)也是 3，不能保证总有非零解 S. 我们设法在 $N_1 \otimes I$ 选取不同于 $T_0(S)$ 的形式的元素，以增加独立参数的个数.

令每个行向量 $\vec{S} = (s_1, \cdots, s_5) \in \mathrm{Mat}_{1\times 5}F$ 对应于一个矩阵

$$T(\vec{S}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & 1 & 0 & 0 \\ s_3 & s_4 & 1 & -s_1 \\ s_5 & s_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes I^{(4)} \in \mathrm{SL}(4, F) \otimes I^{(4)},$$

则$\vec{S}$中有 5 个独立参数. 但要使 $T(\vec{S}) \in \mathrm{Sp}(4, F, H_1) \otimes I$，$\vec{S}$还需满足一个约束条件：

$$s_1s_2 + s_4 - s_5 = 0. \qquad (7.5.1)$$

因此，独立参数的个数大体上可以说是 4 个.

现在证明：可选取满足上述约束条件的$\vec{S}$，使

$$T_1 = g_0T(\vec{S})g_0^{-1} = (B_{ij})_{4\times 4}$$

的块 B_{13}的第二行后三个元素全为零.

先不考虑约束条件(7.5.1)，记

$$M = \{\vec{S} \in \mathrm{Mat}_{1\times 5}F \mid B_{13} \text{ 的第二行后三个元素全为零}\},$$

则 M 是一个齐次线性方程组的解空间，未知数的个数为 5，方程的个数为 3. 因此，解空间 M 的维数 $d \geq 2$. 取 M 的一组基 $\vec{S}_i = (s_{i1}, \cdots, s_{i5})(1 \leq i \leq d)$. 我们设法选取不全为 0 的 $x_1, \cdots, x_d \in F$，来得到满足约束条件(7.5.1)的

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^{d} x_i \vec{S}_i = (s_1, \cdots, s_5).$$

每个 $s_j = \sum_{i=1}^{d} s_{ij}x_i$ 是 $x_1, \cdots, x_d$ 的线性多项式，约束条件(7.5.1)成为 d 个未知数 $x_1, \cdots, x_d$ 的方程. 我们希望找出它的非零解.

如果所有的 $\vec{S}_i$ 的第一分量 s_{i1} 全为 0，则约束条件(7.5.1)成为 $s_4 - s_5 = 0$ ，是 d 个未知数的齐次线性方程，解集为 F 上的向量空间，维数 $\geq d-1 \geq 1$. 此时存在非零的 $\vec{S} = (0, s_2, \cdots, s_5)$ 满足约束条件. 而 $T(\vec{S})$ 就是引理 7.5.1 中所需的一个 $T_0(S)$ $(S \neq 0)$. 这也就是说，在此情况下可以选取引理 7.5.1 所述的 $T_0(S)$ 使 $T_1(S) = g_0T_0(S)g_0^{-1} = (B_{ij})_{n\times n} \in X$ 的块 B_{14} 的第二行的最后 3 个分量全为零，由引理 7.5.1 的讨论可得到所需的结论. 设 s_{i1} 不全为零，不妨选取 M 的基 $\vec{S}_i$ 使 $s_{11} = 1$ ，而 $s_{i1} = 0$ 对所有的 $i \geq 2$ 成立. 于是 $s_1 = x_1$. 如果 $d \geq 3$ ，取 $x_1 = 0$ 使 $s_1 = 0$ ，则约束条件(7.5.1)成为 $d-1$ 个未知数 $x_2, \cdots, x_d$ 的齐次线性方程，$d-1 \geq 2$，解空间的维数 $\geq (d-1)-1 \geq 1$ ，仍化为引理7.5.1可以解决的情况.

以下设 $d = 2$，$s_{11} = 1$，$s_{21} = 0$. 将 x_1 看成待定参数，约束条件(7.5.1)可以看成 x_2 为未知数的一元方程

$$(s_{22}x_1 + s_{24} - s_{25})x_2 = - s_{12}x_1^2 - (s_{14} - s_{15})x_1.$$

x_2 的系数是 x_1 的多项式 $f(x_1)$，次数不超过 1. 如果 $f(0) = 0$，则取 $x_1 = 0$ 可得非零解 x_2. 仍化为引理 7.5.1 可以解决的情形. 设 $f(0) \neq 0$. 于是 $f(x_1)$ 是非零多项式，在 F 中至多有一个零点. 当

$F \neq F_2$ 时，可选取 $x_1 = s_1 \in F^*$ 使 $f(s_1) \neq 0$，方程有唯一解 x_2.

这就证明了：当 $F \neq F_2$ 时，可选取 $\vec{S} \neq 0$ 满足约束条件(7.5.1)，得到一个非单位的 $T(\vec{S}) \in N_1 \otimes I$ 使

$$T_1 = g_0 T(\vec{S}) g_0^{-1} = (B_{ij})_{4\times 4} \in X$$

的块 B_{13} 的第二行最后三个元素全为零. 由于 $T(\vec{S})$ 与 g_0 都定驻 W_1，$T_1 \in X_{W_1}$.

如果 $T_1 \notin \Gamma_1$，则 $g_2(s) = T_1 T_{31}(sI^{(4)}) T_1^{-1} \in X_{W_2}$ 对所有的 $s \in F$ 成立. $k = 1$ 的最大性迫使所有的 $g_2(s) \in \Gamma_1$，由引理7.4.6得 $k = 4$.

现在设 $T_1 \in \Gamma_1$. 则 $T_1^2 = g_0 T(\vec{S})^2 g_0^{-1} \in \Gamma_0$，$T(\vec{S})^2 = T(\vec{S}_0)$ 对另一个 $\vec{S}_0 \in \mathrm{Mat}_{1\times 5}F^*$ 成立. 且当 $\vec{S}$ 的第一分量为 $s_1 \neq 0$ 时 $\vec{S}_0$ 的第一分量为 $2s_1$.

当 $\mathrm{char}F \neq 2$ 时，$T_1^2 = g_0 T(\vec{S}_0) g_0^{-1} = A_1 \otimes B_1$，且由 T_1^2 的第一行为$(1,0,\cdots,0)$知可选 A_1、B_1 为幺幂矩阵. 取适当的 $z \in \langle N, T_1 \rangle = \tilde{N}_1 \otimes \tilde{N}_2 < X \cap (\mathrm{SL}(4, F) \otimes \mathrm{SL}(4, F))$ 可将 T_1 共轭到 $\tilde{T}_1 = \tilde{A}_1 \otimes \tilde{B}_1$ 使 $\tilde{A}_1$、$\tilde{B}_1$ 具有形式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & s & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

注意，对 $T = T(\vec{S})$ 有 $(T - I)^4 = 0$，且当 $(T - I)^2 \neq 0$ 时 $(T - I)^3 \neq 0$. $T = T_1$ 也同样有这些性质. 如果 A_1 与 B_1 都不是单位阵，则当 $\mathrm{rank}(A_1 - I) \geq 3$ 或 $\mathrm{rank}(B_1 - I) \geq 3$ 时 $(T_1 - I)^4 \neq 0$，而在其余情况下 $(T_1 - I)^3 = 0 \neq (T_1 - I)^2$，都导致矛盾. 故 $B_1 = I$ 或 $A_1 = I$ 成立. 此时对所有的 $\lambda \in F$ 有 $T_1(\lambda \vec{S}_0) =$

$I+\lambda(T_1(\vec{S}_0)-I)\in\Gamma_0$，于是可沿用引理 7.4.6 的证明方法得到 $k=4$.

当 $\mathrm{char}F=2$ 时，如果 $T_1^2=I$，则可选

$$z\in\langle \mathrm{Sp}(4, F, H_1)\otimes I, T(\vec{S})\rangle < X\cap(\mathrm{SL}(4, F)\otimes I)$$

将 $T(\vec{S})$ 共轭到某个 $T_0(S)=z^{-1}T(\vec{S})z$，用 $g_0z\in X\backslash\Gamma_1$ 代替 g_0 后，即可用引理 7.5.1 来处理. 否则，$T_1^2\neq I$，$T_1^2\in\Gamma_0$. 但是 $(T_1^2)^2=I$，$T(\vec{S})^2$ 等于某个 $T_0(S)$，$0\neq S\in\mathrm{Mat}_2F$. 而 $T_2=g_0T_0(S)g_0^{-1}=A_1\otimes B_1\in\Gamma_0$，且 $A_1^2=B_1^2=I$. 由引理 7.4.6 可知 $k=4$（当 $B_1=I$ 或 $A_1=I$）或 $k\geq[(r+1)/2]=2$（当 A_1、B_1 都不为单位阵）. 总之，有 $k\geq 2$. ▌

定理 7.1.2 的证明（$n=r$ 的情形）

综合上述引理 7.5.1、7.5.3 和 7.5.4 的结论，可知在定理 7.1.2所说的条件下，当 $N=\mathrm{Sp}(n, F, H_1)\otimes N_2$ 在 $\mathrm{GL}(n^2, F)$ 中的扩群 $X\not\leq\Gamma_1$ 时，在 X 中存在 $g_1=(A_{ij})_{n\times n}\notin\Gamma_1$ 使 $A_{1j}=0$ 对所有的 $j\geq 2$ 成立. 由引理 7.4.2 或 7.4.4 即得到定理 7.1.2 所需的结论. ▌

三、定理 7.1.3 的证明（$N=\mathrm{Sp}(n, F, H_1)\otimes O(r, F, H_2)$ 的情形）

按照定理 7.1.3(a)的要求，$\mathrm{char}F\neq 2$，且当 $n\leq r$ 时 $n\geq 8$.

$n>r$ 或 $n=r\geq 8$ 的情形已经在前面解决，只须再处理 $r>n\geq 8$ 的情形，此时 $\Gamma_1=\Gamma$.

仍设在 N 的扩群 $X\not\leq\Gamma$ 中选取 $g_1=(A_{ij})_{n\times n}\in X_{W_k}\backslash\Gamma$ 使 $k\leq r$ 最大，只要证明 $k=r$，再引用引理 7.4.2 即可.

设 $k<r$，设法推出矛盾：设 $\tilde{N}_2$ 由

$$I^{(n)}\otimes\tilde{N}_2=X\cap(I^{(n)}\otimes\mathrm{SL}(r, F))$$

定义. 若 $\tilde{N}_2=\mathrm{SL}(r, F)$，则因 $r>n$，由引理 7.3.2 知 $\tau^{-1}X\tau$

的子群 $\langle \tau^{-1} g_0 \tau, \mathrm{SL}(r, F) \otimes \mathrm{Sp}(n, F, H_1) \rangle$ 包含一个 $\tilde{g}_1 = (B_{ij}^{(n)})_{r\times r} \notin \mathrm{GL}(r, F) \otimes \mathrm{GL}(n, F)$，且 $B_{1j} = 0$ 对 $2 \le j \le r$ 成立. 于是由引理 7.4.1 得 $\tau^{-1} X \tau \ge \mathrm{SL}(rn, F)$，从而 $X \ge \mathrm{SL}(nr, F)$，定理 7.1.3 的结论成立. 故以下设 $\tilde{N}_2 < \mathrm{SL}(r, F)$.

设 $H_2 = \mathrm{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_r)$ 是对角阵，记 $g_0^{-1} = (\tilde{A}_{ij})_{n\times n}$，对任意对称方阵 $S = (s_{ij})_{\nu\times\nu} \in \mathrm{Mat}_\nu F$，取

$$T_0(S) = \begin{pmatrix} I & O \\ S & I \end{pmatrix} \otimes I \in N,$$

则

$$T_1(S) = g_0 T_0(S) g_0^{-1} = I + (B_{ij})_{n\times n} \in X_{W_k},$$

$T_1(S) - I$ 的块

$$B_{1l} = \sum_{i=1,\ j=1}^{\nu} s_{ij} A_{1,\ \nu+i} \tilde{A}_{jl} = \sum_{1 \le i < j \le \nu} s_{ij} D_{ijl},$$

其中 $D_{ilj} \in \mathrm{Mat}_\nu F$. 注意，由于所有的 $A_{1,\ \nu+i}$ 的前 k 行都为 0，所有的 $B_{1l}(1 \le l \le n)$ 的前 k 行也都为零.

当 $k \ge r - \nu$ 时，记 $M = \{S \mid B_{1,\ \nu+1}$ 的第 $k+1$ 行的最后 ν 个分量全为 0$\}$，将每个对称方阵 $S = (s_{ij})_{\nu\times\nu}$ 与它所对应的独立参数组 $(s_{ij} \mid 1 \le i < j \le \nu)$ 等同起来. 则 M 是一个齐次线性方程组的解空间. 这个方程组的未知数 s_{ij} 的个数是 $\nu(\nu+1)/2$，方程的个数等于 ν. 于是由 $\nu \ge 2$，有

$$\dim M \ge \nu(\nu+1)/2 - \nu = \nu(\nu-1)/2 > 0.$$

如果对所有的 $S \in M$ 都有 $T_1(S) \in \Gamma$，则由引理 7.4.6 得 $k = r$. 设有 $S_0 \in M$ 使 $g_2 = T_1(S_0) \notin \Gamma$，则对每个 $s \in F$，有

$$T_2(s) = g_2 (T_{\nu+1,\ 1}(s) \otimes I) g_2^{-1} \in X_{W_{k+1}}.$$

k 的最大性迫使所有这些 $T_2(s) \in \Gamma$. 于是又可用引理 7.4.6 而得 $k = r$.

以下设 $k < r - \nu \le r - 2$，记 $M = \{S \mid B_{1l}$ 的第 $(k+1, r)$ -

分量等于 0，对 $1 \leq l \leq n\}$，则 M 是一个齐次线性方程组的解空间，未知数 s_{ij} 的个数是 $\nu(\nu+1)/2$，方程的个数是 $n=2\nu$，在 $n \geq 8$（即 $\nu=4$）的假定下，我们有

$$\dim M \geq \nu(\nu+1)/2 - 2\nu = \nu(\nu-3)/2 > 0, \ M \neq 0.$$

如果 $T_1(S) \in \Gamma$ 对所有的 $S \in M$ 成立，仍可由引理 7.4.6 得 $k = r$. 设可选 $S_0 \in M$ 使 $\tilde{g}_0 = T_1(S_0) \notin \Gamma$. 不妨用 $g_2 \in X_{W_k}\backslash\Gamma$ 代替 g_0，直接设 $g_0 = (A_{ij})_{n\times n} \in X_k$ 的块 $A_{1j}(1 \leq k \leq n)$ 的第 $(k+1, r)$-分量都为 0. 记住 H_2 是对角阵，于是 $\Lambda = \mathrm{diag}(I^{(r-1)}, -1)$ 是 $N_2 = O(r, F, H_2)$ 中的对称，满足条件 $\Lambda^2 = I$ 及 $\mathrm{rank}(\Lambda - I) = 1$. 记 $z = I^{(n)} \otimes \Lambda \in N$，则 $z^2 = I$，$\mathrm{rank}(z-I) = n$. 由 M 的定义知 z 定驻 g_2 的前 $k+1$ 行，$g_2 = g_0 z g_0^{-1} \in X$ 定驻 W_{k+1} 中所有的向量. 由 k 的最大性可知只能 $g_2 = A \otimes B \in \Gamma$. 在这里不能像前面那样用引理 7.4.6 得出 $k=r$，必须另外处理如下：

如果 A 不是纯量阵，则有 $P \in \mathrm{SL}(n, F)$ 使 $PAP^{-1} = A_1 = (a_{ij})_{n\times n}$ 不是对角阵，某个非对角元 $a_{tl} \neq 0(t \neq l)$. $g_3 = (P \otimes I)g_2(P \otimes I)^{-1} = (a_{ij}B)_{n\times n}$ 与 z 共轭，应有 $\mathrm{rank}(g_3 - I) = \mathrm{rank}(z - I) = n$. 但 $g_3 - I$ 含有秩为 r 的子矩阵 $a_{tl}B \in \mathrm{GL}(r, F)$，故 $\mathrm{rank}(g_3 - I) \geq r > n$，出现矛盾. 这说明 $A = \lambda I$ 是纯量阵，不妨用 λB 代替 B，使 $g_2 = I^{(n)} \otimes B$.

由 g_2 定驻 W_{k+1} 中所有的向量而知 $B - I$ 的前 $k+1$ 行为零，并且由 $g_2^2 = I$，有 $B^2 = I$. 由 $\mathrm{rank}(g_2 - I) = n$ 知 $\mathrm{rank}(B-I) = 1$. $\mathrm{Im}(B-I) = \langle w \rangle$ 是一维子空间. $B - I$ 的第 i 行具有形式 $b_i w$, $b_i \in F$, $\forall 1 \leq i \leq r$. 已经知道 $b_1 = \cdots = b_{k+1} = 0$. 并且至少有一个 $b_i \neq 0(i > k+1)$. 比较等式

$$g_0(I \otimes (\Lambda - I)) = (I \otimes (B - I))g_0$$

两边的前 r 行，得

$$(A_{11} \cdots A_{1n})(I^{(n)} \otimes \mathrm{diag}(O^{(r-1)}, -2))$$

$$= (B - I)(A_{11} \cdots A_{1n}).$$

这个等式左端的矩阵除了第 jr 列 $(1 \leq j \leq r)$ 外其余各列都为零.右端也应如此,即 $(B - I)A_{1j}(1 \leq j \leq n)$ 的前 $r - 1$ 列都为零.也就是说 $wA_{1j} = (0, \cdots, 0, *)$, $\forall 1 \leq j \leq n$.

记 $w = (a_1, \cdots, a_r) \in \mathrm{Mat}_{1\times r}F$. 如果 $a_{k+1} = \cdots = a_r = 0$, 则 $B - I$ 的后 $r - k$ 列全为零.而 $B - I$ 的前 k 行也全为零,故 $(B - I)^2 = 0$, $B^2 = I + 2(B - I) \neq I$, 这与 $B^2 = I$ 相矛盾.故 a_{k+1}, $\cdots$, a_r 不全为零, $w_{k+1} = (0, \cdots, 0, a_{k+1}, \cdots, a_r)$ 是 $W = \mathrm{Mat}_{1\times r}F$ 中的非零向量,并且在内积 $f(x, y) = xH_2y'$ 下与 W 的前 k 个自然基向量 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k$ 正交.对于 $2 \leq j \leq r$, 由 A_{1j}的前 k 行为零而知 $w_{k+1}A_{1j} = wA_{1j} = (0, \cdots, 0, *)$.

如果 w_{k+1} 迷向,则 $\nu(H_2) \geq 1$. 如果 $B \notin GO(r, F, H_2)$, 则可由引理 4.1.1 得 $\tilde{N}_2 \geq \langle N_2, B\rangle = SL(r, F)$, $X \geq SL(nr, F)$. 设 $B \in GO(r, F, H_2)$, 则因 $r - 1$ 维空间 $\mathrm{Ker}(B - I)$ 必含有非迷向向量,由引理 4.2.3 知 $B \in O(r, F, H_2)$. 从而

$$\mathrm{Im}(B - I) = \mathrm{Ker}(B - I)^{\perp} \subseteq \langle \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k\rangle^{\perp},$$

$$w = (a_1, \cdots, a_r) = (0, \cdots, 0, a_{k+1}, \cdots, a_r) = w_{k+1}.$$

且由 $B - I$ 为非幂零可知 $\mathrm{Im}(B - I) = \langle w\rangle = \langle w_{k+1}\rangle$ 是非迷向线,而 B 是关于超平面 $w^{\perp}$的对称.故设 w_{k+1} 非迷向. W 的两两正交的非迷向向量 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k, w_{k+1}$ 可以扩充为一组正交基 $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k, w_{k+1}, \cdots, w_r\}$. 依次以这组正交基中的向量为各行排成可逆方阵 $P \in GL(r, F)$. 用 $I^{(n)} \otimes P \in GL(nr, F)$ 作 $GL(nr, F)$的内自同构

$$\varphi: g \mapsto (I \otimes P)g(I \otimes P)^{-1},$$

则 $\varphi(N) = N_1 \otimes O(r, F, H_3)$, 其中 $H_3 = PH_2P'$ 仍是对角阵. $\varphi(g_0) = (C_{ij})_{n\times n}$ 的块 $C_{ij} = PA_{ij}P^{-1}$. 特别 $C_{1j}(1 \leq j \leq n)$ 的前 k 行仍与 A_{1j}相同.记 P^{-1}的最后一行为 β. 对每个 $2 \leq j \leq r$,

$w_{k+1}A_{1j} = (0, \cdots, 0, c_j)$，$c_j \in F$，则 C_{1j} 的第 $k+1$ 行等于

$$w_{k+1}A_{1j}P^{-1} = (0, \cdots, 0, c_j)P^{-1} = c_j\beta.$$

即所有的 $C_{1j}(2 \leq j \leq r)$ 的第 $k+1$ 行 $c_j\beta$ 共线. 不妨一开始就用 W 的正交基 $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k, w_{k+1}, \cdots, w_r\}$ 代替自然基 $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r\}$，将每个 $g \in \mathrm{GL}(nr, F)$ 改写为矩阵 $\varphi(g)$，从而用 H_3 代替 H_2，将 g_0 改写为 $\varphi(g_0)$，使块 $A_{1j}(2 \leq j \leq n)$ 的第 $k+1$ 行 $c_j\beta$ 互相共线. 取不全为零的 λ_1、$\lambda_2 \in F$ 使 $\lambda_1 c_{\nu+1} + \lambda_2 c_{\nu+2} = 0$，从而 $\lambda_1 c_{\nu+1}\beta + \lambda_2 c_{\nu+2}\beta = 0$. 即 $\lambda_1 A_{1,\nu+1} + \lambda_2 A_{1,\nu+2}$ 的第 $k+1$ 行为零，从而前 $k+1$ 行都为零. 取辛方阵 $P_1 \in \mathrm{Sp}(n, F, H_1)$ 使 P_1 的第 $\nu+1$ 列的第 $\nu+1$、$\nu+2$ 行的元素分别等于 λ_1、λ_2，而这一列的其余元素都为零. 于是 $g_2 = g_0(P_1 \otimes I) = (B_{ij})_{n\times n} \in X\backslash\Gamma$，$B_{1,\nu+1}$ 的前 $k+1$ 行为零，$T_1(s) = g_2(T_{\nu+1,1}(s) \otimes I)g_2^{-1} \in X_{W_{k+1}}$ 对所有的 $s \in F$ 成立. k 的最大性迫使所有的 $T_1(s) \in \Gamma$. 这就可用引理 7.4.6 得出 $k = r$. ▌

§7.6 其 余 情 形

本节讨论 $N = N_1 \otimes N_2$ 的其余情形. 包括：

$$N = \mathrm{SU}(n, F, H_1) \otimes \mathrm{SU}(r, F, H_2)$$

和

$$N = \Omega(n, F, H_1) \otimes \Omega(r, F, H_2) (\mathrm{char} F \neq 2)$$

两种情形. 设 H_1、H_2 分别是关于 F 的对合 $J: a \mapsto \bar{a}$ 的 ρ-Hermite 可逆方阵和 ε-Hermite 可逆方阵，Witt 指数分别是 ν 和 μ.

定理 7.1.3 的证明（条件(b)或(c)成立的情形）

条件(b)：$N = \mathrm{SU}(n, F, H_1) \otimes \mathrm{SU}(r, F, H_2)$，$\nu^2 > 2r$.

条件(c)：$\mathrm{char} F \neq 2$，$N = \Omega(n, F, H_1) \otimes \Omega(r, F, H_2)$，$\nu(\nu - 1) > 4r$.

设 $N < X \leq \mathrm{GL}(nr, F)$，并且 $X \not\leq \Gamma_1$，这里 $\Gamma_1 = \Gamma$（当

$n \geq r$ 时)或 $\Gamma_1 = \Gamma \cup \Gamma\tau$ (当 $n = r$ 时),而 $\Gamma = \mathrm{GL}(n, F) \otimes \mathrm{GL}(r, F)$.

对每个 $S \in \mathrm{Mat}_\nu K$ 记

$$T_0(S) = \begin{pmatrix} I_{(\nu)} & O & O \\ S & I & O \\ O & O & I \end{pmatrix} \otimes I^{(r)} \in \mathrm{SL}(n, F) \otimes I^{(r)},$$

则 $T_0(S) \in N_1 \otimes I$ 当且仅当 $\overline{S}' = -\rho S$. 上述条件要求 N_1 的 Witt 指数 ν 的某个二次函数大于 r,实际上就是要求 S 中的自由参数的个数与 r 相比足够大. 在这样的条件下,可以在 N 的扩群 X 中找出引理 5.5.1 的条件(也是引理 7.4.2 的条件)所要求的 g_1,再引用引理 7.4.2 就可定出 X 的类型.

仍如 § 7.5 中一样,对非负整数 $k \leq nr$, 记

$$W_k = \{(a_1, \cdots, a_{nr}) \in \mathrm{Mat}_{1\times nr}F \mid a_j = 0, \forall j > k\},$$

X_{W_k}为 W_k 在 X 中的稳定子群. 当 $N_1 = \mathrm{SU}(n, K, H_1)$ 时,记 $m = r$, 当 $N_1 = \Omega(n, K, H_1)$ 时,记 $m = 2r$. 选 $g_0 = (A_{ij})_{n\times n} \in X_{W_k} \backslash \Gamma_1$, 使 $k \leq m$ 最大. 只要能证明 $k = m$, 由引理 7.4.2 立即得知 X 属于定理 7.1.3 所述的类型.

设 $k < m$, 我们设法推出矛盾:

$M^{J, -\rho}(\nu, F) = \{A \in \mathrm{Mat}_\nu F \mid \overline{A}' = -\rho A\}$ 是 F_J 上的向量空间. 对每个 $S = (s_{ij})_{\nu\times\nu} \in M^{J, -\rho}(\nu, F)$, 取 $T_0(S) \in N_1 \otimes I$, 记 $T_1(S) = g_0 T_0(S) g_0^{-1} = (B_{ij})_{n\times n} \in X_{W_k}$.

情况 1　$N = \mathrm{SU}(n, F, H_1) \otimes \mathrm{SU}(r, F, H_2)$:

不妨总设 $\rho = -1$, 于是 $T_0(S) \in N$ 的条件为 $\overline{S}' = S$. F 是对称元域 F_J 上的二维空间. 设 F 在 F_J 上的一组基为 $\{1, \omega\}$. 则每个 $\lambda \in F$ 在这组基下有坐标 a、$b \in F_J$ 使 $\lambda = a + b\omega$. 将 S 中每个 $s_{ij}(i < j)$ 写成 $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\omega$ 的形式使 a_{ij}、$b_{ij} \in F_J$, 则每个 S 可以看成 F_J 上的 ν^2 维向量,其坐标是由 ν^2 个独立参数 a_{ij}、

$b_{ij} \in F_J (1 \leq i < j \leq \nu)$ 和 $s_{ii} \in F_J (1 \leq i \leq \nu)$ 组成的数组.

$T_1(S)$的块 $B_{1,\nu+1} = \sum_{1\leq i,j\leq \nu} s_{ij} C_{ij}$，$C_{ij}$是一组与 S 的选取无关的矩阵. 记 $M = \{S \in M^{J,-\rho}(\nu, F) \mid B_{1,\nu+1}$ 的第 $k+1$ 行的最后 $r-k$ 个元素全为 $0\}$. 将所有的 C_{ij}的一切元素也都用 F_J 中一对元素来表示，则 M 是 F_J 上一个齐次线性方程组的解空间，未知数的个数为 ν^2，方程的个数为 $2(r-k)$，解空间 M 在 F_J 上的维数 $\geq \nu^2 - 2(r-k) = (\nu^2 - 2r) + 2k$. 由于定理 7.1.3 只考虑 $\nu^2 > 2r$ 的情形，故 M 在 F_J 上的维数总是 > 0，$M \neq 0$.

每个 $0 \neq S \in M$ 和 $s \in F_J^*$ 决定一个

$$g(s, S) = T_1(S)(T_{\nu+1,1}(s) \otimes I^{(r)}) T_1(S)^{-1} \in X_{W_{k+1}}.$$

如果能选 S、s 使 $g(s, S) \notin \Gamma_1$，则与 k 的最大性相矛盾. 故设所有的 $g(s, S)$都含于 Γ_1.

当 $F_J \neq F_2$ 时，如果可以选取 S_0 使 $T_1(S_0) \notin \Gamma_1$，则可用引理 7.4.6 由 $g(s, S_0) \in \Gamma_1$ $(\forall s \in F_J)$ 推出 $k = r$. 如果 $T_1(S) \in \Gamma_1$ 对所有 $S \in M$ 成立，由于 $g_0 \notin \Gamma_1$，仍可用引理 7.4.6 推出 $k = r$.

设 $F_J = F_2$，从而 $F = F_4$. 如果 $k \geq 1$，则 $\dim_{F_J} M > 2k \geq 2$，$|M| > |F|$，引理 7.4.6 的结论(ii)、(iii)都不可能成立. 如果 $T_1(S) \in \Gamma_1$ 对所有的 S 成立，则引理 7.4.6 的结论(i)成立，即 $k = r$. 设可选 S_0 使 $T_1(S_0) \notin \Gamma_1$，但 $g(1, S_0) \in \Gamma_1$，仍可用引理 7.4.6 得到 $k = r$.

现在设 $F_J = F_2$ 且 $k = 0$. 先设可以选取 S_0 使 $g = T_1(S_0) \notin \Gamma_1$. 但 $g(1, S_0) = g(T_{\nu+1,1}(1) \otimes I^{(r)}) g^{-1} \in \Gamma_1$. 如果引理 7.4.6 的结论(i)成立，仍有 $k = r$. 如果引理 7.4.6(ii)成立，则 $k \geq [(r+1)/2] \geq 1$，出现矛盾. 最后的可能性是引理 7.4.6(iii)成立，这仅当 $n = r = 2\operatorname{rank}(T_{\nu+1,1}(1) - I) + 1 = 3$ 时才有可能. 但是由 $\nu^2 > 2r \geq 4$ 显然有 $n > 4$，仍有矛盾. 剩下的情形是 $T_1(S) \in \Gamma_1$ 对所有的 $S \in M$ 成立. 引理 7.4.6 的结论(i)、(ii)不可能成立，

否则,会分别导致 $k=r$ 和 $k\geq 1$. 出现矛盾. 设引理 7.4.6 的结论(iii)成立. 这迫使

$$1=\dim_{F_J}M\geq \nu^2-2r,$$

从而 $\nu^2=2r+1$. 另一方面,还要求 $n=r=2\text{rank}S+1$ 对唯一的 $0\neq S\in M$ 成立,特别 $n=r$ 为奇数. 由于 $F=F_4$ 是有限域, $\nu=(n-1)/2$, $n=r=2\nu+1$. 故 $\nu^2=2r+1=4\nu+3$, $(\nu-2)^2=7$, $\nu=\sqrt{7}+2$ 不是整数. 仍有矛盾. 从而证明了在任何情况下都有 $k=r$. 于是可用引理 7.4.2 得到定理所述的结论.

情况 2　$N=\Omega(n, F, H_1)\otimes\Omega(r, F, H_2)$:

在此 $J=1$, $\rho=1$, $M^{J,-1}(\nu, F)$ 就是全体交错方阵所组成的集合 $M_0(\nu, F)$,它是 F 上的 $\nu(\nu-1)/2$ 维空间. 对每个 $S\in M_0(\nu, F)$, 取 $T_1(S)=g_0T_0(S)g_0^{-1}=(B_{ij})_{n\times n}\in X_{W_k}$. 记 $T_1(S)$ 的子矩阵 $B=(B_{i,\nu+j})_{1\leq i,j\leq 2}$. 定义

$$M=\{S\in M_0(\nu, F)\mid B\text{ 的第 }k+1\text{ 行的最后 }2r-k\text{ 个元素全为 }0\},$$

则 M 是一个齐次线性方程组的解空间,未知数 $s_{ij}(1\leq i<j\leq\nu)$ 的个数为 $\nu(\nu-1)/2$, 方程的个数为 $2r-k$. 因此

$$\begin{aligned}\dim_F M&\geq(\nu(\nu-1)/2)-(2r-k)\\&=(\nu(\nu-1)-4r)/2+k.\end{aligned}$$

定理 7.1.3 的条件(c)规定 $\nu(\nu-1)>4r$, 因此 $\dim_F M>k\geq 0$. 由于 $\text{char}F\neq 2$, $F\neq F_2$. 如果 $T_1(S)\in\Gamma_1$ 对所有的 $S\in M$ 成立, 则由引理 7.4.6 可知存在 $g_1\in X_{W_{2r}}\backslash\Gamma_1$, $k=2r$. 否则,可选 $0\neq S_0\in M$ 使 $T_1(S_0)\notin\Gamma_1$. 由 M 的定义得

$$g_2(s)=T_1(S_0)\left(T_0\left(\begin{pmatrix}0&s\\-s&0\end{pmatrix}\right)T_1\right)(S_0)^{-1}\in X_{W_{k+1}},\ \forall s\in F^*.$$

k 的最大性迫使所有的 $g_2(s)\in\Gamma_1$. 再用引理 7.4.6 仍可得 $k=$

$2r$.

综合上述证明,在任何情况下总有 $k = 2r$. 由引理 7.4.2 立即得出所需的结论. ▌

第 8 章

基础域的子域或子环上的群

设 K 是域 F 的子域，则作用于 $V(n, K)$上的 $\mathrm{GL}(n, K)$可看成作用于 $V(n, F) = F \otimes_K V(n, K)$ 上的 $\mathrm{GL}(n, F)$的子群. $V(n, K)$的一组基 $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ 也是这个 $V(n, F)$在 F 上的一组基. 在这组基下将 $\mathrm{GL}(n, F)$写成矩阵群，则

$$\mathrm{GL}(n, K) = \mathrm{GL}(n, F) \cap \mathrm{Mat}_n K.$$

本章的目的是定出 $\mathrm{GL}(n, K)$的子群 $N = \mathrm{SL}(n, K)$ 或 $\mathrm{U}'(n, K, \Delta, L)$在 $\mathrm{GL}(n, F)$中的扩群. F 是有限域的情形已在文献[3]中解决了. 我们讨论 F 为任意域的情形(但并不排除有限域)，但只解决了 $\dim_K F = r < \infty$，且 r 相对于 n 或 $\nu_L(\Delta)$不是太大的情形.

按第 5 章的说法，这里处理的是 $r = 1$ 即 $R = F$ 的情形. 由于假定了 F 是域，K^* 在 F^* 中的正规化子等于 F^*. 于是 $\Gamma = \mathrm{GL}(n, K) \cdot F^*$. 对 K 与 F 之间的任一域 E，记 $\Gamma_E = \mathrm{GL}(n, E) \cdot F^*$. 特别 $\Gamma = \Gamma_K$.

在§8.3 中，还将对域 F 的极大子环 K 讨论 $\mathrm{SL}(n, K)$在 $\mathrm{GL}(n, F)$中的扩群.

对非交换体 F，其子体或子环 K 上的典型群在 $\mathrm{GL}(n, F)$中的扩群尚难定出，本章就不涉及了.

§8.1 主 要 结 果

我们的目的是定出 $N = \mathrm{SL}(n, K)$ 或 $\mathrm{U}'(n, K, \Delta, L)$在

$GL(n, F)$中的扩群. 显然,对K与F之间的任一域E,我们有E上的典型群$M_E(U'(n, E, \Delta_E, L_E) \leq M_E \leq \Gamma_E$, 对适当的$\Delta_E$, L_E)来充当N的扩群. 现在的问题是:除了对应于中间域E的扩群外,是否还有别的扩群? 我们有以下主要结果:

定理 8.1.1 设F是域,K是F的子域,$[K : F] = r < \infty$. 设N是作用于$V = V(n, K)$上的典型群且满足下述条件之一:

(a) $N = SL(n, K)$, $n(n-1)/2 > r$.

(b) $N = Sp(n, K, H)$, $n > r$ 或 $n(n+2) > 8r$.

(c) $N = SU(n, K, H)$, $\nu = \nu(H)$ 满足条件 $\nu^2 > 2r$.

(d) $N = \Omega(n, K, \Delta)$, $\nu = \nu(\Delta)$ 满足条件 $\nu(\nu-1) > 4r$.

(e) $\mathrm{char}K = 2$, $N = \Omega(n, K, \Delta, L)$, $L \neq 0$, $\nu = \nu(\Delta)$ 满足条件 $\nu(\nu-1) \geq 2r$.

则在K与F之间存在中间域E,使下列结论之一成立:

(i) $SL(n, E) \trianglelefteq X \leq GL(n, E) \cdot K^*$.

(ii) $SU(n, E, H) \trianglelefteq X \leq GU(n, E, H) \cdot F^*$,

(包括 $SU(n, E, f) = Sp(n, F, f)$ 的情形).

(iii) $X \trianglerighteq \Omega(n, E, \Delta, L_1) \geq N$, 对某个$L_1$.

推论 8.1.2 设K是域F的极大子域且$[F : K] = r$, $N_K = SL(n, K) < N_F = SL(n, F)$, 或 $N_K = U'(n, K, H) < N_F = U'(n, F, H)$, 或 $N_K = \Omega(n, K, \Delta) < N_F = \Omega(n, F, \Delta)$, 其中$H$, $\Delta \in \mathrm{Mat}_n K$, 且定义$N_K$所用的对合是定义$N_F$所用的对合在$K$上的限制. 则

(a) $N_K = SL(n, K)(n(n-1)/2 > r)$ 的正规化子是 $N_F = SL(n, F)$ 的极大子群.

(b) $N_K = Sp(n, K, H)(n > r$ 或 $n(n+2) > 8r)$的正规化子是 $N_F = Sp(n, F, H)$ 的极大子群.

(c) $N_K = SU(n, K, H)(\nu = \nu(H)$ 满足条件 $\nu^2 > 2r)$ 的正规化子是 $N_F = SU(n, F, H)$ 的极大子群.

(d) $N_K = \Omega(n, K, \Delta)(\nu = \nu(\Delta)$ 满足条件 $\nu(\nu-1) > 4r)$ 的正规化子是 $N_F = \Omega(n, F, \Delta)$ 的极大子群.

(e) $\mathrm{char}K = 2$, $N_K = \Omega(n, K, \Delta, L)$($L \neq 0$, $\nu = \nu(\Delta)$ 满足条件 $\nu(\nu - 1) \geq 2r$) 的正规化子是 $N_F = \Omega(n, F, \Delta, L_1)$ 的极大子群,其中 L_1 是 L 生成的 F^2-子空间.

定理 8.1.3 设 F 是无限域,K 是 F 的极大子环,但不是域,$n \geq 2$. 则

(1) 设 $\mathrm{SL}(n, K) \leq X \leq \mathrm{GL}(n, F)$, 则 X 属于下面两个类型 (i)、(ii)之一:

(i) $\mathrm{SL}(n, K) \trianglelefteq X \leq \mathrm{GL}(n, K) \cdot F^*$.

(ii) $X \trianglerighteq \mathrm{SL}(n, F)$.

(2) $(\mathrm{GL}(n, K) \cdot F^*) \cap \mathrm{SL}(n, F)$ 是 $\mathrm{SL}(n, F)$的极大子群.

§8.2 子域 K 上 $\mathrm{SL}(n, K)$的扩群

本节对 $N = \mathrm{SL}(n, K)$ 的情形证明定理 8.1.1,即定出 $N = \mathrm{SL}(n, K)$ 在 $\mathrm{GL}(n, F)$中的扩群. 设 $N \leq X \leq \mathrm{GL}(n, F)$, 我们总可选取一个最大的中间域 $E(K \subseteq E \subseteq F)$, 使 $N_E = \mathrm{SL}(n, E) \leq X$. 用 N_E 代替 N 后不妨设 K 已最大,即:不存在 K 的子域 $E \supsetneqq K$, 使 $\mathrm{SL}(n, E) \leq X$. 如果 $X \leq \Gamma$, 则定理已成立. 否则,可取 $g_0 \in X \backslash \Gamma$. 我们证明 X 的子群 $Y = \langle N, g_0 \rangle$ 包含一个 $\mathrm{SL}(n, E)$ 使 $E \supsetneqq K$. 导致矛盾. 从而完成定理的证明. 按照第 5 章所述,关键在于在 Y 中找到至少含一个零元素的矩阵 $g_1 \notin \Gamma$. 为此,我们选取适当的 $T_0 \in N$, 使 $T_1 = g_0 T_0 g_0^{-1} \in Y$ 含有零元素. 当 $T_1 \notin \Gamma$ 时,取 $g_1 = T_1$ 即可. 在 §5.4 中已经对 $T_1 \in \Gamma$ 的情形作了一些讨论. 针对本章中 $N_R(D) = F^*$ 的特殊情况,我们有以下引理:

引理 8.2.1 设 $g_0 \in \mathrm{GL}(n, F) \backslash \Gamma$, $0 \neq S \in \mathrm{Mat}_n K$ 是幂零矩阵. 对每个 $\lambda \in K$ 记 $T(\lambda) = I + \lambda S \in \mathrm{SL}(n, K)$. 如果 $g(\lambda) = g_0 T(\lambda) g_0^{-1} \in \Gamma$ 对所有的 $\lambda \in K$ 成立,则 $g(\lambda) \in \mathrm{GL}(n, K)$, $\forall \lambda \in K$, 且存在 z、$z_1 \in N$ 使 $\tilde{g}_1 = z g_0 z_1 \notin \Gamma$ 的第$(1, n)$分量为 0.

证明 先证明 $g(\lambda) \in \mathrm{GL}(n, K)$ 对所有的 $\lambda \in K$ 成立.

当 $K \neq F_2$ 时，由引理 5.4.6 知 $g(\lambda) \in \Gamma \backslash \mathrm{GL}(n, K)$ 当且仅当 $g(1) = \sigma I$, $\sigma \in F^*$ 是幺幂元. 但由于 F 是域，知 $\sigma - 1$ 幂零 $\Longleftrightarrow \sigma = 1 \Longrightarrow g(1) = I \Longrightarrow S = 0$. 产生矛盾. 这说明 $g(\lambda) \in \Gamma$ 仅当 $g(\lambda) \in \mathrm{GL}(n, K)$.

剩下 $K = F_2$ 的情形：记 $n = 2^t m$ 使 m 是奇数，其中 $t \geq 0$. 设 $g(1) = P\sigma$, $P \in \mathrm{SL}(n, K)$, $\sigma \in F^*$. 由 $T(1) - I$ 幂零知 $g(1) - I = P\sigma - I$ 幂零，$P - \sigma^{-1}I$ 幂零. $P \in \mathrm{SL}(n, F_2)$ 的特征根全是 σ^{-1}，其特征多项式

$$
\begin{aligned}
c(x) &= (x - \sigma^{-1})^n = (x^{2^t} - \sigma^{-2^t})^m \\
&= x^n + \sigma^{-2^t} x^{2^t(m-1)} + \cdots \in F_2[x],
\end{aligned}
$$

从而 $\sigma^{-2^t} \in F_2$, $\sigma^{-2^t} = 1$, $\sigma = 1$, $g(1) = P \in \mathrm{SL}(n, F_2)$.

这证明了 $g(\lambda) \in \mathrm{GL}(n, K)$ 对所有的 $\lambda \in K$ 成立. 由引理 5.4.5 知，存在 z、$z_1 \in N$，使 $\tilde{g}_1 = z g_0 z_1 \notin \Gamma$ 的第$(1, n)$分量为 0. ∎

引理 8.2.2 设 $N = \mathrm{SL}(n, K)$, $2 \leq r = [F : K] < n(n-1)/2$, $g_0 \in \mathrm{GL}(n, F) \backslash \Gamma$, $Y = \langle N, g_0 N g_0^{-1} \rangle$. 则存在 K 在 F 中的一个真扩域 E(即 $K \subsetneq E \subseteq F$)，使 $Y \geq \mathrm{SL}(n, E)$.

证明 只须证明存在 $\tilde{g}_1 = (b_{ij})_{n \times n} \in Y \backslash \Gamma$ 使 $a_{1n} = 0$，由引理 5.4.2 可知，存在 F 的子环 $E \supsetneq K$ 使 $Y \geq \mathrm{SL}(n, E)$. 但由 F/K 是有限扩张知它是代数扩张，E 是域.

下面证明 $\tilde{g}_1$ 的存在性：对任一下三角幂零阵

$$S = (s_{ij})_{n \times n} \in \mathrm{Mat}_n K (s_{ij} = 0, \forall i \leq j),$$

记 $T(S) = I + S \in \mathrm{SL}(n, K)$，取 $g(S) = g_0 T(S) g_0^{-1} \in X$. 我们希望选取 $S \neq 0$，使 $g(S) = (b_{ij})_{n \times n}$ 的第$(1, n)$分量 $b_{1n} = 0$. 记 $g_0 = (a_{ij})_{n \times n}$, $g_0^{-1} = (\tilde{a}_{ij})_{n \times n}$. 则

$$b_{1n} = \sum_{1 \leq j < i \leq n} a_{1i} \tilde{a}_{jn} s_{ij}. \quad c_{ij} = a_{1i} \tilde{a}_{jn} \quad (1 \leq j < i \leq n)$$

是 F 中 $n(n-1)/2$ 个元素，而按我们的假设，有 $[F:K]<n(n-1)/2$，故这些 c_{ij} 在 K 上线性相关，可选一组不全为零的 $s_{ij}\in K(1\leq j<i\leq n)$ 使 $b_{ij}=\sum_{1\leq j<i\leq n}c_{ij}s_{ij}=0$，从而 $\sum_{1\leq j<i\leq n}c_{ij}(\lambda s_{ij})=0$，$\forall\lambda\in K$. 也就是说，可选取 $S=S_0\neq 0$，使所有的 $g(\lambda S_0)$ $(\lambda\in K)$ 的第 $(1,n)$ 分量为 0. 如果可选 $\lambda=\lambda_0\in K^*$ 使 $g(\lambda_0S_0)\notin\Gamma$，则取 $\tilde{g}_1=g(\lambda_0S_0)$ 即可. 否则，$g(\lambda S_0)\in\Gamma$ 对所有的 $\lambda\in K$ 成立，由引理 8.2.1 可知所需的 $\tilde{g}_1$ 是存在的. ▌

由引理 8.2.2 知，当 $X\not\leq\Gamma$ 时，必有 K 在 F 中的真扩域 E 使 $\mathrm{SL}(n,E)\leq X$. 这与 K 的最大性相矛盾. 从而对 $N=\mathrm{SL}(n,K)$ 的情形完成了定理 8.1.1 的证明.

§8.3　极大子环 K 上 $\mathrm{SL}(n,K)$ 的扩群

设 K 是无限域 F 的极大子环但不是域，$n\geq 2$，我们要证明定理 8.1.3，即：对 $N=\mathrm{SL}(n,K)$ 在 $\mathrm{GL}(n,F)$ 中的任一扩群 X，$X\leq\Gamma=\mathrm{GL}(n,K)\cdot F^*$ 与 $X\geq\mathrm{SL}(n,F)$ 二者必有其一成立.

引理 8.3.1　对每个 $\theta\in F^*$，$\theta\in K$ 或 $\theta^{-1}\in K$ 必有一个成立.

证明　由于 K 不是域，必有 $0\neq\theta\in K$ 使 $\theta^{-1}\notin K$. 如果 θ^{-1} 是 K 上的整元素，即有首一多项式

$$f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_{m-1}x+a_m\in K[x]$$

使 $f(\theta^{-1})=0$，从而

$$\theta^{-1}=-a_1-a_2\theta-\cdots-a_{m-1}\theta^{m-2}-a_m\theta^{m-1}\in K,$$

出现矛盾. 这说明 K 在 F 中的整闭包 $D\subsetneq F$. 由 K 是 F 的极大子环得 $K=D$. 即 K 在 F 中是整闭的. 对 $\theta\in F^*$，如果 $\theta\notin K$，则 $K[\theta]$ 是 K 的真扩环，从而 $K[\theta]=F$. 特别 $\theta^{-1}\in K[\theta]$. 即 $\theta^{-1}=b_0+b_1\theta+b_2\theta^2+\cdots+b_k\theta^k$，对某一组 $b_i\in K$，$1\leq i\leq k$. 于是 θ^{-1} 是首一多项式

$$f(x) = x^k - b_0x^{k-1} - b_1x^{k-2} - \cdots - b_k \in K[x]$$

的根，θ^{-1}是 K 上的整元素，从而含于 K. 如所欲证. ▌

定理 8.1.3 的证明

设 $X \not\leq \Gamma$. 取 $g_0 = (a_{ij})_{n\times n} \in X\backslash\Gamma$，并且选 g_0 使它的第一行所含的非零元素的个数 t 最小，显然 $t \geq 1$. 否则，g_0 不可逆. 设 a_{1j_1}，…，a_{1j_t}是 g_0 的第一行的全部非零元素，存在单项矩阵 $P \in \mathrm{SL}(n, K)$ 将 $\mathrm{Mat}_{1\times n}F$ 的自然基向量 e_{j_1}，…，e_{j_t}分别送到 e_1，…，$\pm e_t$. 用 $g_0P \in X\backslash\Gamma$ 代替 g_0，可使 $a_{1j} \neq 0 \Longleftrightarrow 1 \leq j \leq t$. 如果 $t \geq 2$，取 $\theta = a_{11}^{-1}a_{1t} \in F^*$，当 $\theta \in K$ 时，$T_{1t}(-\theta) \in \mathrm{SL}(n, K)$，$g_0T_{1t}(-\theta) \in X\backslash\Gamma$ 的第一行的非零元素只有 $t-1$ 个，与 t 的最小性相矛盾. 设 $\theta \notin K$，由引理 8.3.1 可知 $\theta^{-1} = a_{1t}^{-1}a_{11} \in K$，$g_0T_{t1}(-\theta) \in X\backslash\Gamma$ 的第一行的非零分量只有 $t-1$ 个. 仍有矛盾. 故 $t = 1$，$a_{1j} = 0$ 对 $j \geq 2$ 成立.

当 $n \geq 3$ 时，$g_1 = g_0$ 符合引理 5.2.1 的要求. 由引理 5.2.1 知有 K 在 F 中的真扩环 E 使 $\mathrm{SL}(n, E) \leq X$. 由 K 的极大性得 $E = F$，$X \geq \mathrm{SL}(n, F)$，恰如定理所述.

设

$$n = 2,\ g_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in X\backslash\Gamma.$$

我们进一步选 g_0 为对角阵，即设法化 $a_{21} = 0$. 如果 $a_{21} \neq 0$，记 $\theta_1 = a_{21}a_{11}^{-1}$，$\theta_2 = a_{22}^{-1}a_{21}$，当 $\theta_1 \in K$ 时，用 $T_{21}(-\theta_1)g_0$ 代替 g_0；当 $\theta_2 \in K$ 时，用 $g_0T_{21}(-\theta_2)$ 代替 g_0，都可将 g_0 化为对角阵. 设 θ_1、θ_2 都不含于 K，则由引理 8.1.1 可知 θ_1^{-1}、θ_2^{-1} 都含于 K. 于是

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T_{12}(-\theta_1^{-1})g_0T_{12}(-\theta_2^{-1})$$

$$= \mathrm{diag}(a_{21},\ a_{11}a_{21}^{-1}a_{22}) \in X\backslash\Gamma$$

可用来代替 g_0，化 g_0 为对角阵. 这就证明了总可选取对角阵 $g_0 =$

$\text{diag}(a_{11}, a_{22}) \in X\backslash\Gamma$. 记 $\theta_0 = a_{11}^{-1}a_{22}$. 由 $g_0 \notin \Gamma$ 知 $\theta_0 \notin K$ 或 $\theta_0^{-1} \notin K$ 必有其一成立. 如果 $\theta_0^{-1} \notin K$, 用

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} g_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \text{diag}(a_{22}, a_{11})$$

代替 g_0,从而用 $\theta_0^{-1} \notin K$ 代替 θ_0,可化为 $\theta_0 \notin K$ 的情形. 故可设 $\theta_0 \notin K$. 由 K 是 F 的极大子环知 $K[\theta_0] = F$. 于是对任意的 $\gamma \in F$, 可记 $\gamma = \sum_{i=0}^{k} a_i\theta_0^i$ 使 $a_i \in K$, $\forall 0 \leq i \leq k$. 我们有 $g_0 = a_{11}\text{diag}(1, \theta_0)$, $g_0^i T_{21}(a_i) g_0^{-i} = T_{21}(a_i\theta_0^i) \in X$, 从而

$$\prod_{i=1} (g_0^i T_{21}(a_i) g_0^{-i}) = T_{21}(\gamma) \in X.$$

且

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T_{21}(-\gamma) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = T_{12}(\gamma) \in X.$$

所有的 $T_{21}(\gamma)$、$T_{12}(\gamma)(\gamma \in F)$ 生成 $\text{SL}(n, F) \leq X$. 如所欲证. ▌

§8.4 子域上的酉群的扩群

设 $K \subset F$ 是任意域, $[F : K] = r < \infty$; $N = \text{U}'(n, K, \Delta, L) = \text{Sp}(n, K, H)$、$\text{SU}(n, K, H)$或$\Omega(n, K, \Delta, L)$,且 N 的 Witt 指数 ν 满足定理 8.1.1 所述的条件. 本节要定出 N 在 $\text{GL}(n, F)$中的扩群. 对每一个这样的扩群 X,可以选一个最大的中间域 $E(K \subseteq E \subseteq F)$ 使得 E 上有一个 $N_E = \text{U}'(n, E, \Delta, L_E)$ 满足 $N \leq N_E \leq X$. 并且还可选取 L_E 最大. 用 N_E 代替 N 可设 K、L 最大,即: $N \leq \text{U}'(n, E, \Delta, L_E) \leq X \Longleftrightarrow E = K$, $L = L_E$. 如果 $\text{SL}(n, K) \leq X$, 则由 ν 所满足的条件一定可推出 $n(n-1)/2 > r$, X 已在§8.2 中定出了,故设 $\text{SL}(n, K) \not\leq X$, $X \cap \text{GL}(n, K)$ 是 N 在 $\text{GL}(n, K)$中的扩群. 由定理 4.1.1 知对某个 $L_1 \supseteq L$,

$(X \cap \mathrm{GL}(n, K)) \trianglerighteq \mathrm{U}'(n, K, \Delta, L_1)$. 由 L 的极大性，有 $L_1 = L$. 记 $G = \mathrm{GU}(n, K, \Delta, L)$，则 $(X \cap \mathrm{GL}(n, K)) \leq G$.

如果 $X \leq \Gamma = \mathrm{GL}(n, K) \cdot F^*$，则

$$X = (X \cap \mathrm{GL}(n, K)) \cdot F^* \leq G \cdot F^* \trianglerighteq N.$$

定理已成立. 设 $X \not\leq \Gamma$，从而可取 $g_0 \in X \backslash \Gamma$. 如果能选 g_0 具有足够多的零分量，达到引理 5.5.1 对 g_1 的要求，由引理 5.5.1 就可以在 X 中找到一个 $T \notin \Gamma$ 使 $\mathrm{rank}(T - I)$ 很小，进而在 X 中找到某个 $\mathrm{U}'(n, E, \Delta, L_E)(F \supseteq E \supsetneqq K)$ 的根元素，并证明 $\mathrm{U}'(n, E, \Delta, L_E) \leq X$. 导致矛盾. 由此完成定理的证明.

引理 8.4.1 设 $[F : K] = r$ 及 $N = \mathrm{U}'(n, K, \Delta, L)$，$\nu = \nu_L(\Delta)$ 满足定理 8.1.1 所述的条件. 设 $g_0 \in \mathrm{GL}(n, F) \backslash \Gamma$，$Y = \langle N, g_0 \rangle$. 则存在 $\tilde{g}_1 = (b_{ij})_{n \times n} \in Y \backslash \Gamma$ 满足条件：当 $L \neq 0$ 时 $b_{1, \nu+1} = 0$；当 $L = 0$ 时 $b_{i, \nu+j} = 0$，$\forall 1 \leq i, j \leq 2$.

证明 记 $g_0 = (a_{ij})_{n \times n}$，$g_0^{-1} = (\tilde{a}_{ij})_{n \times n}$.

情况 1 $N = \mathrm{Sp}(n, K, H)$，且 $n = 2\nu > r$.

由 $n > r = [F : K]$ 知 F 中的 n 个元素 $a_{1j} (1 \leq j \leq n)$ 在 K 上线性相关，存在不全为 0 的 n 个元素 $\lambda_j \in K (1 \leq j \leq n)$ 使 $\sum_{i=j}^{n} a_{1j} \lambda_j = 0$. 存在辛方阵 $P \in \mathrm{Sp}(n, K, H)$ 以 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)'$ 为它的第 $\nu + 1$ 列，于是 $\tilde{g}_1 = g_0 P \in Y \backslash \Gamma$ 的第 $(1, \nu + 1)$ 分量等于 $\sum_{i=j}^{n} a_{1j} \lambda_j = 0$，恰如所需.

在以下的证明中，我们对每个 $S \in \mathrm{Mat}_\nu K$ 记

$$T_0(S) = \begin{pmatrix} I_{(\nu)} & O & O \\ S & I & O \\ O & O & I \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(n, K),$$

并记 $T_1(S) = g_0 T_0(S) g_0^{-1}$. 当 $S \in M_L(\nu, K) = \{A \in \mathrm{Mat}_\nu K \mid \overline{A}' = -\rho A$ 且 A 的对角元全含于 $L\}$ 时，$T_0(S) \in N$，$T_1(S) \in Y$. 当 $\mathrm{char} K = 2$ 且 $L = 0$ 时，记 $K_0 = K^2 = \{\theta^2 \mid \theta \in K\}$，在其余情

况下记 $K_0 = K_J$，则 $M_L(\nu, K)$是 K_0 上的向量空间，$T_0(S) \in N \Longrightarrow T_0(\lambda S) \in N$，$\forall \lambda \in K_0$. 当 $L \neq 0$ 时，记 $M = \{S \in M_L(\nu, K) | T_1(S)$ 的第 $(1, \nu+1)$ 元为 $0\}$；当 $L = 0$ 时，记 $M = \{S \in M_L(\nu, K) | T_1(S)$ 的第 $(i, \nu+j)$ 元为 $0, \forall 1 \leq i, j \leq 2\}$. 对 $\lambda \in K_0$，由 $T_0(\lambda S) = I + \lambda(T_0(S) - I)$ 知 $T_1(\lambda S) = I + \lambda(T_1(S) - I)$. 由此可以看出，$M$ 是 K_0 上的向量空间. 我们首先证明，在定理 8.1.1的条件下有 $M \neq 0$. 这样，如果能选 $S = S_0 \in M$ 使 $T_1(S_0) \notin \Gamma$，则 $\tilde{g}_1 = T_1(S_0)$ 即为所求. 否则，对所有的 $S \in M$ 都有 $T_1(S) \in \Gamma$，则当 $K_0 \neq F_2$ 时，可由引理 5.6.1 知所需的$\tilde{g}_1$ 存在. $K_0 = F_2$ 时 $K = F_2$ 或 F_4，是有限域，此时 $N = \mathrm{SU}(n, K, f)$ 或$\Omega(n, K, Q)$的扩群已在文献[3]中定出，在此不再另外作特别的讨论.

因此只需证明 $M \neq 0$. 在此需要选取非零的 $S = (s_{kl})_{\nu\times\nu} \in M_L(\nu, K)$ 使 $T_1(S) = g_0 T_0(S) g_0^{-1} = (b_{ij})_{n\times n}$ 的分量 $b_{i,\nu+j} = \sum_{k,l=1}^{\nu} s_{kl} a_{i,\nu+l} \tilde{a}_{k,\nu+j} = 0$, $1 \leq i, j \leq t$, $t = 1$ 或 2. 只要可自由选取的独立变量 s_{kl}的个数超过 $\dim_K(\mathrm{Mat}_t F)$，就可达到目的.

情况 2　$N = \mathrm{Sp}(n, K, H)$ 且 $n(n+2) > 8r$.

由于 $n = 2\nu$，条件 $n(n+2) > 8r$ 即是 $\nu(\nu+1)/2 > r$. 此时 $M_L(\nu, K) = M^+(\nu, L)$ 是 $\mathrm{Mat}_\nu K$ 中全体对称方阵组成的 $\nu(\nu+1)/2$ 维 K-空间，每个 $S = (s_{kl})_{\nu\times\nu} \in M^+(\nu, K)$ 由 $\nu(\nu+1)/2$ 个独立参数 $s_{kl} \in K(1 \leq k \leq l \leq \nu)$ 决定，而 $s_{lk} = s_{kl}$, $1 \leq k, l \leq \nu$. 故 $b_{1,\nu+1} = \sum_{1\leq k\leq l\leq\nu} s_{kl} c_{kl}$，其中 $c_{kl}(1 \leq k \leq l \leq \nu)$ 是 F 中的 $\nu(\nu+1)/2$ 个元素. 由 $\nu(\nu+1)/2 > r = [F : K]$ 知这一组 $c_{kl} \in F$ 在 K 上线性相关，存在不全为 0 的一组 $s_{kl} \in K$，即可选取 $S \neq 0$，使

$$b_{1,\nu+1} = \sum_{1\leq k\leq l\leq\nu} s_{kl} c_{kl} = 0,$$

即 $S \in M$, $M \neq 0$. 如所欲证.

情况 3 $J \neq 1$, $N = \mathrm{SU}(n, K, H)$, $\nu^2 > 2r$.

此时 $[K : K_J] = 2$, 记 $K = K_J \oplus K_J\theta$, 其中 $\theta \in K \setminus K_J$ 可任意给定. $M_L(\nu, K) = M_{K_J}(\nu, K)$ 是 K 上 $\nu \times \nu$ Hermite 方阵组成的 K_J 上的 ν^2 维空间. $s_{lk} = \overline{s_{kl}}$, $\forall 1 \leq k, l \leq \nu$. 将每个 $s_{kl}(1 \leq k \leq l \leq n)$ 写成 $s_{kl} = \alpha_{kl} + \beta_{kl}\theta$ 的形式, 使 α_{kl}、$\beta_{kl} \in K_J$, 则所有的 $\beta_{kk} = 0$, 而 $s_{lk} = \alpha_{kl} + \beta_{kl}\bar{\theta}$. 现在

$$b_{1,\nu+1} = \sum_{1 \leq k, l \leq \nu} s_{kl} a_{1,\nu+k} \tilde{a}_{l,\nu+1}$$

$$= \sum_{1 \leq k \leq \nu} \alpha_{kk} c_{kk} + \sum_{1 \leq k < l \leq \nu} (\alpha_{kl} c_{kl} + \beta_{kl} c_{lk}),$$

其中 $c_{kl}(1 \leq k, l \leq \nu)$ 是 F 中的 ν^2 个元素. 我们有

$$\nu^2 > 2r = 2[F : K] = [F : K_J],$$

于是 F 中这 ν^2 个元素 c_{kl} 在 K_J 上线性相关. 可在 K_J 中选不全为 0 的 ν^2 个独立参数 $\alpha_{kl}(1 \leq k \leq l \leq \nu)$, $\beta_{kl}(1 \leq k < l \leq \nu)$, 使 $b_{1,\nu+1} = 0$. 由这些 α_{kl}、β_{kl} 可构造出一个 $0 \neq S \in M$.

情况 4 $L = 0$, $N = \Omega(n, K, \Delta)$, 且 $\nu(\nu - 1) > 4r$.

此时 $M_L(\nu, K) = M_0(\nu, K)$, 由 $\mathrm{Mat}_\nu K$ 中全体交错方阵组成, 需要选择交错方阵 $S = (s_{ij})_{n \times n} \in M_0(n, K)$ 中的 $\nu(\nu - 1)/2$ 个独立参数 $s_{kl}(1 \leq k < l \leq \nu)$ 不全为 0, 使 $b_{i,\nu+j} = \sum_{1 \leq k < l \leq \nu} s_{kl} c_{kl}^{(ij)}$ 对 $1 \leq i, j \leq 2$ 成立, 其中 $c_{kl}^{(ij)} \in F$. 首先我们选 $S \neq 0$ 使 $b_{1,\nu+1} = b_{1,\nu+2} = 0$, 也就是使 F 上 2 维行向量 $(b_{1,\nu+1}, b_{1,\nu+2}) = (0, 0)$. $(b_{1,\nu+1}, b_{1,\nu+2})$ 是 $\mathrm{Mat}_{1\times 2}F$ 中 $\nu(\nu - 1)/2$ 个向量 $(c_{kl}^{(11)}, c_{kl}^{(12)})(1 \leq k < l \leq \nu)$ 在 K 上的线性组合. 而 $\dim_K(\mathrm{Mat}_{1\times 2}F) = 2r$, 且由 $\nu(\nu - 1) > 4r$ 知 $\nu(\nu - 1)/2 > 2r$, 故 $(c_{kl}^{(11)}, c_{kl}^{(12)})(1 \leq k < l \leq \nu)$ 在 K 上线性相关, 可选不全为 0 的 $s_{kl} \in K(1 \leq k < l \leq \nu)$, 使 $(b_{1,\nu+1}, b_{1,\nu+2}) = (0, 0)$. 这些 s_{kl} 组成一个 $S_1 \neq 0$, 使 $T_1(S_1)$ 的分量 $b_{1,\nu+1} = b_{1,\nu+2} = 0$. 并且所有的 $T_1(\lambda S_1)(\lambda \in K^*)$ 的第 $(1, \nu + 1)$、$(1, \nu + 2)$ 分量也都为 0. 若对所有的 $\lambda \in K^*$ 都有 $T_1(\lambda S_1) \in$

Γ，则由引理 8.2.1 知，所有这些 $T_1(\lambda S_1) \in GL(n, K)$，再由引理 5.6.1 和推论 5.6.2 即知存在引理 5.5.1 所要求的 $g_1 = (c_{ij})_{n\times n} \in X\backslash\Gamma$，使 $c_{1j} = c_{2j} = 0$，$\forall j \geq 3$，这样的 g_1 当然可充当本引理要求的 $\tilde{g}_1$. 否则，有 $\lambda_1 \in K^*$，使 $g_2 = T_1(\lambda_1 S_1) \notin \Gamma$. 对每个 $s \in K^*$，$T_2(s) = g_2 T_0\left(\begin{pmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{pmatrix}\right) g_2^{-1} \in X$ 的所有的 $(1, j)$ 分量 $(j \geq 2)$ 都为 0. 如果所有的 $T_2(s) \in \Gamma$，则由引理 8.2.1、引理 5.6.1 和推论 5.6.2 知，存在引理 5.5.1 所要求的 g_1. 否则，又可选 $s = s_1$ 使 $T_2(s_1) \notin \Gamma$，可用这个 $T_2(s_1)$ 来代替 g_0，将所有的 a_{1j} $(2 \leq j \leq n)$ 化为 0. 对这样的 g_0，不论怎样选取 S，$T_1(S) = gT_0(S)g^{-1} = (b_{ij})_{n\times n}$ 的分量 $b_{1j}(j \geq 2)$ 都是 0，当然 $b_{1,\nu+1} = b_{1,\nu+2} = 0$，我们只须选取 $S \neq 0$，进一步使 $b_{2,\nu+1} = b_{2,\nu+2} = 0$ 即可. 由于

$$\nu(\nu-1)/2 > 2r = \dim_K(\mathrm{Mat}_{1\times 2}F),$$

$\mathrm{Mat}_{1\times 2}F$ 中 $\nu(\nu-1)/2$ 个向量 $(c_{kl}^{(21)}, c_{kl}^{(22)})(1 \leq k < l \leq \nu)$ 在 K 上线性相关，故可选不全为 0 的 $s_{kl} \in K(1 \leq k < l \leq \nu)$ 使 $(b_{1,\nu+1}, b_{1,\nu+2}) = (0, 0)$. 这些 s_{kl} 决定一个非零的 $S_1 \in M$. 如所欲证.

情况 5　$N = \Omega(n, K, \Delta, L)$，$L \neq 0$（因而不妨设 $1 \in L$），且 $\nu(\nu-1) \geq 2r$.

此时 $s_{kl} = s_{lk}$，$\forall 1 \leq k < l \leq \nu$，且 $s_{kk} \in L$，$\forall 1 \leq k \leq \nu$. 我们需要选 $S \neq 0$ 使 $b_{1,\nu+1} = \sum\limits_{1\leq k\leq l\leq \nu} s_{kl}c_{kl} = 0$，其中 $c_{kl} \in F$，$1 \leq k \leq l \leq \nu$. 我们有 $\frac{1}{2}\nu(\nu-1) + 1 > r = [F : K]$. 于是 F 中由 $\frac{1}{2}\nu(\nu-1) + 1$ 个元素组成的集合 $\{c_{11}, c_{kl} | 1 \leq k < l \leq \nu\}$ 在 K 上线性相关，可选 $\lambda_{kl} \in K(1 \leq k < l \leq \nu)$ 和 $\lambda_{11} \in K$ 不全为 0，使

$$\sum_{1\leq k<l\leq \nu} \lambda_{kl}c_{kl} + \lambda_{11}c_{11} = 0.$$

如果 $\lambda_{11} \notin L$（从而 $\lambda_{11} \neq 0$），可将所有的 λ_{kl} 换成 $\lambda_{kl}\lambda_{11}^{-1}$　$(1 \leq k <$

$l \leq \nu$ 或 $k = l = 1$),化成 $\lambda_{11} = 1 \in L$，而仍有 $b_{1,\nu+1} = 0$. 这说明我们总可选取 $\lambda_{11} \in L$，对 $1 \leq k < l \leq \nu$ 或 $k = l = 1$ 取 $s_{kl} = \lambda_{kl}$，并对 $2 \leq k \leq \nu$ 取 $s_{kk} = 0$，则这些 s_{kl}决定一个非零的 $S \in M$，恰如所需. 这就完成了本引理的证明. ▌

定理 8.1.1 的证明(条件(b)～(e)之一成立)

设 N 满足条件 (b) ～ (e) 之一，$N < X \leq \mathrm{GL}(n, F)$ 且 $X \not\leq \Gamma = \mathrm{GL}(n, K) \cdot F^*$，则由引理 8.4.1 知存在 $g_0 = (b_{ij})_{n\times n} \in X \backslash \Gamma$，使得当 $L \neq 0$ 时 $b_{1,\nu+1} = 0$；当 $L = 0$ 时 $b_{i,\nu+j} = 0$，$\forall 1 \leq i, j \leq 2$.

当 $L \neq 0$ 时,对每个 $s \in L$ 取 $g(s) = g_0 T_{\nu+1,1}(s) g_0^{-1} \in X$，则 $g(s)$的第一行为$(1, 0, \cdots, 0)$,如果可选 s 使 $g(s) \notin \mathrm{GL}(n, K)$，则 $g_1 = g(s) \notin \Gamma$，由引理 5.5.1 和引理 5.7.3 可得出所需的结论. 否则，$g(s) \in \mathrm{GL}(n, K)$ 对所有 $s \in L$ 成立,由引理5.6.2(1)知存在 $z \in N$ 使 $g_1 = z^{-1} g_0 \in X \backslash \Gamma$ 的第一行为$(1, 0, \cdots, 0)$,仍可用引理 5.5.1 和5.7.3得出所需的结论.

当 $L = 0$ 即 $N = \Omega(n, K, \Delta)$ 时,对每个 $s \in K$，取

$$g(s) = g_0 T_{\nu+1,2}(s) T_{\nu+2,1}(-s) g_0^{-1} \in X,$$

则 $g(s)$的前两行为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. 如果可选 $s \in K^*$，使 $g(s) \notin \mathrm{GL}(n, K)$，则 $g_1 = g(s) \in X \backslash \Gamma$，可用引理 5.5.1 和 5.7.3得出所需的结论. 否则，$g(s) \in \mathrm{GL}(n, K)$ 对所有的 $s \in K$ 成立. 当 $K = F_2$ 时，$F = F_{2^r}$ 是有限域,N 的扩群已在文献[3]中定出,这里不再讨论. 故可设 $|K| > 2$，于是由引理 5.6.2(2)知存在引理 5.5.1 所要求的 $g_1 \in X \backslash \Gamma$，仍可用引理 5.5.1 和 5.7.3 得出所需的结论. ▌

参考文献

[1] Aschbacher M. On the maximal subgroups of finite classical groups, *Invent Math*, 1984, 76: 469～514

[2] Bass H. "Unitary Algebraic K-Theory", Lecture Notes in Math, Vol. 343: 57～266, Springer-Verlag, New York/Berlin.

[3] Burgoyne N, Griess R, Lyons R. Maximal subgroups and automorphisms of Chevalley groups, *Pacific J Math*, 1977, 71: 365～403

[4] Chevalley C. The algebraic theory of spinors. New York: Columbia Univ Press, 1954

[5] Dickson L E. Linear Groups with an exception of the Galois field theory. Dover Publications, New York, 1958

[6] Dieudonne J. La geomertrie des groupes classiques. Second edition, Springer-Verlag, 1963

[7] Dye R H. Symmetric groups as maximal subgroups of orthogonal and symplectic groups over the field of two elements, *J London Math Soc*, 1979, 20(2): 227～237

[8] Dye R H. Maximal subgroups of $GL_{2n}(K)$, $SL_{2n}(K)$, $PGL_{2n}(K)$ and $PSL_{2n}(K)$ associated with symplectic polarities. *J Algebra*, 1980, 66: 1～11

[9] Dye R H. On the maximality of the orthogonal groups in the symplectic group in characteristic two. *Math Z*. 1980, 172: 203～212

[10] Dye R H. A maximal subgroup of $PSp_6(2^m)$ related to a spread. *J Algebra*, 1983, 84: 128～135

[11] Dye R H. Maximal subgroups of symplectic groups stabilizing spreads. *J Algebra*, 1984, 87: 493～509

[12] Dye R H. Maximal subgroups of finite orthogonal and unitary groups. *Math Z*, 1985, 189: 111～129

[13] Dye R H. Maximal subgroups of $PSp_{6n}(q)$ stabilizing spreads of totally isotropic planes. *J Algebra*, 1986, 99: 191～209

[14] Hahn, A, O'meara O T. The classical groups and K-theory. Berlin: Springer-Verlag, 1989

[15] 华罗庚，万哲先. 典型群. 上海科学技术出版社，1963

[16] Kantor W. Subgroups of classical groups generated by long root elements. *Trans Amer Math Soc*, 1979, 248: 347～379

[17] Kantor W. Linear groups containing a singer cycle. *J Algebra*, 1980,62:232～234

[18] Key J D. Some maximal subgroups of PSL(n, q), $n \geq 3$, $q = 2^r$. *Geom Dedicata*, 1975,4:377～386; erratum, 1977,6:389

[19] Key J D. Some maximal subgroups of certain projective unimodule groups. *J London Math Soc*, 1979,19(2), No. 2:219～300

[20] King O H. Some maximal subgroups of the classical groups. *J Algebra*, 1981, 68:109～120

[21] King O H. Maximal subgroups of the classical groups associated with nonisotropic subspaces of a vector space. *J Algebra*, 1981,73:350～375

[22] King O H. Maximal subgroups of the orthogonal group over a field of characteristic two. *J Algebra*, 1982,76:540～548

[23] King O H. Imprimitive maximal subgroups of the general linear, special linear, symplectic and general symplectic groups. *J London Math Soc*, 1982,25(2):416～424

[24] King O H. Imprimitive maximal subgroups of the orthogonal, special orthogonal, unitary and special unitary groups. *Math Z*, 1983,182:193～203

[25] King O H. Imprimitive maximal subgroups of the symplectic, orthogonal and unitary groups. *Geom Dedicata*, 1984,15:339～353

[26] King O H. On subgroups of the special linear group containing the special unitary group. *Geom Dedicata*, 1985,19:297～310

[27] King O H. On subgroups of the special linear group containing the special orthogonal group. *J Algebra*, 1985,96:178～193

[28] Kleidman P, Liebeck M. A survey of the maximal subgroups of the finite simple groups. *Geom Dedicata* 25,1988

[29] Kleidman P, Liebeck M. The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1989

[30] 李尚志.关于若干有限单群的子群体系,中国科学技术大学博士研究生毕业论文. 1982(中国科学技术大学博士论文汇编第一辑(七八级研究生),1984)

[31] 李尚志.有限典型群中含根子群的极大子群.科学通报,1983,第28卷第5题:257～260

Li S Z. Maximal subgroups containing root subgroups in finite classical groups. 1984,29, No. 1:14～18

[32] Li S Z. On the maximality of certain orthogonal groups embedded in symplectic and unitary groups resp. 数学研究与评论,1983,第3卷第1期:101～103

[33] 李尚志. PSL(n, F)中几类极大子群.数学学报,1983,第26卷第5期:613～621

[34] 李尚志. PΩ(n, F, Q)中含根子群的极大子群. 中国科学(A辑), 1985,5:193～205

Li S Z. Maximal subgroups in PΩ(n F, Q) with root subgroups. *Scientia Sinica* (Series A), 1985,28, No. 8:826～838

[35] 李尚志. PSU(n, K, f)($\nu(f)\geq 1$)中含根子群的极大子群. 数学学报,1986,第29卷第5期:632～641

[36] Li S Z. Maximal subgroups containing short-root subgroups in PSp($2n$, F). *Acta Math Sinica* (New Series), 1987,3, No. 1:82～91

[37] Li S Z. Maximal subgroups in classical groups over arbitrary fields. *Proc Sympos Pure Math*, 1987,47, Part Ⅱ:487～493

[38] 李尚志. 体上酉群在线性群中的极大性. 科学通报,1988,第39卷第21期:1608～1610

[39] Li S Z. Irreducible subgroups of SL(n, K) generated by root subgroups. *Geom Dedicata*, 1989,31:41～44

[40] Li S Z. The maximality of monomial subgroups of linear groups over division rings. *J Algebra*, 1989,127, No. 1:22～39

[41] Li S Z. Overgroups in GL(nr, F) of certain subgroups of SL(n, K), Ⅰ. *J Algebra*, 1989,125:215～235

[42] Li S Z. Overgroups of certain subgroups in the classical groups over division rings. *Contemp Math*, 1989, 82: 53～57

[43] Li S Z. Overgroups of SU (n, K, f) or Ω(n, K, Q) in GL (n, K). *Geom Dedicata*, 1990,33:241～250

[44] 李尚志. SL(n, K)在GL(n, F)($K\subset F$)中的扩群. 数学学报,1990,第33卷第6期:774～778

[45] Li S Z. Overgroups in GL ($U\otimes W$) of certain subgroups of GL (U) $\otimes$ GL(W), Ⅰ. *J Algebra*, 1991,137:338～368

[46] Li S Z. A new type of classical groups over division rings of characteristic 2. *J Algebra*, 1991,138:399～419

[47] Li S Z. Overgroups of a unitary group in GL (2, K). *J Algebra*, 1992, 149:275～286

[48] 李尚志. TU(n, K, h)或Ω(n, K, Q)在GL (nr, F)中的扩群. 科学通报,1993,第38卷第17期:1537～1539

Li S Z. Overgroups in GL (nr, F) of TU (n, K, h) or Ω(n, K, Q). *Chinese Science Bulletin*, 1994, Vol. 39, No. 1:182～185

[49] Li S Z. Overgroups in GL (n, F) of a Classical Group over a Subfield of F. *Algebra Colloq*, 1994,1:4:335～346

[50] Li S Z. On the subgroup structure of classical groups, "Group Theory in China". Science Press, New York/Beijing/Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1996

[51] Li S Z. Overgroups in GL (nr, F) of certain subgroups of SL(n, K), I. preprint

[52] Li S Z. Overgroups in GL ($U \otimes W$) of certain subgroups of GL (U) $\otimes$ GL(W), I. preprint

[53] Li S Z. SL $(n, K)_L \otimes$ SL $(m, K)_R$ over a skewfield K. preprint

[54] Li S Z. Overgroups of the subclassical groups defined over a subfield. preprint

[55] 李尚志,查建国.典型群的极大子群的一些结果.中国科学技术大学学报,1981,第11卷第2期:124~125

[56] 李尚志,查建国.有限域上射影特殊酉群的几类极大子群.中国科学(A辑),1982,2:125~131

Li S Z, Zha J G. On certain classes of maximal subgroups in projective special unitary groups over finite fields. *Scientia Sinica* (Series A), 1982,25, No. 8:808~815

[57] 李尚志,查建国.射影辛群 PSp(n, F)中几类极大子群.中国科学(A辑),1982,6:481~486

Li S Z, Zha J G. On certain classes of maximal subgroups in PSp ($2n$, F). *Scientia Sinica* (Series A), 1982,25, No. 12:1250~1257

[58] 李尚志,查建国.Sp($2n$, F_2)中含长根子群的极大子群.数学研究与评论,1985,第5卷第2期:45~48

[59] McLaughlin J. Some groups generated by transvections. *Arch Math*, 1967,18:364~368

[60] McLaughlin J. Some subgroups of $SL_n(F_2)$. *Ill J Math*, 1969,13:108~115

[61] O'Nan M E. Some open problems in primitive permutation groups. *Proceedings of Symposia in Pure Math*, 37, Amer Math Soc, 1980, L28:1~14

[62] O'Meara O T. "Classical groups and Algebraic K-Theory". Springer-Verlag, 1989

[63] 任金江.体上酉平延群中含长根子群的极大子群.中国科学技术大学博士研究生毕业论文,1993

[64] Seitz G. The maximal subgroups of classical algebraic groups. *Mem. AMS* 67, No. 365, 1987

[65] Stark B. Irreducible subgroups of orthogonal groups generated by groups of root type 1. *Pacific J Math*, 1974,53:611~625

[66] Timmesfeld F G. Groups generated by k-transvections. *Invent Math*, 1990,100:

167～206

[67] Timmesfeld, F G. Groups generated by K-root subgroups. *Invent Math*, 1991, 106:575～666

[68] Tits J. Buildings of spherical type and finite BN-pairs. Lecture Notes in Math. 386, Springer-Verlag, 1974

[69] 王新茂. 关于正交群中根子群生成的不可约子群的补充结果. 中国科学技术大学硕士研究生毕业论文,1997

符号及术语索引

排列顺序：先按英文字母顺序排列符号和术语，再按希腊字母顺序排列符号和术语，最后按汉语拼音字母顺序排列汉字的术语.